А. Д. Александров

ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

11-5-4.

Редактор *Д. А. Райков.* Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*

Подписано к печати 4/II 1950 г. 26,75 печ. л. 32,95 уч.-изд. л. 49 184 типогр. зн. в печ. л.
Т00223. Тираж 4000 экз. Цена книги 19 руб. 80 коп. Переплёт 2 руб. Заказ № 1047.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфиздата при Совете
Министров СССР. Москва, Валовая, 28.

Посвящаю моему учителю
Борису Николаевичу Делоне

А. Александров

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

1. О содержании и целях книги. Настоящая книга не имеет целью охватить всё учение о выпуклых многогранниках. Она посвящена в основном вопросу о том, какие данные и в какой степени могут определять выпуклый многогранник.

Для всяких данных, относящихся к многограннику, как длины рёбер, площади граней и т. п., указанный вопрос распадается на два.

Во-первых, мы спрашиваем, определяют ли эти данные многогранник однозначно с точностью до движения или иного тривиального преобразования (отражения, параллельного переноса, подобия), подобно тому как длины сторон определяют треугольник с точностью до движения, а углы — с точностью до подобия. На такой вопрос отвечают общие теоремы о единственности выпуклого многогранника с теми или иными данными, единственности с точностью до движения или иного тривиального преобразования.

Во-вторых, мы спрашиваем о необходимых и достаточных условиях, которым должны удовлетворять те или иные данные для того, чтобы вообще существовал выпуклый многогранник с такими данными, подобно тому как необходимым и достаточным условием существования треугольника со сторонами a, b, c является выполнение трёх неравенств вида: сумма двух сторон больше третьей, т. е. $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$. Так как необходимость соответствующих условий будет во всех случаях получаться очень просто, то ядро вопроса будет всегда состоять в доказательстве достаточности, т. е. в доказательстве того, что при выполнении требуемых условий многогранник с такими данными существует.

Речь идёт, следовательно, об общих теоремах существования выпуклого многогранника с теми или иными данными. При этом рассматриваются данные, определяющие многогранник, т. е. такие, для которых имеет место соответствующая теорема единственности, аналогично тому, как задание длин сторон a, b, c определяет треугольник.

Первая общая теорема единственности была доказана Коши в 1813 г. *). Она гласит: два замкнутых выпуклых многогранника, оди-

*) A. Cauchy, Sur les polygones et polyédres, Second Memoire, Journal École Polytechn., т. 9, стр. 87 (1813). В доказательстве Коши, являвшем собою образец остроумия, были, однако, ошибки, исправленные потом другими

наково составленных из соответственно равных граней, равны; или в форме теоремы единственности: замкнутый выпуклый многогранник, данным образом составленный из данных граней, — единственный с точностью до движения или движения и отражения*).

В 1897 г. Минковский доказал существование и единственность (с точностью до переноса) замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней**).

На этом круг общих теорем существования и единственности, собственно говоря, исчерпывался***). Мне удалось дополнить его новыми теоремами и охватить все эти теоремы, включая теоремы Коши и Минковского, единым методом. Для теорем единственности это был метод Коши, которым он доказал свою теорему. Для теорем существования это был новый в теории многогранников метод, основанный на применении топологии в лице так называемой теоремы об инвариантности области. Две новые теоремы существования и единственности были открыты С. П. Оловянишниковым на том же пути****).

В результате область рассматриваемых теорем о выпуклых многогранниках приобрела объём и стройность, делающие её, как нам кажется, заслуживающей самостоятельного систематического изложения.

Первая цель книги и состоит в том, чтобы осуществить такое изложение.

Для того чтобы сделать книгу доступной и интересной возможно большему кругу читателей, я включил в неё изложение первоначальных сведений о выпуклых многогранниках; это казалось тем более

геометрами. Безупречное и ясное доказательство дано в книге Адамара, Элементарная геометрия, часть II, Стереометрия, стр. 534—543 (Учпедгиз, 1938). Говоря о теореме Коши как первой общей теореме единственности, мы не имеем в виду таких по существу тривиальных теорем, как, например, теорема единственности замкнутого выпуклого многогранника с данными вершинами.

*) Два многогранника «имеют одинаковое строение», если их грани, рёбра и вершины можно сопоставить так, что соответственные грани (рёбра) будут сходиться по соответственным рёбрам (вершинам). Если к тому же соответственные рёбра равны и углы при соответственных вершинах на соответственных гранях также равны, то многогранники «одинаково составлены из равных граней».

**) Г. Минковский (H. Minkowski), Общие теоремы о выпуклых многогранниках. Успехи матем. наук, вып. 2 (1936). Оригинал появился в Göttinger Nachrichten, за 1897 г. Точная формулировка теорем Минковского вместе с условиями существования многогранника с данными направлениями и площадями граней даётся дальше в своём месте.

***) Мы имеем в виду теоремы описанного выше типа. Из их круга выпадает важная теорема о существовании замкнутого выпуклого многогранника с наперёд заданной схемой строения, установленная Штейницем в 1915 г. Она не входит в нашу сферу, потому что схема строения, очевидно, не определяет многогранник однозначно. Доказательство этой теоремы воспроизведено в книге Л. А. Люстерника, Выпуклые тела, изд. 2-е (1941).

****) С. П. Оловянишников, Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей, Матем. сборник, т. 18, вып. 3 (1945).

необходимым, что систематическое и достаточно полное изложение их в нашей литературе отсутствует.

Топология, на которую мы уже сослались, вызывает часто у людей, с ней не знакомых, представление о чём-то чрезвычайно трудном и абстрактном. Однако в её основании лежит, по существу, описание математическим языком наглядных пространственных представлений. В этом смысле топология есть часть общей геометрии и потому основанные на ней методы должны рассматриваться как геометрические, хотя и абстрактные. Для того чтобы сделать применение топологии возможно более доступным, мы включаем изложение тех её элементов, которые необходимы для наших целей. Впрочем, абстрактные её понятия играют роль только в части книги.

Далее, помимо основных результатов, в книгу включены тесно примыкающие к ним, как, например, теорема о многограннике наибольшего объёма при данной поверхности и «теоремы жёсткости» *).

Наконец, кроме основных применяемых методов освещаются также другие методы. В результате получилось почти исчерпывающее изложение предмета, если говорить о сегодняшнем его состоянии **).

Теория многогранников и связанные с нею геометрические методы интересны не только сами по себе. Они имеют широкий выход в общую теорию поверхностей. И если далеко не всегда из теоремы о многогранниках можно извлечь путём предельного перехода соответствующую теорему о кривых поверхностях, то во всяком случае теоремы о многогранниках дают направление для поисков соответствующих теорем относительно кривых поверхностей. К тому же в случае многогранников раскрывается элементарно-геометрическая основа более общих результатов. Для демонстрации этих связей я присоединил почти к каждой главе параграф, посвящённый обобщениям рассматриваемых в ней вопросов. Здесь имеются в виду не только обобщения на кривые поверхности, но также на многогранники в пространстве Лобачевского и др. Эти обобщения излагаются в порядке реферата и не используются в основном материале.

Всё сказанное выясняет вторую цель книги: показать богатство содержания и связей, заключённых в теории многогранников и её геометрических методах.

2. О порядке и характере изложения. В первой главе, как показывает само её название, вводятся все основные понятия и свойства выпуклых многогранников, используемые в дальнейшем изложении.

---

*) Общее понятие о теоремах жёсткости разъясняется в § 6 гл. II.

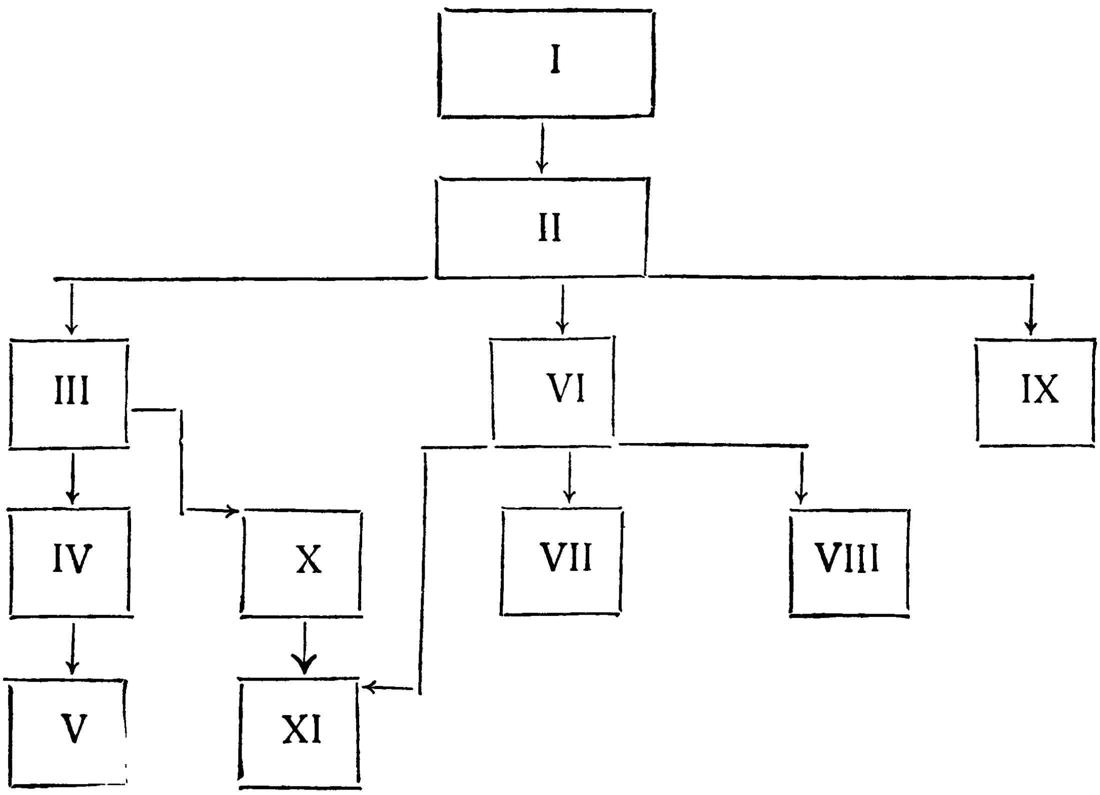
**) Из всего известного мне материала я опустил лишь доказательство жёсткости замкнутого выпуклого многогранника по методу Дена. Кстати, работа Дена опубликована в Успехах матем. наук, вып. 2 (1936). Однако в гл. X мы получаем иным путём более сильные результаты.

Она не предполагает никаких предварительных знаний, кроме элементарной геометрии.

Вторая глава, «Метод и результаты», содержит изложение основ применяемого метода (§§ 1 и 2) и обзор главных результатов (§§ 3—6), которые выводятся в следующих главах. Этот обзор (не играющий роли в дальнейшем изложении) введён для того, чтобы читатель, познакомившись с ним, мог ориентироваться в содержании дальнейших глав и выбрать из него то, что покажется ему более интересным.

Что касается метода, то в § 1 главы II излагается метод Коши для доказательства теорем единственности, которым посвящены главы III и VI. Метод этот — совершенно элементарный. В § 2 главы II излагается основа метода доказательства теорем существования, которым посвящены главы IV, V, VII и IX. Этот метод основан на существенном использовании некоторых понятий и результатов топологии. Для удобства читателя, не осведомлённого в этих вопросах, весь необходимый топологический материал излагается в дополнительных §§ 8 и 9 главы II. Таким образом, можно считать, что никаких предварительных знаний по топологии для понимания книги не требуется. Впрочем, все главы, кроме глав IV, VII и IX, обходятся и без этих элементов топологии.

Общая зависимость глав даётся следующей схемой, из которой видно, например, что главы III, VI и IX совершенно независимы друг от друга.



Если не считать элементов топологии, которые, как уже сказано, излагаются в §§ 8 и 9 главы II и используются только в главах IV, VII и IX, то в остальном мы обходимся самыми простыми средствами (элементарная геометрия, сложение векторов, а в главах X, XI —

производная). Исключение представляют только § 2 главы VII и §§ 2 и 3 главы VIII, где применяются элементы анализа (экстремум функции многих переменных, интегрирование).

Всё это не относится к дополнительным параграфам «Обобщения», помещаемым в конце почти каждой главы. В то время как в основном тексте изложение ведётся со всей возможной обстоятельностью, в этих параграфах даётся только обзор обобщений, причём применяются самые разнообразные средства вплоть до аддитивных функций множества, дифференциальных уравнений и т. п. Эти параграфы не играют роли для понимания основного содержания книги и так же, как другие места текста, носящие характер дополнений, печатаются мелким шрифтом.

По ходу изложения я формулировал ряд задач, большинство из которых служит в качестве упражнений, некоторые же представляют нерешённые проблемы, могущие служить темой для самостоятельных исследований.

3. Замечания для специалистов. Не считая изменений и усовершенствований в тех теоремах и доказательствах, которые уже известны из ранее опубликованных работ *), в книге содержится целый ряд результатов, публикуемых впервые. Это — все теоремы о многогранниках, имеющих границу (гл. III, § 5, гл. V, гл. VI, § 5, гл. IX, § 1), теоремы о бесконечных многогранниках (гл. VI, §§ 4 и 5, гл. VII, §§ 3 и 4) и, наконец, теоремы о жёсткости (гл. X и XI) **). Многие из этих результатов не кажутся мне особенно значительными, но среди них есть, несомненно, достойные внимания. Точно так же в параграфах «Обобщения» специалист найдёт кое-что новое.

Я хотел бы ещё отметить, что изучение бесконечных выпуклых многогранников до последнего времени вовсе не проводилось. Вслед за первыми работами, моей и С. П. Оловянишникова, эта книга, я надеюсь, доказывает достаточный интерес их исследования наряду с замкнутыми многогранниками, тем более, что речь может идти не о фактически бесконечном многограннике, а о конечном многограннике, допускающем неограниченное продолжение, для возможности которого можно дать совершенно простые необходимые и достаточные условия (гл. I, § 1, n° 6).

---

*) Помимо уже цитированных работ Коши, Минковского и Оловянишникова, речь идёт о моих работах: 1) Элементарное доказательство теоремы Минковского и некоторых других теорем о выпуклых многогранниках. Изв. Акад. наук, 1937. 2) Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования, Изв. Акад. наук, 1939. 3) Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой, Матем. сборник, т. 11, вып. 1 (1941). 4) Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной, Доклады Акад. наук, 1942, т. 35, № 8.

**) Исключение составляет общая теорема о жёсткости замкнутого выпуклого многогранника, другое доказательство которой опубликовано в моей книге «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей».

Многогранники с границей, ввиду естественно большего разнообразия возможностей, менее изучены, и, насколько мне известно, то, что даётся в этой книге, представляет собой вообще первые относящиеся к ним результаты. Вопрос об изгибании таких многогранников, почти полностью решённый в § 2 главы V, кажется нам особенно интересным.

В § 5 главы VI и § 4 главы VII я воспроизвожу изящные выводы А. В. Погорелова, которые он сообщил мне до их опубликования. В ряде мест я воспользовался другими его замечаниями, а также замечаниями В. А. Залгаллера. В. А. Залгаллер и Ю. Ф. Борисов прочли всю рукопись и помогли исправить некоторые допущенные мною ошибки и неточности. Ю. Ф. Борисов написал § 9 главы II и n° 9 § 7 главы I. Всем им я выражаю искреннюю благодарность за помощь в моей работе.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

§ 1. Определение выпуклого многогранника

1. Многогранником называют или тело, ограниченное конечным числом многоугольников, или поверхность, составленную из конечного числа многоугольников. Мы, преимущественно, будем понимать под *многогранником* именно многогранную поверхность, т. е. фигуру, образованную конечным числом многоугольников, хотя в некоторых случаях удобнее рассматривать многогранник как тело: например, тогда, когда говорят о точке внутри многогранника или о том, что один многогранник содержится в другом. В таких случаях мы будем обычно оговаривать, что речь идёт о *телесном многограннике*. Впрочем, взаимная связь и различие обоих понятий настолько просты, что возможное их смешение в терминологии не может повлечь никаких недоразумений по существу; тем более, что мы будем иметь дело главным образом с многогранниками, образующими целые поверхности телесных многогранников, подобно полной поверхности куба. В таком случае, например, смысл выражения «внутри многогранника» очевиден и без указания на то, что речь идёт о телесном многограннике.

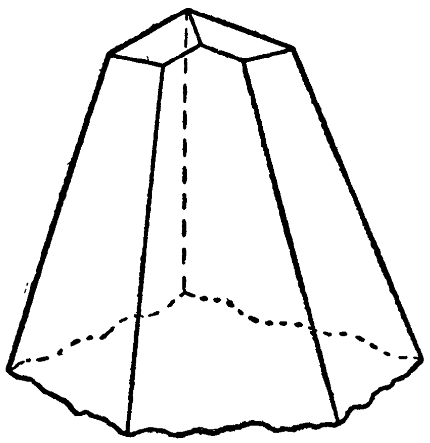
Многоугольники, образующие многогранник (или ограничивающие телесный многогранник), называются его *гранями* при условии, что многоугольники, лежащие в одной плоскости и имеющие общие стороны или отрезки сторон, объединяются в один многоугольник и образуют тем самым одну грань. Стороны и вершины граней называются соответственно *рёбрами* и *вершинами* многогранника.

Под *многоугольником* здесь, как и всюду дальше, мы понимаем любую область на плоскости, ограниченную конечным числом отрезков или отрезков и полупрямых, причём сама граница области также считается включённой в многоугольник *). Из данного определения

*) В понятие «области» входит связность, т. е. возможность соединить любые две точки области ломаной, проходящей внутри области. Поэтому, например, два треугольника, приложенные друг к другу в вершине, мы считаем не многоугольником, а двумя многоугольниками.

следует, что мы имеем в виду не только, как обычно, конечные многоугольники, но также *бесконечные многоугольники*, с тем, однако, условием, что многоугольник имеет обязательно лишь конечное число сторон и вершин. У бесконечного многоугольника в отличие от конечного имеются по крайней мере две бесконечные стороны, являющиеся полупрямыми.

Многогранник называется, соответственно, бесконечным или конечным в зависимости от того, имеются у него бесконечные грани или нет. Так как по определению число граней многогранника конечно и число сторон и вершин у каждой грани также конечно, то бесконечный многогранник, так же как конечный, имеет лишь конечное число граней, рёбер и вершин; только среди его граней и рёбер заведомо имеются бесконечные. Простейший пример бесконечного многогранника представляет многогранный угол с бесконечно продолженными гранями. Пересекая его плоскостями, легко получить другие примеры бесконечных многогранников (черт. 1). (Можно называть бесконечным многогранником также поверхность, составленную из бесконечного числа многоугольников, но такие многогранники мы совершенно не будем рассматривать; они выпадают из нашего рассмотрения потому, что задаются бесконечным числом данных.)



Черт. 1.

2. Выпуклый многогранник. Дадим теперь определение предмета этой книги, т. е. выпуклого многогранника.

Выпуклым многогранником называется фигура, составленная из конечного числа плоских многоугольников так, что

1) *от одного многоугольника к другому можно перейти, идя по многоугольникам, имеющим общие стороны или отрезки сторон* *);

2) *вся фигура лежит по одну сторону от плоскости каждого из составляющих её многоугольников.*

Второе условие и есть условие выпуклости; первое же означает, что многогранник не распадается на части, встречающиеся лишь в вершинах или даже не имеющие друг с другом ничего общего.

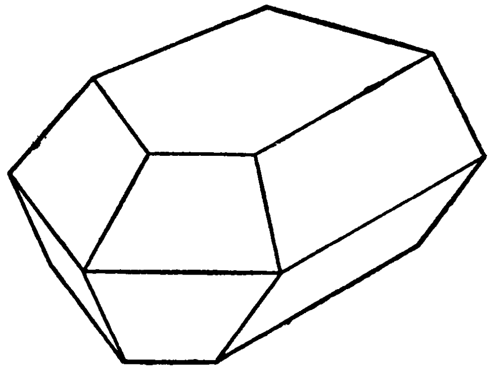
Телесным выпуклым многогранником называется тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников так, что оно лежит по одну сторону от плоскости каждого из этих многоугольников **).

---

*) На черт. 3 у многогранника есть две грани, из которых одна имеет с другой общий отрезок стороны, но не целую сторону. Это возможно лишь для выпуклого многогранника, не ограничивающего телесного многогранника.

**) Тело в переводе на теоретико-множественный язык обозначает замкнутую область. Поверхность тела есть его граница. Под фигурой в предыдущем определении понимается не что иное, как множество точек.

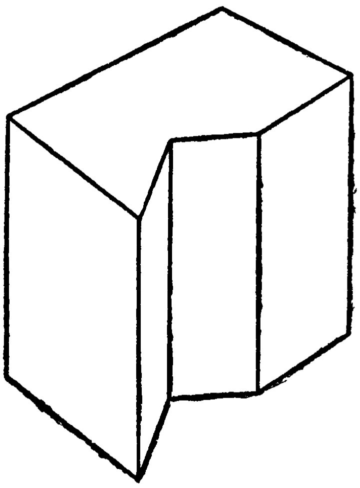
Из сравнения двух данных определений очевидно, что *вся поверхность, равно как и любая часть поверхности телесного выпуклого многогранника, представляет выпуклый многогранник* при том, конечно, условии, что взятая часть поверхности состоит из многоугольников и не распадается на куски, не имеющие многоугольников, смежных по сторонам.



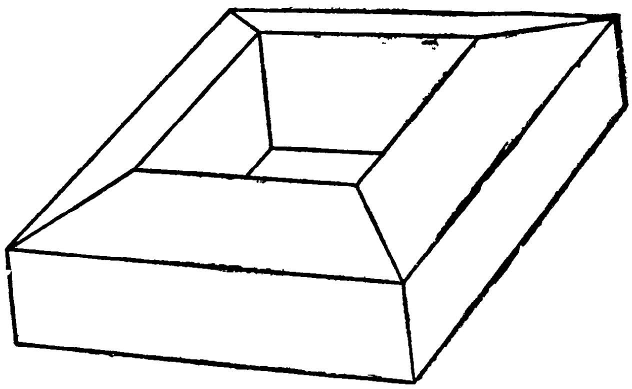
Черт. 2а.

Можно доказать и обратное: *всякий выпуклый многогранник есть полная поверхность или часть поверхности телесного выпуклого многогранника.*

Действительно, представим себе какой-нибудь выпуклый многогранник P. Проведём плоскости всех его граней; многогранник по условию лежит по одну сторону от каждой из этих плоскостей Q_i. Возьмём те полупространства, ограниченные плоскостями Q_i, которые содержат многогранник P. Общая часть этих полупространств будет телесным выпуклым многогранником, потому что по самому построению она лежит по одну сторону от каждой из плоскостей Q_i и ограничена многоугольниками, вырезанными на этих плоскостях их пересечениями



Черт. 2б.



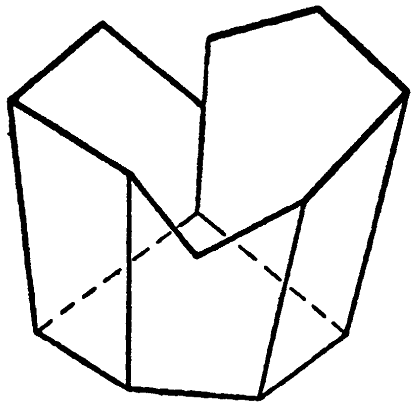
Черт. 2в.

друг с другом. Исходный многогранник P будет частью поверхности или полной поверхностью построенного телесного многогранника.

Многогранники на черт. 1 и 2а выпуклые, а на черт. 2б и 2в — невыпуклые. Для выяснения содержания теорем о выпуклых многогранниках, доказываемых в этой главе, полезно обращаться к многогранникам черт. 2б, 2в: ни одна из этих теорем не будет верной хотя бы для одного из этих многогранников.

3. Многогранники с границей, замкнутые, бесконечные. Из условия, что выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, легко заключить, что в каждом его ребре сходится самое большее по две грани и что никакая внутренняя точка одной грани не может принадлежать также другой грани.

Многогранник, являющийся только частью поверхности телесного выпуклого многогранника, характеризуется тем, что у него имеются рёбра, принадлежащие каждое лишь одной грани. Это — рёбра, которые ограничивают часть полной поверхности, представляемую данным многогранником. Поэтому мы говорим, что такой многогранник имеет *границу*: её образуют «граничные» рёбра, т. е. рёбра, принадлежащие каждое только одной грани (черт. 3). Отрезок стороны грани, входящий в границу, как черт. 3, также считается граничным ребром.



Черт. 3.

Выпуклые многогранники без границы образуют полные поверхности телесных многогранников и потому их естественно назвать *полными*.

Конечный полный многогранник, т. е. ограничивающий конечный телесный многогранник, называется *замкнутым*.

Бесконечные полные выпуклые многогранники разделяются на те, которые имеют вершины, и те, которые вовсе не имеют вершин. Всякая бесконечная в обе стороны призма, как, например, бесконечная прямоугольная труба, является многогранником без вершин.

Обратно, если многогранник не имеет вершин, то он есть бесконечная в обе стороны призма. Действительно, у многогранника без вершин ни одно ребро не может иметь конца и, следовательно, каждое ребро представляет целую прямую. Так как вершин нет, то эти прямые не пересекаются, и грани такого многогранника оказываются поэтому полосами между парами параллельных прямых, или полуплоскостями (как грани двугранного угла). Отсюда ясно, что такой многогранник есть бесконечная призма (быть может, незамкнутая, подобно двугранному углу).

Таким образом, *отсутствие вершин характеризует бесконечные призмы.*

Из полных выпуклых многогранников призмы выделяются ещё тем свойством, что они содержат прямые, т. е. *полный выпуклый многогранник, содержащий целую прямую, есть призма.*

Действительно, пусть полный выпуклый многогранник P содержит прямую L. Тогда, так как он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, то ни одна из этих плоскостей не может пересекать прямую L, т. е. плоскости всех граней многогранника P параллельны прямой L. Отсюда очевидно, что многогранник будет призмой с рёбрами, параллельными прямой L.

Бесконечная призма определяется своим сечением, так что свойства призм сводятся к свойствам многоугольников; поэтому мы исключаем их из рассмотрения, кроме немногих случаев, которые будут оговорены особо.

Мы будем заниматься всегда в первую очередь замкнутыми и затем бесконечными полными многогранниками, имеющими вершины; их мы будем называть просто бесконечными, опуская указание на полноту и наличие вершин, кроме тех случаев, когда нужно будет во избежание смешения понятий противопоставить такой многогранник бесконечному многограннику с границей или призме. Таким образом, в дальнейшем «*бесконечный многогранник*» означает, если не оговорено противное, полный выпуклый многогранник, не являющийся призмой.

4. Другое определение выпуклости. В качестве определения выпуклости многогранника мы взяли то свойство, что многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Однако в применении к телам пользуются обычно другим определением выпуклости, более общим, поскольку оно применимо не только к многогранникам. Согласно этому определению тело или множество точек называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь соединяющий их отрезок. Куб, шар, круговой цилиндр представляют примеры выпуклых тел. Круг, отрезок, целая плоскость представляют примеры плоских выпуклых фигур.

Для телесных многогранников оба понятия выпуклости равносильны.

Доказательство основано на следующем простом, но важном замечании, которое мы назовём л е м м о й о б о т д е л и м о с т и.

Всякая точка, не принадлежащая данному телесному многограннику, выпуклому в смысле нашего исходного определения, отделяется от этого многогранника плоскостью какой-либо его грани (в том смысле, что данная точка и все внутренние точки многогранника лежат по разные стороны от этой плоскости).

Действительно, если точка A не принадлежит многограннику P, то отрезок, соединяющий её с любой внутренней его точкой B, пересекает поверхность многогранника и тем самым имеет общую точку хотя бы с одной его гранью Q. При этом отрезок AB не может лежать в плоскости грани Q: иначе получалось бы, что эта плоскость проходит через внутреннюю точку B и многогранник не лежал бы по одну сторону от плоскости грани Q. Следовательно, отрезок AB необходимо пересекает плоскость грани Q.

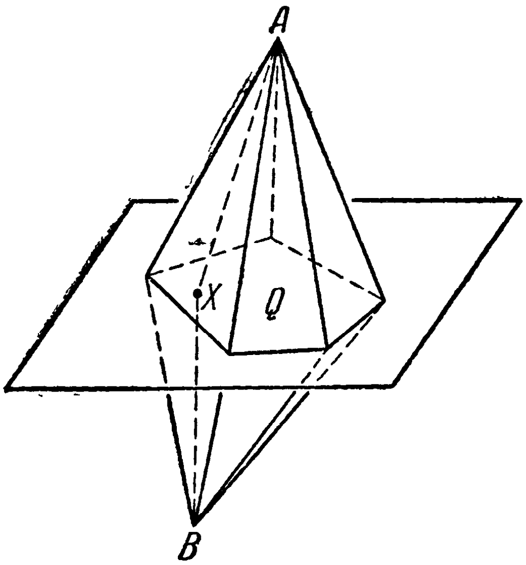
Но если многогранник выпуклый, то по самому определению он лежит по одну сторону от плоскости грани Q, именно по ту её сторону, где лежит его точка B. Поэтому плоскость грани Q отделяет его целиком от точки A, и «лемма об отделимости» доказана.

Докажем теперь, что если телесный многогранник P — выпуклый в том смысле, что лежит по одну сторону от плоскости каждой грани, то каждые две его точки соединяются лежащим в нём отрезком.

Допустим, вопреки доказываемому, что в многограннике P имеются две такие точки A, B, что на отрезке AB есть точка C, не принадлежащая многограннику. Тогда по «лемме об отделимости» точка C

отделяется от многогранника некоторой плоскостью, а это невозможно, так как такая плоскость, пересекая отрезок AB, разделяла бы точки A и B.

Докажем, наконец, обратное утверждение. Пусть многогранник P — выпуклый в том смысле, что каждые две его точки соединимы в нём отрезком. Допустим, однако, что многогранник P не лежит по одну сторону от плоскости некоторой своей грани Q, так что в нём имеются точки A и B, лежащие по разные от неё стороны (черт. 4). Тогда, соединяя их со всеми точками X грани Q, мы получили бы две пирамиды с общим основанием Q, которое тем самым оказалось бы внутри составленного из них многогранника. Но так как любой отрезок AX и BX должен лежать в многограннике P, то Q оказалось бы также внутри P и, следовательно, не могло бы быть гранью.



Черт. 4.

Таким образом, одно свойство выпуклости следует из другого, так что равносильность их доказана.

Телесные выпуклые многогранники оказываются частным случаем выпуклых тел: это выпуклые тела, ограниченные конечным числом многоугольников. Аналогично, «поверхностные» выпуклые многогранники оказываются частным случаем выпуклых поверхностей, если под выпуклой поверхностью понимать всю поверхность или любой кусок поверхности выпуклого тела.

Те же выводы применимы к многоугольникам с заменой граней и их плоскостей сторонами и несущими их прямыми. Совершенно так же доказывается для них равносильность двух понятий выпуклости:

1) Многоугольник — выпуклый, если он лежит (на плоскости!) по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

2) Многоугольник — выпуклый, если он для каждой пары своих точек содержит соединяющий их отрезок.

Можно доказать, что оба определения равносильны следующему:

3) Многоугольник — выпуклый, если все его углы — выпуклые, т. е. меньше 180°. (Доказательство опускаем, так как этот результат не будет использован; оно может служить в качестве задачи. Задачей может служить также доказательство аналогичного результата для многогранников: телесный многогранник — выпуклый, если все его двугранные углы — выпуклые.)

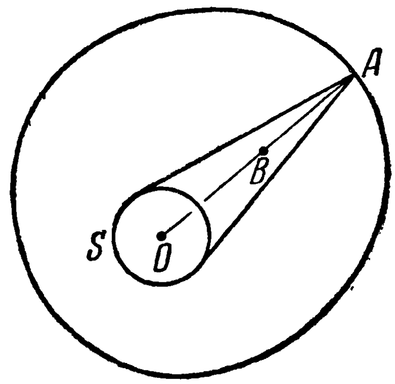
Отметим ещё два простых свойства выпуклых фигур (т. е. множеств), которыми мы будем постоянно пользоваться в применении к многогранникам, считая их известными.

1) *Общая часть F любого числа выпуклых фигур F_s сама есть выпуклая фигура.* Действительно, если точки A и B принадлежат F,

то они тем самым принадлежат каждой фигуре F_s. По выпуклости этих последних в каждой из них содержится отрезок AB, а тогда он содержится в их общей части, чем её выпуклость доказана.

Поэтому, в частности, общая часть выпуклого многогранника и плоскости выпукла и представляет либо точку, либо отрезок (или полупрямую), либо выпуклый многоугольник. Если данная плоскость есть плоскость грани, то она не может заходить внутрь многогранника и её общая часть с многогранником сводится тогда к выпуклому многоугольнику, который и есть данная грань. Поэтому *все грани полного выпуклого многогранника выпуклы.*

2) *Отрезок, идущий из любой внутренней точки O выпуклого тела, пересекает его поверхность максимум в одной точке.* Действительно, внутренняя точка O характеризуется тем свойством, что вокруг неё можно описать шар S, целиком лежащий в теле. Поэтому, если отрезок, идущий из O, пересекает поверхность тела последовательно в двух точках B и A, то, по выпуклости, в теле лежат все отрезки, соединяющие точку A с точками шара S (черт. 5). Эти отрезки заполняют целый конус, и потому все точки отрезка OA, кроме точки A, также должны быть внутренними, вопреки предположению, что точка B лежит на поверхности рассматриваемого тела.



Черт. 5.

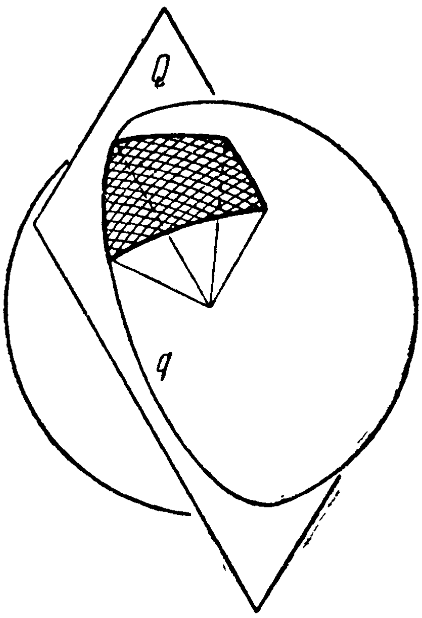
5. Многогранные углы и сферические многоугольники. Многогранный угол есть не что иное, как многогранник с одной единственной вершиной и без граничных рёбер. Грани его мы мыслим, следовательно, безгранично продолжаемыми.

Если вокруг вершины многогранного угла описать сферу радиуса единица, то он вырежет на ней сферический многоугольник, ограниченный дугами больших кругов. Обратно, если на сфере дан такой многоугольник, то лучи, проведённые из центра через его точки, образуют многогранный угол.

Понятие выпуклости для сферического многоугольника определяется так же, как для плоского, с заменой прямых большими кругами и прямолинейных отрезков — дугами больших кругов, не превосходящими полуокружности. Для сферических многоугольников можно дать те же три определения выпуклости. Равносильность первых двух доказывается подобно тому, как это было сделано выше для многогранников. Равносильность им третьего (а именно, что все углы меньше 180°) будет, между прочим, доказана в n° 2 § 1 главы III.

Легко, далее, убедиться, что при сопоставлении многогранных углов и сферических многоугольников, которое даётся изложенным выше построением, выпуклым многогранным углам отвечают выпуклые сферические многоугольники, и обратно. Например, из черт. 6 непосредственно ясно, что расположение многогранного угла по одну сторону от плоскости грани Q равносильно расположению сферического многоугольника по одну сторону от большого круга q, по которому плоскость Q пересекает сферу.

К выпуклым сферическим многоугольникам относятся двуугольники, ограниченные двумя большими полуокружностями, соединяющими диаметрально противоположные точки, а также всякая полусфера. Двуугольникам отвечают многогранные углы, выродившиеся в двугранные, полусферам — выродившиеся в плоскость.

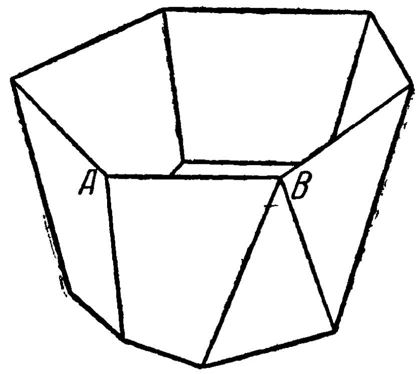


Черт. 6.

6. Замечание о бесконечных многогранниках. Рассмотрение бесконечных выпуклых многогранников могло бы показаться имеющим меньший наглядный и меньший реальный смысл, чем рассмотрение многогранников конечных.

Однако это возражение можно полностью устранить, так как вместо бесконечного выпуклого многогранника можно всегда иметь в виду конечный выпуклый многогранник с границей, обладающий тем свойством, что при безграничном продолжении его крайних граней они не пересекаются, не считая пар смежных граней, которые имеют бесконечно продолжаемое общее ребро.

Можно дать условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данный конечный выпуклый многогранник с границей допускал неограниченное продолжение крайних граней без появления новых пересечений, т. е. чтобы он мог рассматриваться как «конечный» представитель бесконечного многогранника со всеми его вершинами, рёбрами и гранями. Формулируем одно такое условие; оно состоит из двух частей.



Черт. 7.

1) В вершинах на границе сходятся только по две крайние грани, смежные по ребру, но не подходит изнутри никакая грань (т. е. так, как в вершине A, но не B на черт. 7).

2) На каждой крайней грани рёбра при продолжении за границу расходятся или параллельны, но не сходятся.

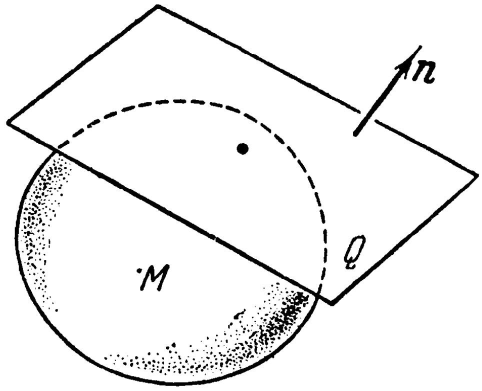
Необходимость обеих частей этого условия очевидна. Доказательство достаточности мы оставляем читателю в качестве задачи; оно нам не будет нужно.

Другое условие состоит в выпуклости сферического изображения многогранника. Понятие о сферическом изображении и необходимость этого условия будут установлены в § 5 этой главы, а достаточность будет выяснена позже, в § 5 главы VII.

7. Задачи. К формулированным по ходу изложения задачам прибавим ещё две: 1. Доказать, что если конечный телесный многогранник не имеет пустот внутри и общая его часть со всякой его опорной плоскостью *) может быть стянута в себе в точку, то такой многогранник — выпуклый. (Фигура стягивается в себя в точку, если её можно непрерывно деформировать, не выходя за её пределы, так, что она стянется в точку. Такие фигуры, как две точки, замкнутая ломаная, многоугольник с «дырами», нестягиваемы в себе в точку.) 2. Доказать, что если конечный «поверхностный» многогранник обладает тем же свойством, то он — замкнутый выпуклый. (При этом предполагается, что грани встречаются только по рёбрам попарно, но наличие границы заранее не исключается.)

§ 2. Задание многогранника плоскостями граней

1. Опорная плоскость. *Опорной плоскостью* фигуры называется плоскость, имеющая с фигурой хотя бы одну общую точку, но такая, что вся фигура лежит целиком в одном полупространстве, ограниченном этой плоскостью (черт. 8). К полупространству мы присоединяем ограничивающую его плоскость; это условие имеется в виду всегда, кроме немногих случаев, которые оговариваются особо, и тогда полупространство называют «*открытым*». Из этого условия следует, что, например, для плоской фигуры сама заключающая её плоскость будет для неё опорной во всех точках фигуры.



Черт. 8.

Пользуясь понятием опорной плоскости, можно сказать, что выпуклый многогранник определяется тем, что плоскость каждой его грани является его опорной плоскостью. Однако у многогранника имеются, конечно, и другие опорные плоскости, касающиеся его только в вершинах или по рёбрам. Для телесных выпуклых многогранников имеет место следующая простая теорема.

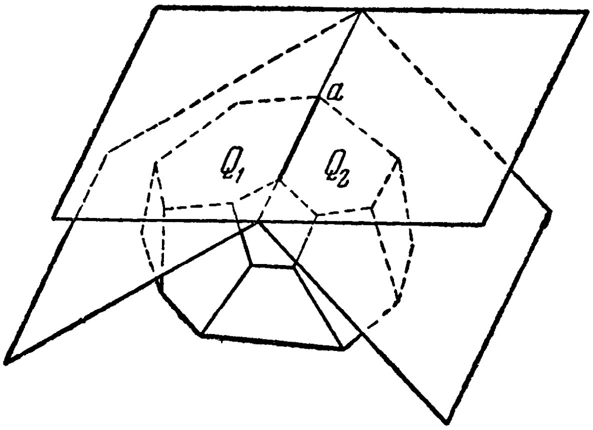
Теорема 1. *Общая часть телесного выпуклого многогранника и его опорной плоскости есть либо одна точка — вершина многогранника, либо отрезок (или полупрямая) — ребро многогранника, либо одна грань. Через всякую вершину проходит такая опорная плоскость, которая не имеет с многогранником других общих точек. Через всякое ребро также проходит опорная плоскость, не имеющая с многогранником других общих точек, кроме точек этого ребра. Плоскость всякой грани — опорная и не имеет с многогранником других общих точек, кроме точек грани.*

Доказательство. Общая часть плоскости и выпуклого многогранника выпукла, как общая часть двух выпуклых фигур. Поэтому она может быть либо точкой, либо отрезком (или полупрямой),

*) По поводу понятия опорной плоскости см. n° 1 § 2.

либо выпуклым многоугольником. (Целые прямые исключены принятым в n° 3 § 1 *) условием, что многогранник не содержит прямых.)

Если плоскость имеет с многогранником только одну общую точку, то эта точка является вершиной, потому что плоскость, очевидно, не может касаться многогранника только в одной точке внутри ребра или грани. По аналогичной причине, единственный отрезок, общий у плоскости и многогранника, должен быть ребром. Этим первое утверждение теоремы доказано.

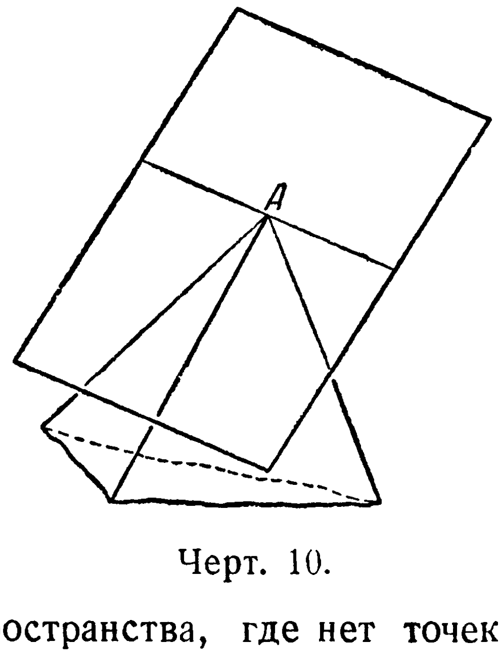


Черт. 9.

Плоскость всякой грани — опорная по определению выпуклого многогранника. Её общая часть с многогранником есть выпуклый многоугольник, который тем самым и оказывается гранью.

Если в ребре a сходятся грани Q_1 и Q_2, то многогранник лежит между плоскостями этих граней, т. е. в двугранном угле между ними. Поэтому всякая плоскость, проходящая в дополнительном угле, будет опорной вдоль ребра a (черт. 9).

В вершине A сходятся по крайней мере три грани, поэтому многогранник заключён в трёхгранном или многогранном угле, ограниченном плоскостями таких граней. Но через вершину многогранного угла заведомо можно провести плоскость, не имеющую с ним других общих точек. Достаточно взять плоскость, опорную вдоль ребра, и немного повернуть её вокруг прямой, проходящей в ней через вершину перпендикулярно к этому ребру (черт. 10). Эта плоскость будет опорной и к многограннику в одной вершине A.



Черт. 10.

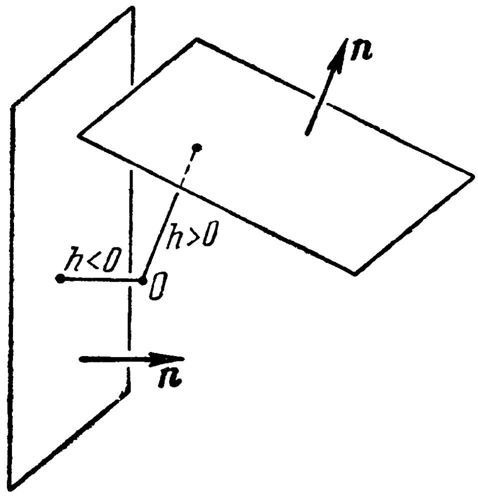
2. Внешняя нормаль. Опорное число. Если какая-либо фигура M (множество точек) лежит по одну сторону от плоскости Q, то перпендикуляр к плоскости Q, направленный внутрь того (открытого) полупространства, где нет точек фигуры M, мы называем *внешней нормалью* к плоскости Q по отношению к фигуре M. Так же определяется внешняя нормаль к опорной

*) Всюду в этой книге ссылки делаются так: при ссылке на данный параграф указывается только номер пункта, либо теоремы (или леммы); при ссылке на другой параграф данной главы указывается ещё номер параграфа; наконец, при ссылке на другую главу добавляется ещё номер этой главы.

плоскости. Внешнюю нормаль мы будем обычно изображать единичным вектором, обозначая его через $\boldsymbol{n}$ (черт. 8).

Говоря о направлении любой плоскости, мы всегда будем иметь в виду направление некоторого перпендикулярного к ней вектора. Если речь идёт об опорной плоскости, то направление всегда определяется именно внешней нормалью к ней. Если это есть плоскость грани какого-либо многогранника, то мы говорим о направлении грани, понимая под этим направление внешней нормали к грани.

Если в пространстве выбрать точку O — начало координат, то положение всякой «направленной» плоскости определяется её нормалью $\boldsymbol{n}$ и расстоянием h от начала O, причём это расстояние всегда считается положительным, если начало лежит в той стороне от плоскости, которая противоположна направлению нормали $\boldsymbol{n}$, и отрицательным — в противном случае (черт. 11). Так определённое расстояние со знаком мы называем *опорным числом* плоскости, или грани, если речь идёт о плоскости грани некоторого многогранника. Коротко мы говорим об *опорных числах многогранника*, имея в виду опорные числа всех его граней.



Черт. 11.

Мы докажем, что всякий полный выпуклый многогранник однозначно определяется плоскостями своих граней с указанием их внешних нормалей. Иными словами, он определяется внешними нормалями и опорными числами.

Теорема 2. *Телесный выпуклый многогранник есть общая часть полупространств, ограниченных плоскостями его граней. (Так как каждая плоскость определяет два полупространства, то речь идёт, очевидно, о тех полупространствах, которые содержат многогранник.)*

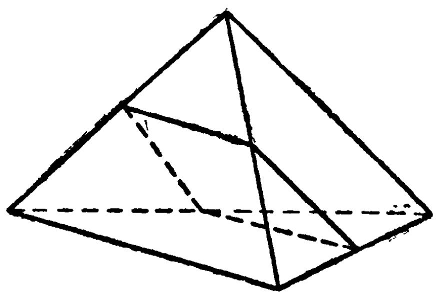
Доказательство. Во-первых, телесный выпуклый многогранник по определению лежит по одну сторону от плоскости каждой грани, т. е. всегда в одном из определяемых ею полупространств. Поэтому он содержится также в общей части всех этих полупространств.

Во-вторых, по доказанной в n° 4 § 1 лемме об отделимости всякая точка вне многогранника отделяется от него плоскостью какой-либо грани, т. е. не попадает хотя бы в одно из рассматриваемых полупространств. Поэтому общая часть этих полупространств, содержа многогранник, не содержит никаких лишних точек, т. е. совпадает с многогранником, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Полный выпуклый многогранник определяется заданием плоскостей его граней с указанием внешних нормалей к ним.*

Действительно, раз указаны внешние нормали, то тем самым указаны полупространства, содержащие многогранник. По теореме 2 телесный многогранник, ограниченный данным полным многогранником P, является пересечением таких полупространств и, следовательно, ими полностью определяется. Вместе с ним определяется и его поверхность P, и теорема доказана.

Без указания внешних нормалей обойтись нельзя, так как можно построить несовпадающие выпуклые многогранники, у которых плоскости всех граней совпадают. Пример представляют два многогранника, на которые делит тетраэдр какая-либо пересекающая все его грани плоскость (черт. 12).



Черт. 12.

Задача. Найти условия, при которых плоскости граней данного конечного выпуклого многогранника ограничивают другой конечный выпуклый многогранник. Решить тот же вопрос, допуская бесконечные многогранники. Для начала решить аналогичную задачу для многоугольников.

3. Докажем ещё теорему, в известном смысле обратную теореме 2.

Теорема 4. *Общая часть конечного числа полупространств есть телесный выпуклый многогранник при том необходимом условии, что она имеет внутренние точки*). Если внешние нормали к плоскостям, ограничивающим эти полупространства, не направлены в одно из полупространств**), то многогранник конечный; в противном случае он — бесконечный.*

Пусть общая часть полупространств, ограниченных плоскостями $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, имеет внутренние точки. Она представляет тогда тело, ограниченное многоугольниками, вырезаемыми на плоскостях Q_i теми прямыми, по которым эти плоскости пересекают друг друга. Кроме того она лежит по одну сторону от каждой плоскости Q_i. Следовательно, она есть телесный выпуклый многогранник; обозначим его P.

Если внешние нормали к плоскостям Q_i направлены в одно полупространство R (черт. 13), то направление внешней нормали $\boldsymbol{m}$ к этому

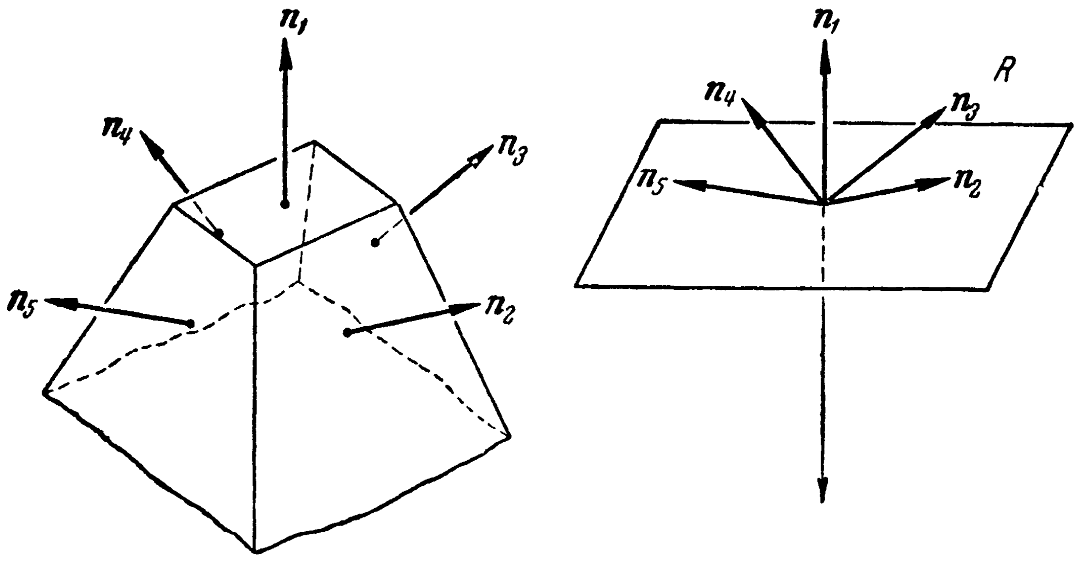
*) Общая часть данных полупространств может, конечно, не иметь внутренних точек; так, например, у двух противоположных полупространств с общей граничной плоскостью общая часть сводится к плоскости. Заранее данные полупространства могут и вовсе не иметь общих точек, тогда их «общая часть» — пустая.

**) Нормали $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ направлены в одно полупространство R, если, будучи отложены из любой точки ограничивающей его плоскости, они оказываются лежащими в этом полупространстве. При этом не исключено, что часть из них может лежать в ограничивающей плоскости. Если этого нет, то мы говорим, что нормали идут в н у т р ь полупространства R. Если ни одна нормаль не идёт внутрь, то все они лежат в плоскости, и многогранник будет призмой.

полупространству не образует ни с одной из них острого угла. Поэтому полупрямая, проведённая в этом направлении из любой точки многогранника P, не пересекает ни одной из плоскостей Q_i и тем самым оказывается лежащей в P. Таким образом, многогранник P содержит полупрямую и тем самым он — бесконечный.

Если же внешние нормали к плоскостям Q_i не идут в одно полупространство, то многогранник P не может быть бесконечным. Если бы он был бесконечным, то в нём содержалась бы полупрямая, например бесконечное ребро. Ограничивающие многогранник плоскости не могли бы пересекать её, а потому внешние нормали к ним все были бы направлены в полупространство, ограниченное плоскостью, перпендикулярной к этой полупрямой. Теорема доказана полностью.

4. Мы установили, что общая часть конечного числа полупространств есть выпуклый телесный многогранник, если она имеет внутренние точки. Однако среди плоскостей, ограничивающих эти полупространства, могут быть «лишние», не являющиеся плоскостями граней многогранника, а касающиеся его лишь по рёбрам и вершинам или даже вовсе не имеющие с ним общих точек. Поэтому возникает вопрос, каковы те необходимые и достаточные условия, при которых плоскости с данными внешними нормалями $n_1, n_2, \ldots, n_m$ и опорными числами $h_1, h_2, \ldots, h_m$ будут действительно плоскостями граней некоторого телесного выпуклого многогранника. Теорема, дающая ответ на этот вопрос, будет формулирована в n° 6 § 4 главы II. Повторяя общие указания, сделанные во введении, можно сказать, что вопрос стоит о теореме с у щ е с т в о в а н и я многогранника с данными нормалями и опорными числами (соответственно доказанной уже теореме е д и н с т в е н н о с т и, утверждающей, что этими данными телесный выпуклый многогранник определяется полностью).



Черт. 13.

§ 3. Задание замкнутого многогранника его вершинами

1. Выпуклая оболочка. Выпуклой оболочкой какого-либо множества точек мы называем общую часть всех содержащих его телесных выпуклых многогранников.

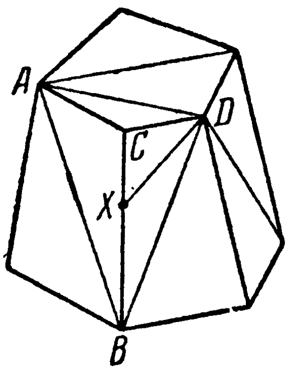
Выпуклая оболочка всякого множества точек M выпукла, потому что, как было доказано в n° 4 § 1, общая часть любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Так как выпуклая оболочка множества M сама выпукла и содержится во всех выпуклых многогранниках, содержащих M, как их общая часть, то она является в некотором смысле наименьшим выпуклым множеством, заключающим M. Она вместе с тем полностью определяется самим M, поскольку им определяется совокупность всех содержащих его выпуклых многогранников.

Идея понятия выпуклой оболочки как раз и состоит в том, что она есть в известном смысле наименьшее выпуклое множество, содержащее данное множество M*).

2. Теорема 1. *Конечный телесный выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой множества своих вершин.*

Для доказательства выберем какую-либо вершину A данного многогранника и разобьём все грани, не подходящие к A, диагоналями на треугольники с вершинами в вершинах многогранника. Соединяя точку A с точками любого такого треугольника, мы получим трёхгранную пирамиду, т. е. тетраэдр (черт. 14). Все такие тетраэдры содержатся в многограннике, так как он выпуклый, и многогранник слагается из этих тетраэдров.



Черт. 14.

Выпуклая оболочка множества вершин содержит все соединяющие их отрезки, так как она выпуклая. Но вместе с отрезком BC и точкой D она содержит треугольник BCD, так как он заполняется отрезками DX, идущими из D в точки отрезка BC. Наконец, вместе с треугольником BCD и точкой A она содержит также тетраэдр $ABCD$, поскольку он заполняется отрезками, идущими из A в точки треугольника BCD.

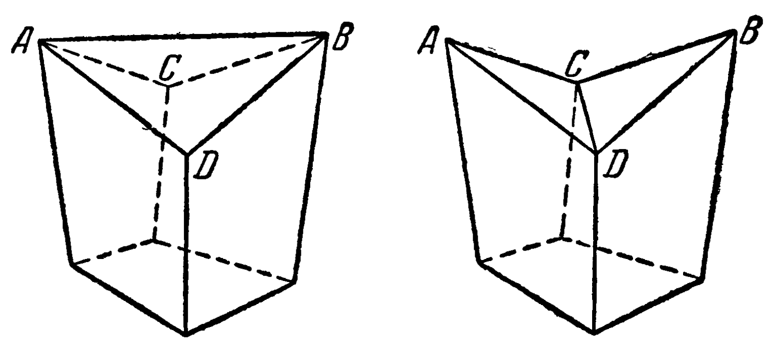
---

*) Выпуклая оболочка всегда есть замкнутое множество. Это — следствие той общей теоремы, что общая часть замкнутых множеств есть замкнутое множество. Вообще принято определять выпуклую оболочку как общую часть любых выпуклых замкнутых множеств, содержащих данное множество точек M. В этом общем определении лучше раскрывается идея выпуклой оболочки как наименьшего замкнутого выпуклого множества, содержащего M. Это определение оказывается равносильным нашему. Строго говоря, нужно причислять к многогранникам полупространства и всё пространство, поскольку можно рассматривать множества, не умещающиеся ни в каком выпуклом многограннике. Мы будем пользоваться нашим определением как более элементарным и вполне достаточным для наших целей, поскольку мы занимаемся только выпуклыми многогранниками.

Отюда ясно, что выпуклая оболочка множества вершин многогранника содержит все тетраэдры, на которые он разбит, т. е. содержит самый многогранник.

С другой стороны, наш многогранник заведомо содержит выпуклую оболочку множества своих вершин, так как по самому её определению она заключается во всяком выпуклом многограннике, содержащем эти вершины. Таким образом, многогранник и выпуклая оболочка множества его вершин совпадают, что и требовалось доказать.

Так как выпуклая оболочка множества M им определяется, то из теоремы 1 следует, что конечный телесный выпуклый многогранник, а значит и его поверхность, т. е. *замкнутый выпуклый многогранник, однозначно определяется своими вершинами*. Мы говорим, что замкнутый выпуклый многогранник однозначно «натягивается» на свои вершины. Это есть теорема единственности замкнутого выпуклого многогранника с данными вершинами.



Черт. 15.

Включая в рассмотрение невыпуклые многогранники, мы не получим такой теоремы: на черт. 15 изображены два многогранника; один из них с ребром AB и гранями ABC, ABD — выпуклый, другой — с ребром CD — невыпуклый; как видно, их можно расположить так, чтобы вершины совпали.

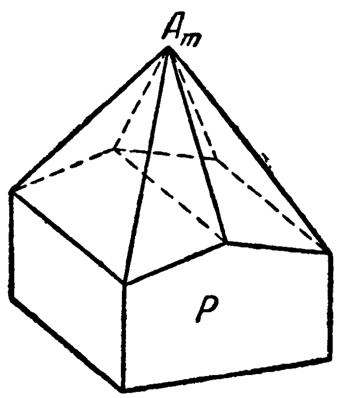
3. Теорема 2. *Выпуклая оболочка конечного множества точек $A_1, \ldots, A_m$, не лежащих в одной плоскости, есть телесный выпуклый многогранник; выпуклая оболочка конечного числа точек, лежащих в одной плоскости, есть либо выпуклый многоугольник, либо отрезок, либо одна точка. Вершинами выпуклой оболочки (т. е. этого многогранника, либо многоугольника, либо отрезка) могут быть только данные точки A_l, однако не обязательно все. Любая данная из них A_k будет вершиной тогда и только тогда, когда она не содержится в выпуклой оболочке множества остальных точек.*

Доказательство. Если дана только одна точка A_1, то она и есть своя выпуклая оболочка. Если точек две или больше, но все они лежат на одной прямой, то выпуклая оболочка их представляет отрезок с концами в крайних точках. Поэтому можно считать в дальнейшем, что точки не лежат на одной прямой.

Допустим, что теорема верна для $m-1$ точек и докажем её для m точек.

Пусть дано m разных точек $A_1, A_2, \ldots, A_m$; выберем любую из них, скажем A_m. Пусть P будет выпуклая оболочка множества остальных точек $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$; по предположению, она есть либо многогранник с вершинами в точках A_l, либо многоугольник, либо отрезок. Для определённости допустим, что P есть многогранник. В остальных случаях рассуждения могут только очевидным образом упроститься. Если точка A_m содержится в P, то её присоединение не меняет выпуклой оболочки и потому, в частности, она заведомо не может оказаться вершиной.

Допустим поэтому, что точка A_m не лежит в P (черт. 16). Проведя из неё отрезки во все точки многогранника P, получим многогранник P_1, составленный из пирамид с вершиной A_m и с основаниями на гранях многогранника P. Многогранник P_1 заведомо содержится в выпуклой оболочке множества всех точек $A_1, A_2, \ldots, A_m$, потому что в ней должен содержаться многогранник P и всякий отрезок, соединяющий любую его точку с точкой A_m.

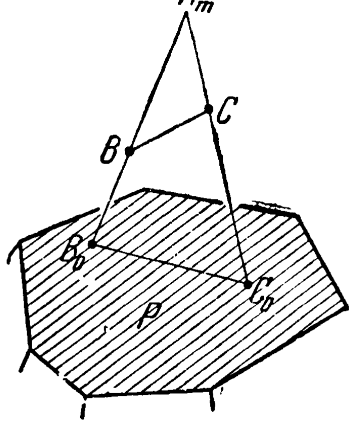


Черт. 16.

Покажем, что многогранник P_1 — выпуклый. Пусть B, C — две его точки; по его построению они лежат на отрезках A_mB_0, A_mC_0, соединяющих A_m с точками B_0, C_0 из многогранника P (черт. 17). Но этот последний — выпуклый и потому содержит отрезок B_0C_0. А тогда P_1 должен содержать весь треугольник $A_mB_0C_0$, а вместе с ним и отрезок BC. Этим выпуклость многогранника P_1 доказана.

Но если многогранник P_1 — выпуклый и содержит точки $A_1, \ldots, A_m$, то он заведомо заключает в себе их выпуклую оболочку. А так как мы уже установили, что он должен также заключаться в ней, то он с ней совпадает.

Остаётся доказать, что точка A_m является вершиной многогранника P_1. Это очевидно из того, что по «лемме об отделимости» (n° 4 § 1) выпуклый многогранник P можно отделить плоскостью от точки A_m, так что отрезки, идущие из A_m в точки многогранника P, должны эту плоскость пересекать. Поэтому точка A_m не может оказаться ни внутри ребра, ни на грани многогранника P_1, ни тем более внутри него.



Черт. 17.

Таким образом, теорема полностью доказана.

В соединении с теоремой 1 теорема 2 приводит, очевидно, к следующему результату:

Теорема 3. *Для того чтобы существовал замкнутый выпуклый многогранник с данными вершинами $A_1, \ldots, A_m$, необходимо и достаточно, чтобы точки A_i не лежали в одной плоскости и чтобы ни одна из них не попадала в выпуклую оболочку множества других. При этом такой многогранник с данными вершинами — единственный.*

Здесь содержится, следовательно, ответ на вопросы того типа, как поставленные во введении: в какой мере и при каких условиях такие данные, как задание вершин, определяют замкнутый выпуклый многогранник. Вершины можно задавать их координатами, и тогда условия, налагаемые на них в теореме, можно выразить аналитически.

4. Дополнение многогранника с границей до замкнутого. Из теоремы 1 и 2 вытекает ещё одна теорема, которой мы будем иметь случай воспользоваться.

Теорема 4. *Всякий конечный выпуклый многогранник с границей можно дополнить до замкнутого, не прибавляя новых вершин, и притом единственным образом.*

Иными словами, для всякого конечного выпуклого многогранника P существует и притом единственный замкнутый выпуклый многогранник $\overline{P}$ такой, что P есть часть $\overline{P}$ и $\overline{P}$ не имеет иных вершин, кроме вершин многогранника P. (При этом не обязательно все вершины многогранника P будут вершинами многогранника $\overline{P}$. У всякого многогранника с границей вершины — двух типов: внутренние, т. е. не лежащие на границе, и граничные. Все внутренние вершины остаются вершинами многогранника $\overline{P}$, но граничные — не обязательно. Так будет, например, если P есть куб, из грани которого вырезан какой-либо многоугольник.)

Доказательство. Пусть P — конечный выпуклый многогранник с границей, а R — выпуклая оболочка его вершин. Содержа все вершины многогранника P, R содержит и соединяющие их отрезки, т. е. рёбра и диагонали граней; а тогда R содержит и все грани многогранника P, так что P заведомо содержится в R.

С другой стороны, согласно n° 2 § 1 многогранник P есть часть поверхности некоторого телесного выпуклого многогранника Q. Последний содержит все вершины многогранника P, а значит, и их выпуклую оболочку R. Таким образом, оказывается, что в то время, как P содержится в R, а R в Q, сам P вместе с тем лежит на поверхности многогранника Q. Следовательно, P есть часть поверхности многогранника R, т. е. часть замкнутого выпуклого многогранника. (Действительно, если точка X многогранника P не лежит на поверхности многогранника R, то она лежит внутри R, так как R содержит P. Но тогда раз Q содержит R, то X лежит и внутри Q. А это противоречит тому, что P есть часть поверхности многогранника Q.)

Согласно теореме 2, R как выпуклая оболочка вершин многогранника P есть телесный многогранник с вершинами в вершинах многогранника P, и никакого другого телесного выпуклого многогранника с теми же вершинами не существует. Следовательно, то же верно и для замкнутого многогранника, образующего поверхность оболочки R, так что теорема доказана.

5. Задачи. 1. Дать необходимые и достаточные условия, при которых данная граничная вершина выпуклого многогранника с границей остаётся вершиной при дополнении этого многогранника до замкнутого согласно теореме 4.

2. Доказать, что выпуклая оболочка любого множества точек M есть общая часть всех полупространств, содержащих M (если только M лежит хотя бы в одном полупространстве). Исходя из такого определения выпуклой оболочки, доказать теоремы 1 и 2 настоящего параграфа.

3. Доказать, что общая часть всех выпуклых множеств, содержащих данное множество M, есть сумма тетраэдров с вершинами в точках этого множества M. (Множество M не предполагается состоящим лишь из конечного числа точек. Тетраэдры могут перекрываться. К тетраэдрам присоединяются в качестве предельных случаев треугольники, отрезки, точки.)

4. Пусть даны точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и идущие к ним из начала O векторы $\boldsymbol{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$. Пусть точкам A_i отнесены числа $m_i \geqslant 0$ (массы). Центром тяжести этих масс называется точка A, являющаяся концом вектора $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, определяемого равенством

$$\boldsymbol{a} = \frac{m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{a}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\Sigma\, m_i\boldsymbol{a}_i}{\Sigma\, m_i}$$

(предполагается, что $\Sigma\, m_i > 0$, так что не все m_i равны нулю). Доказать, что выпуклая оболочка множества точек A_i есть геометрическое место центров тяжести всевозможных масс, помещаемых в эти точки.

Доказать, что общая часть всех выпуклых множеств, содержащих данное множество M, есть геометрическое место центров тяжести масс, помещаемых во всевозможные четвёрки точек из M. (M не предполагается состоящим из конечного числа точек. Сравнить эту задачу с задачей 3.)

5. Полупространство, ограниченное плоскостью с уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, определяется неравенством $Ax+By+Cz+D \leqslant 0$ (или напротив $\geqslant 0$). Поэтому многогранник как общая часть полупространств задаётся системой линейных неравенств.

Даны точки $A_1, \ldots, A_m$ с координатами x_1, y_1, z_1 и т. д. Указать систему линейных неравенств, определяющих выпуклую оболочку этого множества точек. Коэффициенты должны быть выражены через координаты заданных точек.

§ 4. Задание бесконечного многогранника вершинами и предельным углом

1. Предельный угол. Бесконечный выпуклый многогранник в отличие от замкнутого заведомо не определяется одними вершинами. Так, выпуклый многогранный угол имеет всего одну вершину и определяется не только её заданием, но ещё заданием направлений его рёбер. Нашей целью будет доказать, что всякий бесконечный выпуклый многогранник также определяется своими вершинами и направлениями бесконечных рёбер.

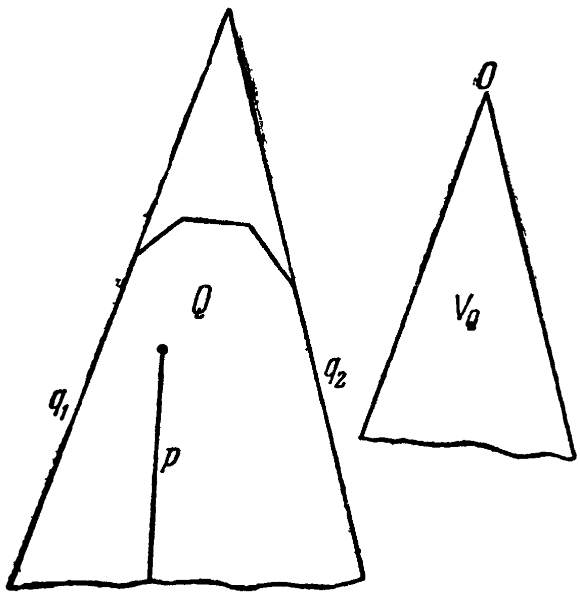
Однако оказывается гораздо более удобным рассматривать вместо направлений бесконечных рёбер многогранный угол, рёбра которого параллельны бесконечным рёбрам многогранника. Этот многогранный угол мы определяем следующим построением.

Пусть P — данный бесконечный многогранник. Возьмём произвольную точку O и проведём из неё все полупрямые, параллельные (и одинаково направленные) полупрямым, лежащим на многограннике P. Эти полупрямые заполнят некоторую коническую поверхность с вершиной в точке O. Эту поверхность мы называем *предельным углом* многогранника P.

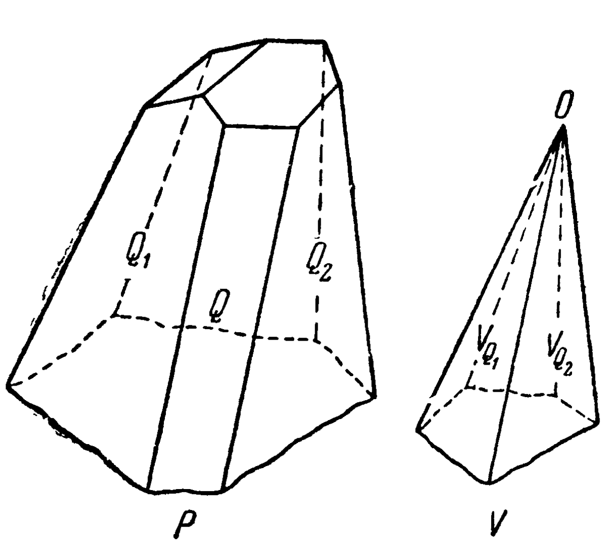
Из этого определения ясно, что при замене точки O другой предельный угол претерпевает только параллельный перенос. В дальнейшем мы всегда считаем предельный угол заданным с точностью до переноса.

Докажем, что определённая таким образом коническая поверхность действительно представляет собою многогранный угол с рёбрами, параллельными бесконечным рёбрам многогранника P.

Пусть Q — бесконечная грань многогранника P и q_1, q_2 — её бесконечные рёбра. Любая полупрямая p, лежащая на грани Q, должна



Черт. 18.



Черт. 19.

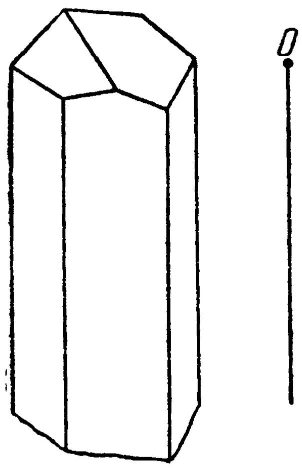
быть направлена в угол между рёбрами q_1 и q_2 (черт. 18). Отсюда ясно, что если из точки O провести все полупрямые, параллельные полупрямым, лежащие на грани Q, то они заполнят угол V_Q между полупрямыми, параллельными рёбрам q_1 и q_2*). Этот угол можно назвать предельным углом грани Q.

Из сказанного очевидно, что предельный угол многогранника слагается из предельных углов его бесконечных граней, причём если грани Q', Q'' смежны по бесконечному ребру q, то их предельные углы $V_{Q'}$, $V_{Q''}$ смежны по параллельному ему ребру. Следовательно, *предельный угол действительно есть многогранный угол, рёбра и грани которого параллельны бесконечным рёбрам и граням многогранника* (черт. 19).

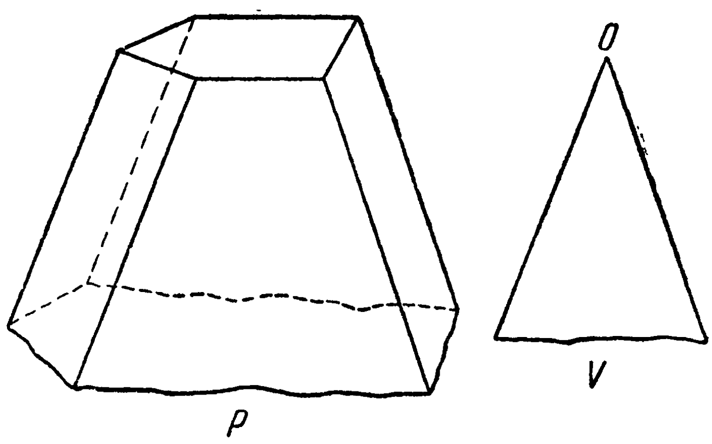
Если бесконечные рёбра грани Q параллельны, то на ней нет полупрямых иного направления и потому её предельный угол сводится к одной полупрямой. На предельном угле многогранника ей

*) Так как мы считаем, что речь идёт о выпуклом многограннике, то грань Q есть выпуклый многоугольник, и тогда сказанное очевидно и доказывается очень просто. Однако определение предельного угла применимо и к невыпуклым многогранникам, а тогда картина может усложниться, хотя наши выводы всё равно останутся по существу верными.

соответствует «грань», выродившаяся в ребро. Если все бесконечные рёбра многогранника параллельны, то и весь его предельный угол вырождается в полупрямую (черт. 20а).



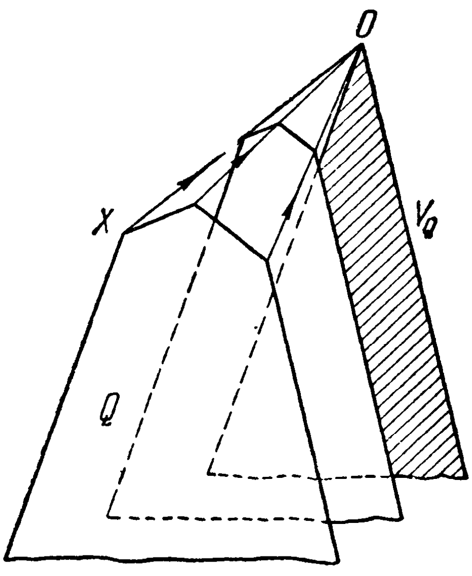
Черт. 20а.



Черт. 20б.

Если все бесконечные рёбра многогранника параллельны одной плоскости, то предельный угол вырождается в плоский угол (черт. 20б). Всегда, когда мы говорим о предельном угле, эти случаи не считаются заранее исключёнными.

Если бесконечный многоугольник Q неограниченно подобно сжимать к какой-либо точке O, то в пределе он перейдёт, очевидно, в свой предельный угол (черт. 21). Поэтому при неограниченном подобном сжатии бесконечного многогранника P к какой-либо точке его бесконечные грани переходят в их предельные углы, а он сам переходит в свой предельный угол. Следовательно, предельный угол может быть также определён как результат бесконечного подобного сжатия многогранника.



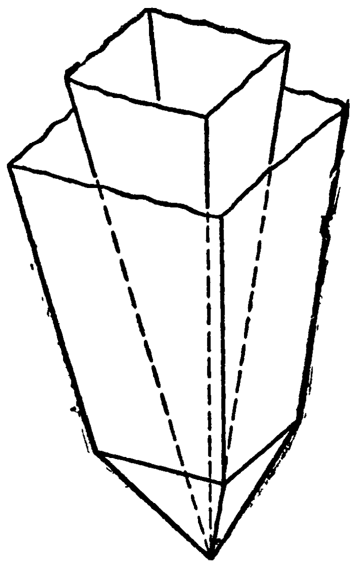
Черт. 21.

Отсюда легко вывести, что когда вершина O предельного угла лежит в многограннике, то и сам он содержится в многограннике (если многогранник выпуклый). Действительно, при сжатии многогранника P к точке O все его точки X движутся по отрезкам OX. По выпуклости многогранника отрезки OX содержатся в нём, а следовательно, при сжатии многогранник не выступает из пределов своего первоначального положения. Поэтому и предельный угол содержится в нём.

Далее, легко доказать, что *предельный угол выпуклого многогранника — сам выпуклый*. Действительно, возьмём точку O на бесконечной грани Q многогранника P и будем его сжимать к точке O. По выпуклости он всё время остаётся с одной стороны от плоскости грани Q. В пределе получим предельный угол V, который также окажется лежащим по ту же сторону от плоскости грани Q. Но она будет теперь плоскостью соответствующей грани V_Q самого предельного угла. Мы доказали тем самым, что предельный угол V лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, т. е. что он — выпуклый.

Все полученные выводы мы резюмируем в виде следующей теоремы о предельном угле:

Теорема 1. *Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник. Если из какой-либо точки O провести все полупрямые, параллельные полупрямым, лежащим на P, то получим предельный угол V_P многогранника P. Это есть выпуклый многогранный угол (или плоский угол, или полупрямая), рёбра и грани которого параллельны бесконечным рёбрам и граням многогранника (причём только тем граням на P отвечают грани на V_P, не выродившиеся в рёбра, у которых бесконечные рёбра не параллельны). Если точка O лежит в многограннике P, то и угол V_P лежит в P (черт. 22). Этот угол V_P может быть получен так же, как результат (т. е. предел) бесконечного подобного сжатия многогранника P.*



Черт. 22.

Из последнего особенно ясна сущность понятия о предельном угле, как таком многогранном угле, который определяет свойства многогранника в бесконечно удалённой его части так, что конечными величинами пренебрегают. Многогранник, рассматриваемый с бесконечно большого расстояния, представляется в виде своего предельного угла.

2. Теорема 2. *Выпуклый многогранный угол является поверхностью выпуклой оболочки множества своих рёбер и потому однозначно определяется заданием своей вершины и направлений рёбер. Мы говорим, что он натягивается на свои рёбра.*

Действительно, если телесный угол — выпуклый, то вместе с двумя лучами p, q, идущими из вершины, он необходимо содержит плоский угол между ними, потому что этот угол заполняется отрезками, соединяющими точки на p и q. По той же причине вместе с тремя лучами p, q, r он содержит и трёхгранный телесный угол с рёбрами p, q, r. Отсюда следует, что выпуклая оболочка множества рёбер многогранного угла содержит все телесные трёхгранные углы с рёбрами на этих лучах. Вместе с тем телесный многогранный угол сам составляется из таких трёхгранных углов. Поэтому он совпадает с выпуклой оболочкой множества своих рёбер, чем теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. *Задание предельного угла бесконечного выпуклого многогранника равносильно заданию направлений бесконечных рёбер* *этого многогранника, т. е. предельный угол определяет эти направления и сам определяется ими как поверхность выпуклой оболочки совокупности полупрямых, проведённых из одной какой-либо точки в направлениях бесконечных рёбер многогранника.*

Эта теорема очевидным образом следует из того, что рёбра предельного угла и бесконечные рёбра многогранника параллельны и что выпуклый многогранный угол задаётся своей вершиной и направлениями рёбер.

Из теоремы 3 следует, между прочим, что предельный угол бесконечного выпуклого многогранника можно ещё определить как многогранный угол, натянутый на полупрямые, проведённые из произвольной точки в направлениях бесконечных рёбер многогранника, т. е. как поверхность выпуклой оболочки совокупности таких полупрямых.

Заметим, что предельный угол бесконечного выпуклого многогранника P можно получить ещё двумя способами.

Во-первых, если на многограннике P или внутри него взять любую точку O и провести из неё все полупрямые, содержащиеся в теле, ограниченном многогранником P, то они заполнят телесный угол, поверхность которого и будет предельным углом многогранника P.

Во-вторых, если через какую-либо точку O провести плоскости, параллельные плоскостям бесконечных граней многогранника P, то они ограничат телесный угол, поверхность которого и будет предельным углом. Говоря точно, речь идёт о том телесном угле, который получается как общая часть тех полупространств, ограниченных проведёнными плоскостями, внешние нормали к которым параллельны внешним нормалям к бесконечным граням многогранника. (Без этого условия определение не однозначно, так как, например, три плоскости ограничивают одновременно восемь трёхгранных углов.)

То, что оба указанных построения действительно дают предельный угол, мы не будем доказывать, так как это нам не понадобится. Впрочем, результат представляется достаточно очевидным, а точное доказательство может служить хорошей задачей.

3. Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма:

Лемма. *Если телесный выпуклый многогранник P содержит полупрямую a, то он содержит и всякую параллельную ей и так же направленную полупрямую b, исходящую из любой его точки B.*

Действительно, пусть R — полупространство, ограниченное плоскостью какой-либо грани многогранника P и содержащее P. Полупрямая a лежит в этом полупространстве и в нём же лежит точка B. Но тогда исходящая из B полупрямая b, параллельная a, также лежит в R. Таким образом, полупрямая b лежит во всяком полупространстве, ограниченном плоскостью какой-либо грани многогранника P и содержащем P. А так как многогранник P есть общая часть таких полупространств, то полупрямая b содержится в нём, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Бесконечный выпуклый многогранник однозначно определяется заданием своих вершин и предельного угла. Он есть* *поверхность выпуклой оболочки фигуры, образованной его вершинами и предельным углом, если только вершина этого последнего находится в многограннике.*

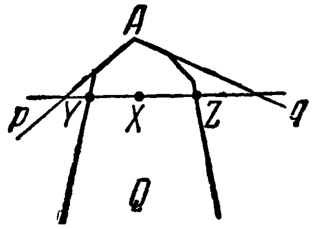
Так как согласно теореме 3 задание предельного угла равносильно указанию направлений бесконечных рёбер многогранника, то теорему 4 можно формулировать и так:

Бесконечный выпуклый многогранник определяется заданием своих вершин и направлений бесконечных рёбер. Он есть поверхность выпуклой оболочки фигуры, образованной его вершинами и полупрямыми, проведёнными из любой его точки в направлениях бесконечных рёбер.

Доказательство. Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник, а $\overline{R}$ — выпуклая оболочка фигуры, образованной его вершинами и предельным углом V. Мы считаем вершину угла V находящейся в многограннике P, а тогда и сам угол V содержится в P, вернее в телесном многограннике $\overline{P}$, ограниченном многогранной поверхностью P. Так как выпуклая оболочка $\overline{R}$ вершин и угла V есть общая часть всех содержащих их телесных выпуклых многогранников, то она содержится в многограннике $\overline{P}$.

Докажем, что, и обратно, $\overline{P}$ содержится в $\overline{R}$. Так как вершины многогранника $\overline{P}$ содержатся в $\overline{R}$, то по выпуклости тела $\overline{R}$ в нём содержатся также все конечные рёбра многогранника $\overline{P}$. Далее, $\overline{R}$ содержит угол V и тем самым содержит его рёбра, т. е. полупрямые, параллельные бесконечным рёбрам многогранника $\overline{P}$. Но тогда по доказанной выше лемме $\overline{R}$ содержит также параллельные полупрямые, идущие из любых его точек. Принимая за эти точки вершины многогранника $\overline{P}$, мы убеждаемся, что $\overline{R}$ содержит также все бесконечные рёбра этого многогранника. Таким образом, $\overline{R}$ содержит все рёбра многогранника $\overline{P}$. Но если выпуклая фигура содержит все стороны выпуклого многоугольника, то она, очевидно, содержит и самый многоугольник *). Поэтому $\overline{R}$ вместе с рёбрами многогранника $\overline{P}$

*) Доказательство (черт. 23). Пусть Q — выпуклый многоугольник и A — какая-либо его вершина. Многоугольник Q содержится в угле между полупрямыми p, q, идущими из вершины A вдоль сходящихся в ней сторон. Пусть X — любая точка многоугольника Q. Проведём через неё прямую, пересекающую полупрямые p и q. Эта прямая пересечёт периметр многоугольника в двух точках Y, Z. Поэтому, если выпуклая фигура содержит все стороны многоугольника Q, то она содержит отрезок YZ, а вместе с ним точку X. Таким образом, все точки X многоугольника Q содержатся в этой фигуре.



Черт. 23.

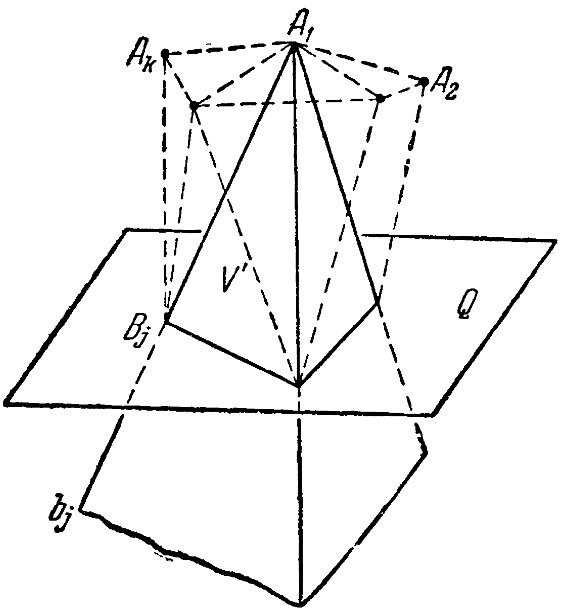
(Это замечание использует существование вершин. Без этого оно может быть неверным, потому что полуплоскость может содержать прямую, ограничивающую другую полуплоскость, не содержащуюся в данной.)

содержит и все его грани, т. е. всю его поверхность. Вместе с нею $\overline{R}$ содержит и самый многогранник.

(Строгое доказательство этого последнего, очевидного утверждения сводится к следующему. Пусть X — любая точка внутри многогранника $\overline{P}$. Проведём плоскость через точку X и любые две точки на поверхности многогранника $\overline{P}$. Эта плоскость пересечёт $\overline{P}$ по выпуклому многоугольнику, стороны которого лежат на поверхности $\overline{P}$ и потому содержатся в выпуклой оболочке $\overline{R}$. Если же все стороны выпуклого многоугольника содержатся в какой-либо выпуклой фигуре $\overline{R}$, то он весь в ней содержится. Таким образом, любая точка X многогранника $\overline{P}$ оказывается лежащей в $\overline{R}$, т. е. весь многогранник $\overline{P}$ содержится в $\overline{R}$.)

Итак, мы доказали, что как $\overline{P}$ содержит $\overline{R}$, так и $\overline{R}$ содержит $\overline{P}$, т. е. они совпадают. Вместе с тем совпадают их поверхности, так что многогранник P является поверхностью выпуклой оболочки $\overline{R}$ его вершин и предельного угла, что и требовалось доказать.

4. Сравним доказанную только что теорему 4 с теоремой 1 § 3 о том, что замкнутый выпуклый многогранник определяется заданием своих вершин. Можно считать, что направления бесконечных рёбер как бы задают «бесконечно удалённые вершины» бесконечного многогранника. Это становится особенно ясным, если представить себе бесконечный многогранник как предел конечных многогранников. В частности, рёбра, сходящиеся в одной вершине, при бесконечном её удалении становятся параллельными, и потому ясно, что параллельные бесконечные рёбра задают одну «бесконечно удалённую вершину» в согласии с тем, что они имеют одно направление. Это замечание могло бы быть положено в основу доказательства теоремы 4, и мы сейчас наметим на его основе доказательство теоремы о том, что поверхность выпуклой оболочки фигуры, образованной конечным числом точек и многогранным углом V, есть бесконечный выпуклый многогранник с предельным углом V. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ — данные точки и V — выпуклый многогранный угол, вершину которого мы считаем одной из точек $A_1, \ldots, A_m$ (черт. 24). Проведём плоскость Q, пересекающую все рёбра угла V, так что от него отсекается пирамида V'. Плоскость Q возьмём так далеко от вершины угла V, чтобы все точки A_i лежали от неё по ту же сторону, что и его вер-



Черт. 24.

шина. Плоскость Q пересекает рёбра $b_1, \ldots, b_n$ угла V в точках $B_1, B_2, \ldots, B_n$. По теореме 2 § 3 выпуклая оболочка совокупности всех точек A_i и B_j будет некоторым выпуклым многогранником P', содержащим пирамиду V'. (На черт. 24 рёбра многогранника P' обозначены пунктиром.)

Если плоскость Q отодвигать в бесконечность, то многогранник P' будет увеличиваться и в пределе даст многогранник P, содержащий весь данный угол V. Этот многогранник P и будет выпуклой оболочкой точек $A_1, \ldots, A_m$ и угла V.

Когда точка B_j удаляется в бесконечность по ребру b_j угла V, то всякий отрезок A_kB_j, идущий из данной точки A_k, стремится к параллельности ребру b_j. Отсюда можно заключить, что бесконечные рёбра многогранника P параллельны рёбрам угла V, так что V и есть его предельный угол, поскольку согласно теореме 3 предельный угол определяется именно параллельностью его рёбер бесконечным рёбрам многогранника.

Намеченное рассуждение нуждается в уточнении в ряде пунктов. Нужно доказать, что многогранник P как предел выпуклых многогранников сам будет выпуклым. Нужно также доказать, что он будет иметь бесконечные рёбра, параллельные, соответственно, всем рёбрам угла V, а не только некоторым из них, и др.

Оставляя уточнение намеченного рассуждения читателю, мы дадим сейчас исчерпывающее доказательство указанной теоремы, основанное на других соображениях, без предельного перехода от конечных многогранников.

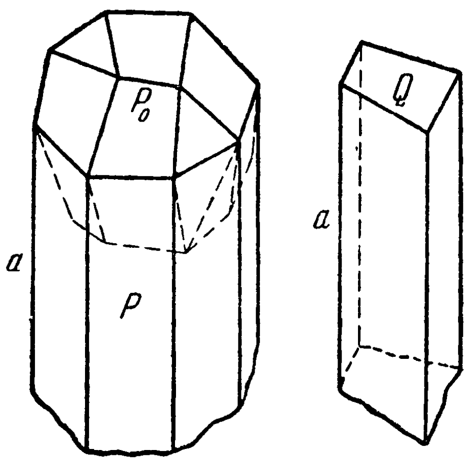
5. Теорема 5. *Поверхность выпуклой оболочки фигуры, образованной конечным числом точек $A_1, \ldots, A_m$ и выпуклым многогранным углом V, есть выпуклый многогранник P, для которого V является предельным углом.*

(Если угол V вырождается в плоский угол или полупрямую, а точки $A_1, \ldots, A_m$ лежат в одной плоскости с V, то многогранник P вырождается в многоугольник. Чтобы обойтись без оговорок, мы будем молчаливо предполагать, что этот случай не исключается. Напомним ещё, что бесконечные многогранники мы считаем не содержащими прямых согласно условию, принятому в n° 3 § 1.)

Вершину угла V можно считать одной из точек A_i, стоит лишь присоединить её к этим точкам. Для удобства будем понимать под многогранниками и углами телесные многогранники и углы.

Доказательство будем вести индукцией по числу рёбер угла V. Пусть угол V сводится к полупрямой a. Построим выпуклую оболочку совокупности данных точек $A_1, \ldots, A_m$. Согласно теореме 2 § 3 она будет некоторым выпуклым многогранником P_0. Будем переносить полупрямую a параллельно себе так, чтобы её начало зачерчивало весь многогранник P_0. Она зачертит некоторое тело P (черт. 25).

Пусть точка X лежит внутри многогранника P_0. Исходящая из неё полупрямая a_x, параллельная a, пересекает поверхность многогранника P_0. Отсюда следует, что то же тело получится, если переносить начало полупрямой a только по граням многогранника P_0. Но при движении по грани Q полупрямая a зачертит бесконечную в одну сторону призму с основанием Q и боковыми рёбрами, параллельными a. Всё тело P составляется из таких призм и представляет поэтому многогранник.

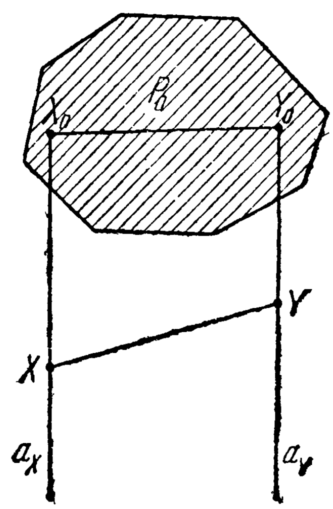


Черт. 25.

Многогранник P — выпуклый. Действительно, если X и Y — две его точки, то по построению они лежат на полупрямых a_X, a_Y, идущих из некоторых точек X_0, Y_0 многогранника P_0 параллельно полупрямой a (черт. 26). Отрезок X_0Y_0 содержится в многограннике P_0, так как он — выпуклый. Поэтому полупрямые, идущие из точек этого отрезка параллельно a, содержатся в P. Но они образуют полосу между a_X, a_Y, а потому оказывается, что вместе с точками X, Y многогранник P содержит отрезок XY, чем его выпуклость доказана.

Многогранник P — выпуклый и содержит точки A_i и полупрямую a; поэтому он содержит и их выпуклую оболочку R.

С другой стороны, выпуклая оболочка R, очевидно, содержит многогранник P_0 как выпуклую оболочку одних точек $A_1, \ldots, A_m$. Кроме того, согласно доказанной в n° 3 лемме, если выпуклый многогранник содержит P_0 и полупрямую a, то он содержит всякую параллельную ей полупрямую, идущую из точек многогранника P_0. Выпуклая оболочка R как общая часть таких многогранников обладает тем же свойством, т. е. содержит все полупрямые a, идущие из точек многогранника P_0. Но это означает, что она содержит весь многогранник P.



Черт. 26.

Итак, выпуклая оболочка R содержит многогранник P и сама содержится в нём, а следовательно, многогранник P и есть эта выпуклая оболочка.

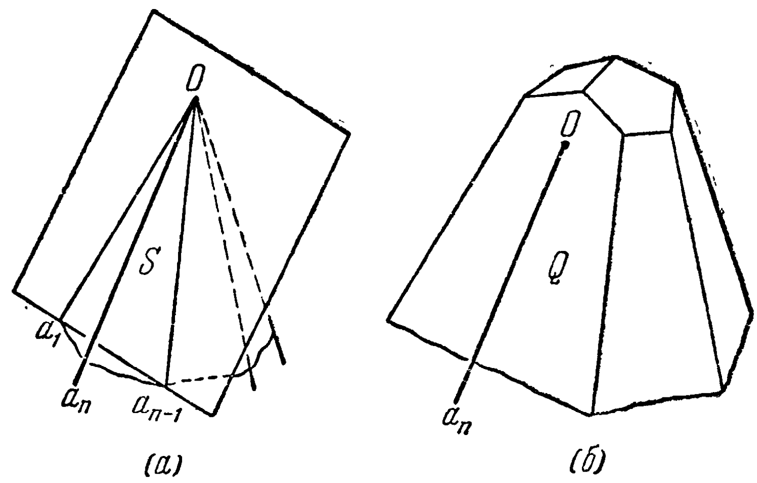
Все бесконечные рёбра многогранника P, как ясно из его построения, параллельны полупрямой a. Поэтому его предельный угол и есть эта полупрямая.

Таким образом, для случая, когда угол V сводится к одной полупрямой a, теорема доказана.

Если дан угол V с n рёбрами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то искомый многогранник P строим последовательно. Сначала, перенося начальную точку ребра a_1 по многограннику P_0, получаем многогранник P_1, потом, перенося начало ребра a_2 по P_1, получаем многогранник P_2 и т. д.

Допустим, что теорема верна в случае угла с $n-1$ ребром, и докажем её для угла V с n рёбрами $a_1, \ldots, a_n$. Если провести плоскость через рёбра a_1 и a_{n-1}, то она отделит ребро a_n, и мы получим угол V' с $n-1$ ребром $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ (черт. 27, a). Пусть P' — выпуклая оболочка фигуры, образованной данными точками $A_1, \ldots$ $\ldots, A_m$ и углом V'. По предположению, она является выпуклым многогранником с предельным углом V'.

Перенося по всем точкам многогранника P' начало полупрямой a_n, являющейся n-м ребром данного угла V, получим тело P. Повторяя предыдущие рассуждения с заменой P_0 на P' и a на a_n, убедимся в том, что тело P будет выпуклым многогранником, представляющим собою выпуклую оболочку фигуры, образованной многогранником P' и полупрямой a_n*). Но P' сам есть выпуклая оболочка фигуры, образованной точками $A_1, \ldots, A_m$ и углом V', а угол V' (по теореме 2) есть выпуклая оболочка совокупности своих рёбер $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.



Черт. 27.

Отсюда следует, что многогранник P будет выпуклой оболочкой совокупности точек $A_1, \ldots, A_m$ и всех полупрямых $a_1, \ldots, a_n$, т. е. выпуклой оболочкой фигуры, образованной точками $A_1, \ldots, A_m$ и углом V**).

Остаётся доказать, что угол V будет его предельным углом.

Так как V' есть предельный угол многогранника P', то бесконечные рёбра у V' и P' соответственно параллельны. При перенесении полупрямой a_n по точкам многогранника P' новых бесконечных рёбер кроме параллельных a_n, не прибавится, потому что к P' прибавляются только призмы с основаниями на его гранях и с боковыми рёбрами, параллельными a_n***). Отсюда следует, что бесконечные рёбра многогранника P могут быть параллельны только полупрямым $a_1, \ldots, a_n$, т. е. рёбрами угла V. Однако остаётся доказать, что каждой полупрямой a_j действительно отвечает хотя бы одно ребро многогранника P.

*) Многогранник P' теперь бесконечный, а потому полупрямая, идущая изнутри многогранника P', может и не пересекать его поверхности. Но тогда она пересекает его поверхность при продолжении в противоположную сторону, так как иначе P' содержал бы целую прямую, что исключено по предположению. Поэтому все прежние выводы повторяются дословно.

**) Эти заключения основаны на очевидном замечании: если G есть выпуклая оболочка фигуры F, а G' — фигуры $F+F'$, то G' есть также выпуклая оболочка фигуры $G+F'$. Доказательство следует из самого определения выпуклой оболочки.

***) Многогранник P слагается из таких призм с основаниями на гранях P', но теперь эти призмы могут иметь бесконечные основания — бесконечные грани многогранника P'.

Допустим, что, например, полупрямой a_k не отвечает никакое ребро многогранника P. Многогранник P как выпуклая оболочка совокупности точек $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и полупрямых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ полностью ими определяется. Поэтому в его построении порядок полупрямых a_j не может играть роли, и мы можем считать, что именно полупрямая a_k была последней a_n. Следовательно, можно считать, что именно полупрямой a_n не отвечает на P никакое ребро.

Пусть V'' — предельный угол многогранника P. Его рёбра параллельны рёбрам многогранника P, а потому все они представляют полупрямые a_j, кроме некоторых и во всяком случае (согласно сделанному предположению) кроме a_n. Поэтому V'' есть только часть угла V со всеми рёбрами $a_1, \ldots, a_n$.

Ребро a_n отделяется от угла V'' плоскостью его грани S с рёбрами a_1, a_{n-1} (или другими, если, скажем, a_1 или a_{n-1} не являются рёбрами угла V''). По теореме 1 о предельном угле многогранник P имеет грань Q, параллельную S (черт. 27, *б*). Перенося вершину угла V'' на грань Q, мы убедимся тогда, что ребро a_n окажется вне многогранника P. Это, однако, противоречит самому построению многогранника P как зачерчиваемого полупрямыми, параллельными a_n.

Таким образом, доказано, что всем рёбрам угла V отвечают параллельные им бесконечные рёбра многогранника P, так что V и есть его предельный угол.

Теорема доказана полностью.

Теорема 5а. *При условиях теоремы 5 многогранник P может иметь вершины только в данных точках $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Любая из них будет вершиной в том и только в том случае, когда она не содержится в выпуклой оболочке фигуры, образованной остальными точками A_i и углом V (при том, конечно, условии, что вершина угла V находится в одной из остальных точек).*

То, что вершины многогранника P могут лежать только в точках $A_1, \ldots, A_m$, видно из самого его построения. Действительно, мы начинали последнее с построения выпуклой оболочки P_0 совокупности точек $A_1, \ldots, A_m$. Согласно теореме 2 § 3 её вершины лежат только в этих точках, а при проведении полупрямых, приводящем к построению многогранника P, новые вершины не могут прибавиться.

Пусть P' — выпуклая оболочка фигуры, образованной углом V и всеми точками A_i кроме A_m. Согласно только что сказанному она есть выпуклый многогранник с вершинами только в точках $A_1, \ldots, A_{m-1}$. Если точка A_m содержится в P', то её присоединение ничего не меняет, а потому P' совпадает с P, так что и P не имеет вершины A_m.

Обратно, если A_m не является вершиной многогранника P, то она лежит в P'. Действительно, согласно теореме 4 P есть выпуклая оболочка своего предельного угла V и вершин. Так как среди них нет A_m, то P совпадает с P', так что и P' содержит точку A_m.

Теорема доказана.

Заметим, что по теореме 4 многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин и предельного угла V независимо от того, где в многограннике лежит вершина угла V. Вершины многогранника P теоремы 5 лежат в точках A_i, а из сделанного сейчас замечания следует, что вершину угла V можно брать где угодно в P, в частности, её можно брать в любой точке многогранника P_0, образующего выпуклую оболочку совокупности точек A_i.

6. Теорема 6. *Выпуклая оболочка конечной совокупности полупрямых, исходящих из одной точки внутрь одного полупространства, есть телесный выпуклый многогранный угол. Его рёбрами служат данные полупрямые, но не обязательно все. Любая из них будет его ребром тогда и только тогда, когда она не попадает в выпуклую оболочку совокупности остальных полупрямых.* (*Если полупрямые лежат в плоскости, то их выпуклая оболочка будет плоским углом.*)

Пусть полупрямые $a_1, \ldots, a_m$ идут из точки O внутрь полупространства R, ограниченного плоскостью Q, проходящей через точку O. Тогда всякая плоскость Q', проходящая внутри полупространства R параллельно Q, пересекает полупрямые $a_1, \ldots, a_m$ в некоторых точках $A_1, \ldots, A_m$. Выпуклая оболочка совокупности точек $O, A_1, \ldots$ $\ldots, A_m$ согласно теореме 2 § 3 есть телесный выпуклый многогранник. Этот многогранник представляет собой пирамиду с вершиной O и с основанием на плоскости Q'. Очевидно также, что эта пирамида P является выпуклой оболочкой совокупности отрезков $OA_1, \ldots, OA_m$.

Если теперь отодвигать плоскость Q' в бесконечность, то пирамида P в пределе превратится в телесный выпуклый многогранный угол V, который будет выпуклой оболочкой совокупности лучей $a_1, \ldots, a_m$. (Это ясно из того, что такая выпуклая оболочка должна содержать все отрезки OA_i и тем самым все пирамиды P.)

По теореме 2 § 3 точка A_k будет вершиной пирамиды P тогда и только тогда, когда она не попадает в выпуклую оболочку совокупности остальных точек $O, A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_m$. Поэтому и отрезок OA_k будет ребром пирамиды P тогда и только тогда, когда он не попадает в выпуклую оболочку совокупности остальных отрезков OA_i. В пределе мы получим тот же результат для полупрямой a_k. Это становится совершенно очевидным, если заметить, что при смещении плоскости Q' в бесконечность пирамида P только подобно увеличивается из точки O, так что всякое её ребро остаётся её ребром и всякий отрезок OA_k, не являющийся ребром, не становится ребром. Теорема таким образом доказана.

(Заметим, что если полупрямые $a_1, a_2, \ldots, a_m$ не идут в одно полупространство, то их выпуклой оболочкой будет всё пространство. Если же они идут в одно полупространство R, но не идут внутрь никакого полупространства, то их выпуклой оболочкой будет либо полупространство R, либо двугранный угол с ребром на плоскости, ограничивающей R.)

7. Задачи. 1. Доказать следующее обобщение теорем 5 и 6.

Выпуклая оболочка конечной совокупности точек A_i и полупрямых a_j, идущих из некоторых из этих точек внутрь одного полупространства, есть телесный выпуклый многогранник. Его предельный угол есть выпуклая оболочка совокупности полупрямых a_j, проведённых из одной точки. Вершины его лежат только в точках A_i, но любая из них будет вершиной тогда и только тогда, когда она не попадает внутрь выпуклой оболочки совокупности остальных точек и полупрямых a_j. Полупрямые a_j можно переносить параллельно себе так, чтобы начала их не покидали выпуклой оболочки совокупности точек A_i, и многогранник от этого не меняется.

2. Доказать теоремы 2—6, исходя из определения выпуклой оболочки как общей части полупространств, содержащих данное множество. (Ср. задачу 2 § 3.)

3. Доказать теоремы 5 и 5а индукцией по числу точек $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

4. Доказать, что определения предельного угла, дополнительно указанные в n° 2, равносильны основному (в случае выпуклых многогранников).

5. Доказать, что всякий бесконечный выпуклый многогранник с границей может быть единственным образом дополнен до полного без появления новых вершин. Найти условия, при которых данная граничная вершина исходного многогранника не будет вершиной построенного полного многогранника. (Ср. теорему 4 § 3 и задачу 1 § 3.)

6. Пусть V — телесный выпуклый многогранный угол с вершиной A. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ — векторы вдоль его рёбер. Доказать, что V есть геометрическое место концов X векторов $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX} = \boldsymbol{a} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a}_i$, где $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ — вектор из начала O в вершину A и α_i — любые $\geqslant 0$.

7. Пусть даны точки $A_1, \ldots, A_n$ и полупрямые $b_1, b_2, \ldots, b_k$, исходящие из этих точек. Пусть $\boldsymbol{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$ — векторы из начала в точки A_i, а $\boldsymbol{b}_i$ — векторы вдоль полупрямых b_i. Доказать, что выпуклая оболочка совокупности точек A_i и полупрямых b_i есть геометрическое место концов векторов $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \boldsymbol{b}_i$, где все $\alpha_i, \beta_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. (Ср. задачу 4 § 3.)

§ 5. Сферическое изображение

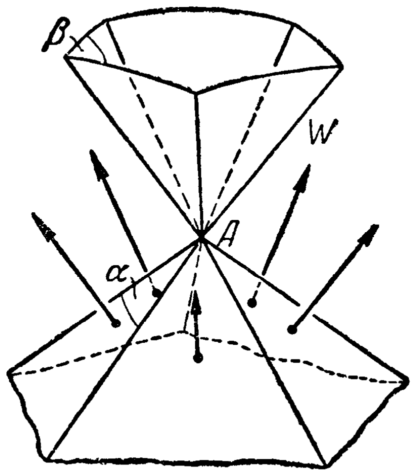
1. Сферическое изображение. Пусть F — выпуклая поверхность и E — какая-либо единичная сфера, т. е. сфера радиуса единица. Возьмём на F некоторое множество точек M и через каждую точку этого множества проведём все опорные плоскости к F. Если внешние нормали к этим плоскостям отложить из центра сферы E, то концы их заполнят на ней некоторое множество, которое называется *сферическим изображением* множества M.

Это определение приложимо, в частности, к выпуклым многогранникам, причём, если многогранник имеет границу, то опорные плоскости, упирающиеся в него только в граничных точках, исключаются. Если множество M на многограннике P есть внутренность грани, то его сферическое изображение состоит из одной точки. Если M есть ребро с исключёнными концами*), то его сферическое изображение

*) Концы нужно исключить, так как они являются вершинами многогранника и их сферические изображения будут сферическими многоугольниками. По аналогичной причине в предыдущем утверждении говорится о внутренности грани, т. е. с исключением рёбер и вершин.

есть дуга большого круга с концами в точках, являющихся сферическими изображениями граней, сходящихся в ребре M, как это ясно из того, что всякая промежуточная плоскость между плоскостями граней, сходящихся в ребре, будет опорной.

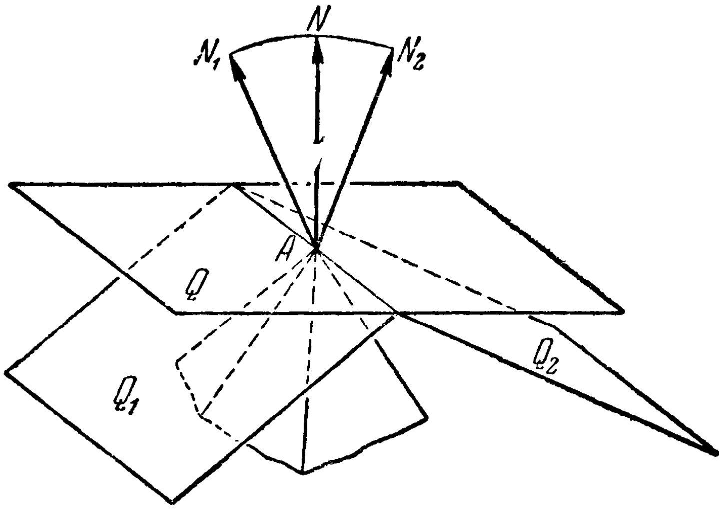
Если M состоит из одной вершины A, то его сферическое изображение есть часть сферы E, вырезаемая телесным углом, образованным нормалями ко всем опорным плоскостям в вершине A. Этот телесный угол W представляет собою, как легко убедиться, выпуклый многогранный угол с рёбрами, перпендикулярными к граням многогранника, сходящимся в A (черт. 28).



Черт. 28.

Если Q_1 и Q_2 — опорные плоскости в вершине A, то многогранник заключён в двугранном угле между ними, и потому всякая «промежуточная» плоскость Q также будет опорной в вершине A. Нормали N к таким плоскостям Q заполняют угол между нормалями N_1 и N_2 к плоскостям Q_1 и Q_2 (черт. 29). Это означает, что вместе с лучами N_1 и N_2 угол W содержит плоский угол между ними. Поэтому угол W — выпуклый.

Грани угла W образованы нормалями к плоскостям, касающимся многогранника по рёбрам, сходящимся в вершине A. Они представляют поэтому плоские углы, перпендикулярные к этим рёбрам. Следовательно, каждый двугранный угол β_i телесного угла W дополняет до π угол между двумя соответствующими рёбрами многогранника, т. е. плоский угол α_i на грани при вершине A:



Черт. 29.

$$\alpha_i = \pi - \beta_i. \qquad (1)$$

Сферическое изображение вершины есть, таким образом, выпуклый сферический многоугольник с углами β_i. Вершины этого многоугольника, соответственно рёбрам угла W, являются сферическими изображениями внутренностей граней, а стороны, соответственно граням угла W, представляют сферические изображения рёбер с исключёнными концами.

Сферическое изображение вершины есть, конечно, то же, что сферическое изображение многогранного угла, образованного сходящимися в ней гранями. Все наши выводы верны для любого выпуклого многогранного угла.

Если теперь M есть любая часть данного выпуклого многогранника P, то её сферическое изображение слагается из сферических изображений попадающих в неё вершин, отрезков рёбер и кусков внутренностей граней. Так как сферические изображения рёбер и граней включаются в сферические изображения вершин, к которым они подходят, то сферическое изображение многогранника слагается из сферических изображений его вершин и тех рёбер, оба конца которых лежат на границе *). При этом согласно условию граничные вершины и рёбра исключаются. Например, боковая поверхность призмы не имеет вершин внутри, и её сферическое изображение сводится к большому кругу.

Всякая опорная плоскость, касающаяся многогранника в вершине, не касается других его вершин, если только она не касается его по ребру или грани. Поэтому многоугольники, представляющие сферические изображения вершин, не имеют общих внутренних точек и могут прилегать лишь по сторонам и вершинам, соответственно рёбрам и граням, на которых лежат вершины многогранника. Отсюда следует, что сферическое изображение всего многогранника представляет собою сферический многоугольник, составленный из сферических изображений вершин многогранника.

Если многогранник замкнутый, то его сферическое изображение покрывает всю сферу и представляет разбиение её на сферические выпуклые многоугольники, соответствующие вершинам многогранника.

Резюмируем все полученные выводы в следующей теореме:

Теорема 1. *Сферическое изображение выпуклого многогранника слагается из выпуклых сферических многоугольников $S_1, \ldots$ $\ldots, S_m$, являющихся сферическими изображениями его вершин. Эти многоугольники не имеют общих внутренних точек. Общая сторона двух многоугольников S_k, S_l есть сферическое изображение ребра (с исключением концов), соединяющего соответствующие вершины. Общая вершина многоугольников $S_k, \ldots, S_q$ есть сферическое изображение внутренности той грани, которой принадлежат вершины многогранника, соответствующие этим многоугольникам. Углы многоугольников S_i равны дополнениям до π плоских углов при соответствующих вершинах многогранника.*

2. Площадь сферического изображения. Пусть V — выпуклый многогранный угол с n гранями, плоские углы которых равны $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_n$. Его сферическое изображение есть сферический n-угольник с углами $\beta_i = \pi - \alpha_i$. Но площадь ω сферического n-угольника вы-

*) Если многогранник имеет границу, то граничные вершины исключаются. Но на многограннике с границей могут иметься неграничные рёбра с обоими концами на границе. Тогда их сферические изображения не входят в сферические изображения вершин, и их нужно включать в сферическое изображение многогранника особо. При этом может случиться, что сферические изображения некоторых вершин соединяются дугами больших кругов, являющимися сферическими изображениями таких рёбер.

ражается через его углы по формуле

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - (n-2)\pi, \tag{2}$$

т. е. равна избытку суммы его углов над суммой углов плоского многоугольника с тем же числом вершин n *). А так как $\beta_i = \pi - \alpha_i$, то

$$\omega = 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i. \tag{3}$$

Так как площадь ω положительна, то в этой формуле содержится, между прочим, тот известный факт, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла всегда меньше 2π.

Сумму углов α_i мы называем *полным углом вокруг вершины* и обозначаем через θ, а разность $2\pi - \theta$ называем *кривизной вершины*. Поэтому формула (3) означает, что кривизна вершины выпуклого многогранного угла равна площади его сферического изображения.

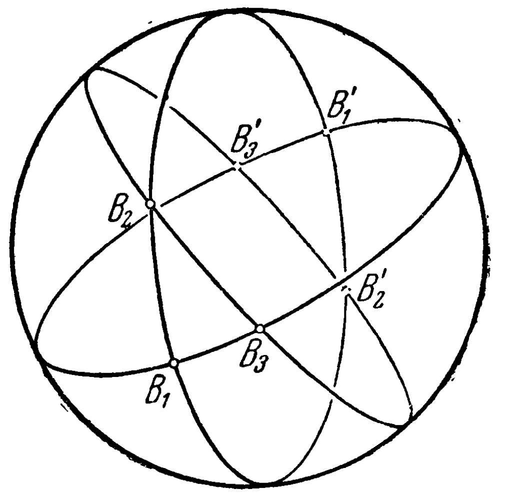
Кривизна любой части многогранника определяется как сумма кривизн заключающихся в ней его вершин, не лежащих на его границе. Вместе с тем согласно теореме 1 сферическое изображение любой части многогранника слагается из сферических изображений заключающихся в ней вершин. Поэтому и для любой части многогранника площадь сферического изображения равна кривизне.

Если деформировать многогранник, не меняя длин кривых на нём, то углы на нём также не будут меняться, потому что они определяются

---

*) Доказательство. Докажем эту формулу сначала для сферического треугольника $B_1B_2B_3$ с углами β_1, β_2, β_3 (черт. 30). Продолжая стороны треугольника, получим три больших круга, которые в своём пересечении образуют ещё треугольник $B_1'B_2'B_3'$, симметричный треугольнику $B_1B_2B_3$ относительно центра сферы. Каждые два больших круга ограничивают два двуугольника с вершинами B_1B_1', B_2B_2', B_3B_3'. Углы этих двуугольников будут, соответственно, β_1, β_2, β_3. Отношение площади каждого двуугольника к площади всей сферы равно, очевидно, отношению его угла к 2π. Поэтому сумма площадей всех шести рассматриваемых двуугольников будет

$$\frac{2(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}{2\pi} 4\pi = 4(\beta_1+\beta_2+\beta_3).$$



Черт. 30.

Вместе с тем непосредственно видно, что наши двуугольники покрывают всю сферу и трижды оба треугольника $B_1B_2B_3$ и $B_1'B_2'B_3'$. Поэтому сумма их площадей равна $4\pi + 4\omega$, где ω — площадь треугольника $B_1B_2B_3$. Отсюда $4(\beta_1+\beta_2+\beta_3) = 4\pi + 4\omega$, т. е. $\omega = \beta_1+\beta_2+\beta_3 - \pi$, как того и требует формула (2).

Если теперь дан сферический n-угольник, то разбиваем его диагоналями на $n-2$ треугольников. Тогда сложение площадей этих треугольников и одновременно углов сразу даёт формулу (2) для нашего n-угольника.

длинами; например, длина кривой, проведённой на многограннике на постоянном малом расстоянии r от вершины A, равна, очевидно, θr, где θ — полный угол вокруг A. Длины кривых на многограннике определяют, как говорят, его *«внутреннюю метрику»*, и потому кривизна и вместе с ней и площадь сферического изображения зависят только от внутренней метрики многогранника. (Более детально понятие внутренней метрики будет определено в n°2 § 6.)

Полученные результаты можно резюмировать в виде следующей теоремы:

Теорема 2. *Площадь сферического изображения любой части выпуклого многогранника равна её кривизне, а так как кривизна зависит только от внутренней метрики многогранника, то это же верно для площади сферического изображения. Поэтому при всякой деформации многогранника, не нарушающей его выпуклости и не меняющей длин кривых на нём (т. е. не меняющей его метрики), площадь сферического изображения остаётся неизменной.*

Это есть элементарный аналог знаменитой теоремы Гаусса о том, что у всякой непрерывно изогнутой поверхности площадь сферического изображения остаётся неизменной, если деформировать поверхность, не меняя длин кривых на ней.

3. Сферическое изображение бесконечного многогранника. Замкнутый выпуклый многогранник имеет опорные плоскости любого направления, поэтому его сферическое изображение покрывает всю сферу и площадь его равна 4π.

Бесконечный выпуклый многогранник всегда содержит полупрямую. Поэтому для всякой его опорной плоскости Q найдётся опорная плоскость к этой полупрямой с параллельной внешней нормалью, стоит лишь вдвинуть плоскость Q внутрь многогранника так, чтобы она упёрлась в эту полупрямую. Отсюда следует, что сферическое изображение бесконечного многогранника содержится в сферическом изображении полупрямой. Непосредственно видно, что это последнее покрывает полусферу, ограниченную экватором, перпендикулярным к полупрямой. Поэтому *сферическое изображение бесконечного многогранника всегда содержится в полусфере и, следовательно, площадь его не превосходит* 2π.

Докажем более точную теорему:

Теорема 3. *Сферическое изображение бесконечного выпуклого многогранника совпадает со сферическим изображением его предельного угла.*

Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник и V — его предельный угол. Вершину угла V мы выберем внутри многогранника, и тогда, как показано в n° 1 § 4, угол V будет содержаться в многограннике. В таком случае очевидно, что для всякой опорной плоскости Q многогранника найдётся опорная плоскость угла V с параллельной внешней нормалью, стоит лишь вдвинуть плоскость Q внутрь многогранника так, чтобы она упёрлась в угол V. Отсюда следует, что сферическое изображение многогранника содержится в сферическом изображении его предельного угла.

Докажем, что, обратно, сферическое изображение угла V содержится в сферическом изображении многогранника P. Так как согласно теореме 1 оба сферических изображения представляют собою сферические многоугольники, то достаточно, очевидно, доказать, что всякая внутренняя точка N сферического изображения угла V содержится в сферическом изображении многогранника P.

По доказанному в n° 1 граница сферического изображения многогранного угла слагается из сферических изображений его рёбер. Поэтому внутренняя точка N сферического изображения угла V отвечает опорной плоскости Q, касающейся угла V только в его вершине. Тогда весь угол V, кроме его вершины, оказывается внутри полупространства R, ограниченного этой плоскостью.

Так как по самому определению угла V он состоит из полупрямых, направленных параллельно полупрямым, лежащим на многограннике P, то все полупрямые, лежащие на P, будут направлены в то же полупространство R. Отсюда следует, что в противоположном полупространстве R_1 может заключаться лишь конечная часть многогранника P. А тогда, выдвигая плоскость Q в полупространство R_1, мы дойдём до такого её положения, что весь многогранник P окажется по одну сторону от неё, т. е. мы получим его опорную плоскость, параллельную Q. Поэтому точка N, соответствующая на сфере плоскости Q, входит также в сферическое изображение многогранника P. Следовательно, сферическое изображение многогранника P содержит сферическое изображение угла V; а так как вначале мы доказали обратное включение, то оба сферических изображения совпадают, что и требовалось доказать.

Сферическое изображение всякого многогранного угла представляет собой, как было показано, выпуклый многоугольник, а вершины этого многоугольника S представляют собой сферические изображения внутренностей граней угла V. Грани угла V параллельны тем бесконечным граням многогранника P, бесконечные рёбра которых непараллельны.

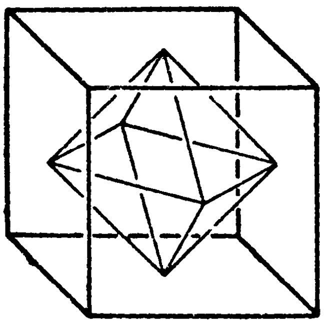
Отсюда и из доказанного совпадения сферических изображений многогранника P и угла V вытекает следующий вывод:

Сферическое изображение бесконечного выпуклого многогранника есть сферически выпуклый многоугольник S, вершины которого отвечают бесконечным граням с непараллельными бесконечными рёбрами. Сферические же изображения граней с параллельными бесконечными рёбрами попадают на стороны многоугольника S (соответствующие рёбрам предельного угла, параллельным этим рёбрам многогранника). Сферические изображения конечных граней попадают внутрь многоугольника S.

Если предельный угол сводится к полупрямой, т. е. если все бесконечные рёбра многогранника параллельны, то многоугольник S

представляет полусферу. Если же предельный угол сводится к плоскому углу, то многоугольник S будет двуугольником.

Заметим, что теорема 3 приводит к новому определению предельного угла как многогранного угла, сферическое изображение которого совпадает со сферическим изображением многогранника. Это основано на том факте, что многогранный угол определяется своим сферическим изображением с точностью до переноса. Действительно, если V — данный многогранный угол, а W — многогранный угол, заполненный нормалями к опорным плоскостям угла V, то рёбра и грани угла W перпендикулярны соответственно к граням и рёбрам угла V. Поэтому отношение между углами V и W взаимное и они определяют друг друга. Рёбра одного перпендикулярны к граням другого, и обратно. Каждый из них заполняется нормалями к опорным плоскостям другого.



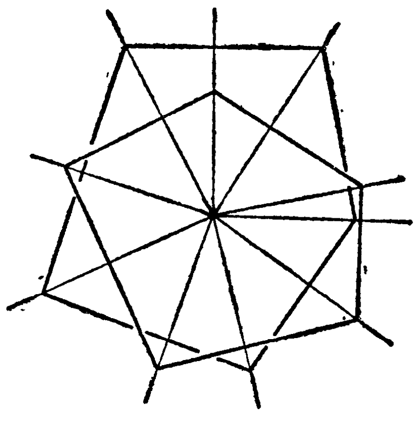
Черт. 31.

4. Полярные многогранники. Указанная только что взаимность многогранных углов V и W оказывается интересным образом связанной с существованием взаимных многоугольников и многогранников.

Если P — выпуклый многогранник и O — точка внутри него, то, оказывается, можно построить выпуклый многогранник P', грани которого перпендикулярны к лучам, идущим из O через вершины, а вершины лежат на лучах, идущих из O перпендикулярно к граням многогранника P. Взаимоотношение между гранями и вершинами многогранников P и P' оказывается взаимным. Рёбрам одного отвечают рёбра другого — ребру, соединяющему вершины C_1 и C_2 многогранника P, отвечает ребро, по которому смежны грани многогранника P', отвечающие вершинам C_1 и C_2.

Находящиеся в таком соответствии многогранники называются *полярными* друг другу. Простейший пример представляют куб и октаэдр с вершинами в центрах граней куба (черт. 31). Вообще всякому многограннику P, описанному около шара, отвечает в качестве полярного многогранник P_1, вписанный в шар, с вершинами в точках касания шара с гранями многогранника P.

Аналогично определяются полярные многоугольники: вершины одного лежат на лучах, перпендикулярных к сторонам другого, и обратно (черт. 32).



Черт. 32.

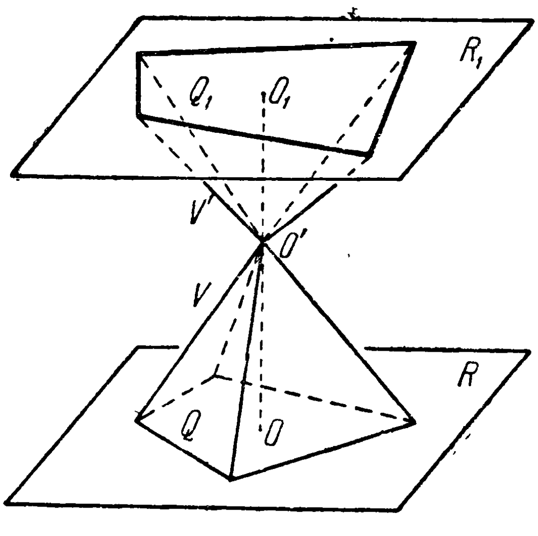
Построение многогранника, полярного данному, осуществляется путём полярного преобразования, состоящего в сопоставлении точкам плоскостей, и обратно. Именно, каждой точке C ставится в соответствие плоскость, перпендикулярная к лучу $\overrightarrow{OC}$ и удалённая от O на расстояние, обратно пропорциональное расстоянию OC. Если c — вектор, идущий из начала O в точку C, то уравнение соответствующей плоскости будет $cx = 1$ (или $cx = r$, где r — любая положительная постоянная). По этому правилу каждой вершине C_i данного многогранника с точкой O внутри сопоставляется плоскость грани другого многогранника.

Если точка B движется по плоскости $cx = 1$, соответствующей точке C, то неизменно $cb = 1$. Это означает, что плоскости $bx = 1$, соответствующие точкам B, проходят через точку C. Поэтому плоскости $cx = 1$ как геометрическому месту точек соответствует точка C как центр связки плоскостей, отвечающих точкам плоскости $cx=1$. Иными словами, инцидентность точки и плоскости сохраняется, и только плоскости и точки меняются ролями*).

Совершенно аналогично определяется полярное соответствие на плоскости между точками и прямыми.

Мы сначала рассмотрим полярное соответствие на плоскости и выясним его свойства, а потом по аналогии рассмотрим полярность в пространстве.

Пусть Q — конечный выпуклый многоугольник, лежащий в некоторой плоскости R. Возьмём внутри него точку O и восставим из неё перпендикуляр OO' к плоскости R длиной, равной единице. Проведя из O' полупрямые во все точки многоугольника Q, получим выпуклый многогранный угол V (черт. 33).

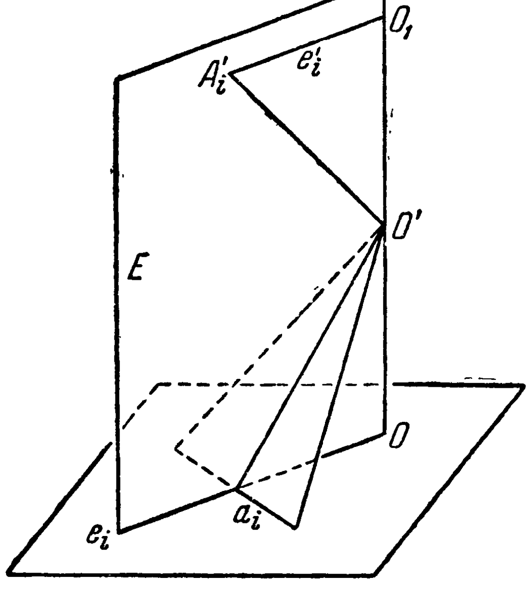


Черт. 33.

Построим многогранный угол V_1, образованный нормалями к опорным плоскостям угла V, и пересечём его плоскостью R_1, параллельной R. В сечении получим выпуклый многоугольник Q_1, вершины которого получаются в пересечении рёбер угла V' с плоскостью R_1.

Легко видеть, что продолжение перпендикуляра OO' пересекает плоскость R_1 в точке O_1, лежащей внутри многоугольника Q_1 (потому что плоскость, перпендикулярная к OO_1 в точке O', будет опорной к углу V', касаясь его только в его вершине O').

Пусть a_i — сторона многоугольника Q и e_i — луч, идущий из O перпендикулярно к содержащей её прямой (черт. 34). Плоскость E, проходящая через точку O' и луч e_i, будет перпендикулярной к плоскости той грани угла V, которая соответствует стороне a_i. Но грани угла V отвечает перпендикулярное ребро угла V_1; следовательно, оно будет лежать в плоскости E. Поэтому соответствующая вершина A_i' многоугольника Q_1 будет лежать на идущем из точки O_1 луче e_i', параллельном e_i (поскольку плоскость E пересекает плоскости R и R_1 по параллельным прямым).



Черт. 34.

Если спроектировать многоугольник Q_1 на плоскость R многоугольника Q, то из сказанного ясно, что получится многоугольник Q', вершины которого лежат на лучах, перпендикулярных к сторонам многоугольника Q.

Но, как было отмечено в конце предыдущего n° 3, отношение между многогранными углами V и V' взаимно. Следовательно, отношение между многоугольниками Q и Q_1, а значит, также Q и Q' тоже взаимно. Поэтому как вершины многоугольника Q' лежат на лучах, идущих из O перпендикулярно к сторонам многоугольника Q, так и вершины многоугольника Q лежат на лучах, идущих

*) Рассматриваемое полярное соответствие есть частный случай полярности относительно любой поверхности второго порядка. Такие общие полярности рассматриваются в проективной геометрии. В нашем случае речь идёт о полярности относительно единичного шара.

из O перпендикулярно к сторонам многоугольника Q'. Таким образом, эти многоугольники и будут полярными друг для друга.

Если луч OX_1 идёт через внутреннюю точку X_1 многоугольника Q_1, т. е. внутрь угла V', то перпендикулярная к нему плоскость будет опорной к углу V. Поэтому она пересекает плоскость R по такой прямой x, что многоугольник Q лежит по одну сторону от неё. Если точка X_1 лежит на краю многоугольника Q_1, то соответствующая прямая x будет опорной к многоугольнику Q. Таким образом, точкам многоугольника Q_1, а значит, и Q', сопоставляются прямые, не пересекающие Q, а точкам границы многоугольника Q' — опорные прямые многоугольника Q.

Примем точку O' за начало координат в пространстве, а точку O — за начало координат в плоскости R. Оси x_1, x_2 направим параллельно плоскости R, а ось x_3 — по $O'O$. Положение точки X определяется в пространстве вектором (x_1, x_2, x_3), а на плоскости R — вектором (x_1, x_2).

Уравнение плоскости, проходящей через O' перпендикулярно к лучу $O'C$, будет

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0, \tag{1}$$

где c_1, c_2, c_3 — координаты точки C (скалярное произведение вектора (c_1, c_2, c_3) точки C и вектора (x_1, x_2, x_3) точки на плоскости равно нулю).

Если точка C лежит в плоскости R, то $c_3 = 1$. Если же на построенной плоскости взять точки её пересечения с плоскостью R', на которой $x_3 = -1$, то вместо (1) получим

$$c_1x_1 + c_2x_2 = 1. \tag{2}$$

Это есть не что иное, как уравнение прямой c, которая сопоставляется точке C, потому что мы как раз сопоставляем каждой точке C прямую пересечения плоскости R' с плоскостью, перпендикулярной к лучу $O'C$, или проекцию этой прямой на плоскость R.

Следовательно, аналитически наше построение сводится к тому, что каждой точке $C(c_1, c_2)$ плоскости R мы сопоставляем прямую с уравнением (2). По взаимности верно также обратное. Заметим, что когда точка C пробегает прямую c', соответствующие ей прямые вращаются вокруг точки C', которой отвечает прямая c'. Действительно, движению точки C по прямой c' соответствует вращение луча $O'C$ в плоскости (O', c'), а тогда перпендикулярные к нему плоскости неизменно проходят через луч $O'C'$, перпендикулярный к плоскости (O', c'). Но это означает, что прямые, соответствующие точке C, проходят через точку C'.

Это соответствие прямых и точек и называется полярностью (относительно единичной окружности с центром O).

Полярное соответствие в пространстве определяется совершенно аналогично: точке с координатами c_1, c_2, c_3 сопоставляется плоскость с уравнением $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 1$, т. е. концу отложенного из начала O вектора $\boldsymbol{c}$ сопоставляется плоскость $\boldsymbol{cx} = 1$. Она перпендикулярна к $\boldsymbol{c}$ и расстояние её от начала равно обратной величине длины вектора $\boldsymbol{c}$.

Для построения этого соответствия можно воспользоваться аналогичным приёмом. Представим себе пространство как трёхмерную плоскость R в четырёхмерном пространстве. Из начала O, лежащего в R, проведём перпендикуляр OO' к плоскости R длиной единица и ось X_4 направим из O' к O. По другую сторону от O' проведём трёхмерную плоскость R_1, параллельную R, на расстоянии, равном единице, от точки O'. Каждой точке C на «плоскости» R соответствует луч $O'C$, а этому лучу отвечает проходящая через O' перпендикулярная к нему трёхмерная плоскость. Пересечение её с «плоскостью» R_1 даёт двухмерную плоскость, проекция которой на R и будет плоскостью, соответствующей точке C.

Если P — выпуклый многогранник (в «плоскости» R), содержащий внутри точку O, то лучи, проходящие через его точки из точки O', заполняют многогранный четырёхмерный угол V. Нормали к его опорным плоскостям заполнят угол V', пересечение которого «плоскостью» R_1 даст многогранник P', полярный P, стоит лишь спроектировать его на «плоскость» R.

Отношения между многогранниками P и P' аналогичны отношениям между полярными многоугольниками Q и Q'. Вершине C одного отвечает плоскость грани другого, перпендикулярная к лучу OC, и обратно. Ребру C_1C_2, соединяющему вершины C_1 и C_2, отвечает перпендикулярное ребро, по которому смежны грани, соответствующие этим вершинам. Всё это непосредственно усматривается из взаимных отношений элементов многогранных (четырёхмерных) углов V и V'. Трёхмерным граням, двухмерным граням и рёбрам одного отвечают перпендикулярные к ним рёбра, двухмерные грани и трёхмерные грани другого. Поэтому в сечениях плоскостями R и R_1 получаем аналогичное соответствие граней, рёбер и вершин многогранника P вершинам, рёбрам и граням многогранника P'.

Многогранник P, определённый своими вершинами как их выпуклая оболочка, ставится в соответствие многограннику P' определённому как пересечение полупространств, ограниченных плоскостями его граней.

Задача. Пусть P — замкнутый выпуклый многогранник, O — точка внутри него и S — единичная сфера с центром O. Многогранник P определяет два разбиения сферы S на выпуклые сферические многоугольники. Одно разбиение — на многоугольники, являющиеся сферическими изображениями вершин многогранника. Другое — на многоугольники, являющиеся проекциями граней многогранника на сферу S при проектировании лучами из центра O. Убедиться, что многогранник, полярный многограннику P (относительно точки O), определяет эти же разбиения, но с переменой их ролями.

Сначала можно убедиться, что для полярных многоугольников верно совершенно аналогичное утверждение. Только здесь речь идёт о разбиениях единичной окружности на дуги.

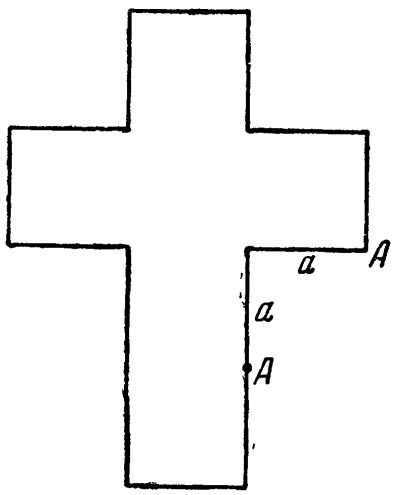
§ 6. Развёртка

1. Развёртка. Речь идёт об обыкновенном склеивании многогранника из нарезанных из бумаги многоугольников. Совокупность многоугольников с указанием правила склеивания их по сторонам и есть развёртка. Правило склеивания содержит указание, какая сторона одного многоугольника склеивается с какой стороной другого или того же самого многоугольника и в каком направлении. Указание направления необходимо, потому что два отрезка AB и CD можно накладывать друг на друга двумя способами: или так, что совпадают концы A с C и B с D, или так, что совпадают концы A с D и B с C. Склеивание друг с другом сторон одного и того же многоугольника мы называем «самосклеиванием». Оно имеет место, например, в известной крестообразной развёртке куба (черт. 35).

Так как многоугольник, ограниченный несколькими ломаными, можно разбить на простые многоугольники, т. е. ограниченные каждый одной ломаной без кратных точек, то можно рассматривать развёртки, состоящие только из таких простых многоугольников. Простой многоугольник может быть конечным или бесконечным; в последнем случае он имеет конечное число конечных сторон и две бесконечные стороны.

Любую точку внутри стороны многоугольника можно условно считать вершиной, разбив тем самым сторону на две стороны (как, например, в развёртке куба, черт. 35). Поэтому не будет ограничением считать, что склеивание происходит всегда по целым сторонам.

Говоря теперь точно, *развёрткой* мы называем совокупность конечного числа простых, конечных или бесконечных, многоугольников с указанным правилом «склеивания» их по сторонам. Под склеиванием понимается отождествление; т. е. при склеивании двух отрезков между их точками устанавливается взаимно однозначное соответствие и соответственные точки отождествляются, считаясь уже за одну точку развёртки. Правило склеивания означает просто задание таких соответствий между точками сторон. При этом, конечно, подразумевается условие: если точка A отождествлена с B, а B с C, то A отождествлена с C *).



Черт. 35.

Мы будем неизменно предполагать, что правило склеивания удовлетворяет следующим условиям:

1) Любые отождествляемые при склеивании отрезки сторон всегда имеют равные длины. (Иными словами, соответствие между отождествлёнными точками склеиваемых сторон сохраняет длины.)

2) От каждого многоугольника к другому можно перейти, идя по многоугольникам, имеющим склеенные стороны.

Это условие означает, что развёртка не распадается на совершенно не связанные друг с другом части.

3) Каждая сторона каждого многоугольника либо не склеивается ни с какой стороной, либо склеивается только с одной стороной.

Это условие означает, что при склеивании не должен получаться ветвящийся многогранник.

Стороны, не склеиваемые ни с какими другими, образуют «границу» развёртки. Если таких сторон нет, то мы говорим, что развёртка не имеет границы.

Стороны и вершины многоугольников развёртки мы называем рёбрами и вершинами развёртки, считая при этом отождествлённые стороны и вершины, соответственно, за одно ребро и одну вершину развёртки.

Многогранник есть не более как частный случай развёртки: он составлен из многоугольников — граней, и отождествления, мыслимые в развёртке, вообще говоря, только абстрактно, в нём реализованы. Поэтому, рассматривая развёртки, мы рассматриваем тем самым и многогранники. Но, конечно, глядя на многогранник как на развёртку,

*) Например, если сторона A_1B_1 многоугольника Q_1 склеена со стороной A_2B_2 многоугольника Q_2 (конец A_1 с концом A_2), а сторона A_2C_2 многоугольника Q_2 склеена со стороной A_3C_3 многоугольника Q_3 (конец A_2 с концом A_3), то вершины A_1, A_2, A_3 считаются за одну точку развёртки.

мы вовсе пренебрегаем его пространственной формой. Нас не будет также интересовать строение многогранника или развёртки. Мы фиксируем своё внимание на том, чтó есть общего у всех развёрток одного многогранника и вообще у всех развёрток, которые могут быть получены друг из друга путём операций разрезывания и склеивания. Это общее — их «внутренняя метрика». Мы дадим сейчас её точное определение.

2. Внутренняя метрика. Пусть X, Y — две точки развёртки R. Их можно соединять в R ломаными, переходя с одного многоугольника на другой через отождествлённые точки их границ*). Точная нижняя граница длин таких ломаных называется *расстоянием* между точками X, Y в развёртке R и обозначается $\rho_R(X, Y)$.

Это расстояние, рассматриваемое как функция пары точек X, Y, и есть метрика развёртки R.

Если между точками развёрток R и R' установлено соответствие, при котором расстояния между парами соответственных точек равны

$$\rho_R(X, Y) = \rho_{R'}(X', Y'),$$

то такое соответствие называется *изометрическим*, а развёртки называются *изометричными*. (Отождествляемые в развёртке точки считаются, конечно, за одну.)

Будем говорить, что развёртка R' получается из развёртки R путём разрезывания и склеивания, если можно разрезать многоугольники развёртки R на частичные многоугольники и так их склеить по сторонам, что получится развёртка, совершенно одинаковая с R', т. е. составленная из таких же многоугольников с таким же правилом склеивания (причём правило склеивания в этой развёртке определяется естественным образом: склеиванию подлежат или стороны, подлежавшие склеиванию в R, или стороны разрезов).

Развёртки, получаемые друг из друга разрезываниями и склеиваниями, изометричны, потому что эти операции по существу не меняют ломаных, проводимых в развёртке, а только соединяют отождествлённые точки или разъединяют точки разреза, превращая одну точку в две подлежащие отождествлению.

Можно доказать обратное утверждение:

Изометричные развёртки получаются друг из друга путём разрезывания и склеивания.

Так как в общем виде это утверждение нам не будет нужно, мы оставляем его без доказательства, провести которое не представляет, впрочем, большого труда.

Все те факты, которые зависят только от внутренней метрики развёртки и, в частности, многогранника, образуют её *внутреннюю*

*) Возможность перейти таким путём от одного многоугольника к любому другому и, следовательно, соединить любые две точки X, Y из R предусмотрена в самом определении развёртки — условие 2).

геометрию. Изометричные развёртки имеют одну и ту же внутреннюю геометрию, так же как, в частности, развёртка и склеенный из неё многогранник.

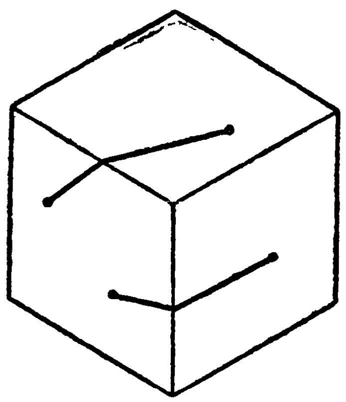
К понятиям внутренней геометрии, помимо самого расстояния, или метрики ρ_k, относятся длины, углы, площади.

Длина ломаной в развёртке есть сумма длин её звеньев. Каждый же достаточно малый отрезок XY в развёртке является кратчайшей линией между его концами и имеет поэтому длину, равную расстоянию $\rho_k(X, Y)$. Следовательно, длина определяется через метрику.

Так как углы плоского треугольника определяются длинами сторон, то углы также могут быть определены через метрику и сохраняются при изометрическом отображении. Аналогичное замечание справедливо для площади.

Многогранник, как мы уже сказали, есть не что иное, как развёртка, в которой склеивания, обычно только указываемые в развёртке, осуществлены в действительности. Поэтому к многогранникам применимо то же понятие о их внутренней геометрии, которая определяется расстояниями, измеренными на самом многограннике. Если между точками двух многогранников установлено такое соответствие, что эти расстояния между парами соответственных точек равны, то такое соответствие называется *изометрическим*, а сами многогранники, допускающие такое соответствие, называются *изометричными*. У таких многогранников внутренняя геометрия одна и та же. Примером могут служить боковые поверхности призм с равными периметрами основания и равными длинами боковых рёбер.

Роль прямолинейных отрезков во внутренней геометрии играют кратчайшие линии, соединяющие две данные точки многогранника или развёртки и проходящие на многограннике или, соответственно, в развёртке. Такие линии мы называем коротко *кратчайшими*. Кратчайшая, соединяющая две точки на одной грани, представляет собой прямолинейный отрезок, а соединяющая точки на разных гранях представляет собой ломаную из отрезков на нескольких гранях. Примеры кратчайших на кубе даны на черт. 36. Свойства кратчайших в развёртках будут рассмотрены дальше, в § 8.

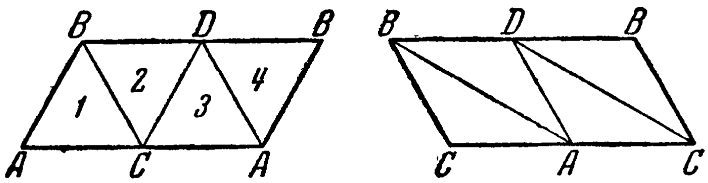


Черт. 36.

3. Склеивание многогранника. Мы говорим, что *многогранник P склеен из развёртки R*, если склеивания (отождествления), только указанные в развёртке, действительно осуществлены на многограннике. Говоря точно, это означает, что многогранник допускает такое разбиение R' на куски — «многоугольники» Q', ограниченные линиями — «рёбрами», сходящимися в «вершинах» разбиения R', что выполнены два условия:

1) Развёртка R и разбиение R' имеют одинаковое строение, т. е. каждому многоугольнику, ребру или вершине развёртки R отвечает «многоугольник», «ребро» или «вершина» разбиения R' так, что при этом соответствии сохраняется отношение принадлежности (ребра — многоугольнику, вершины — ребру).

2) Если «многоугольник» Q' из R' соответствует многоугольнику Q из R, то Q' можно развернуть на плоскость так, что он совпадёт с Q, причём его рёбра и вершины совпадут с соответственными рёбрами и вершинами многоугольника Q. Наглядно понятная операция разворачивания на плоскость означает изометрическое отображение, т. е. такое сопоставление точек многоугольника Q' точкам плоского многоугольника, при котором длины кривых остаются неизменными *).



Черт. 37.

Так как многоугольники разбиения R' и развёртки R соответственно изометричны и прилегают по соответственным рёбрам и вершинам, то длины любых ломаных в R и R' оказываются соответственно равными. Это означает, что многогранник P изометричен развёртке R. Поэтому многогранники, допускающие одинаковые развёртки; или, что то же, склеенные из одинаковых развёрток, будут изометричными друг другу. Вообще склеивание многогранника из развёртки можно было бы коротко определить как изометрическое отображение развёртки на многогранник.

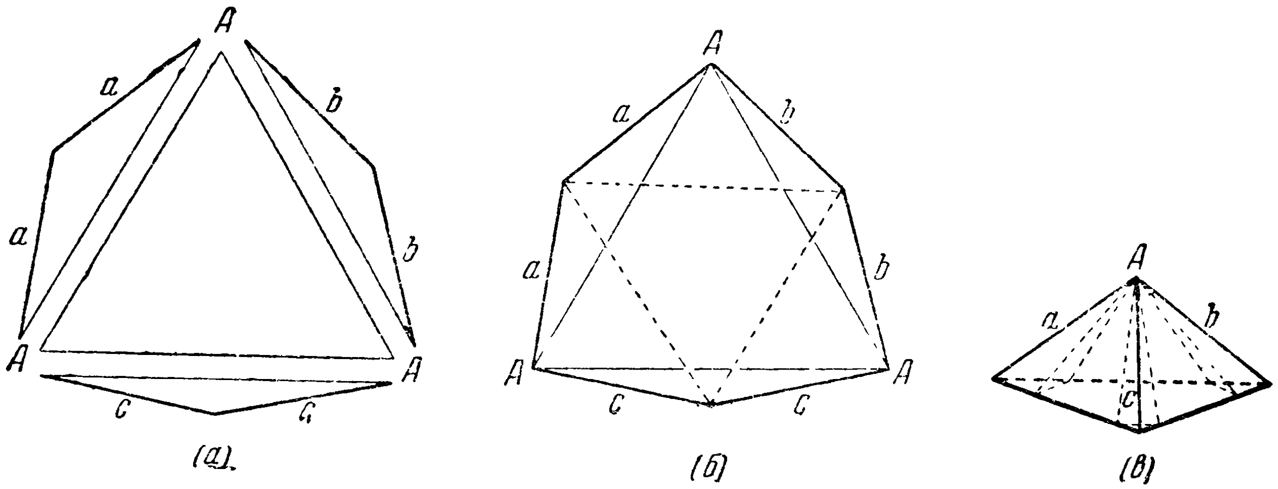
Из данного определения склеивания многогранника из развёртки ясно, что многоугольники и рёбра развёртки могут вовсе не соответствовать граням и рёбрам многогранника. На черт. 37 представлены две развёртки правильного тетраэдра в виде параллелограммов, разбитых на треугольники. Склеиваемые вершины обозначены одинаковыми буквами. В первом случае треугольники развёртки соответствуют граням тетраэдра, а во втором — нет. Обе развёртки имеют одинаковое строение **). Вторая получается из первой, если приложить первый треугольник к четвёртому и произвести разрезы треугольников 2, 3 по линии BA, а треугольников 4, 1 по линии DC и из получившихся кусков треугольников склеить новые треугольники. Применяя подобную операцию ко второй развёртке и т. д., получим бесконечное число

*) Ту же операцию можно описать несколько иначе. Каждый «многоугольник» Q' состоит, вообще говоря, из нескольких многоугольных кусков граней многогранника P. Разворачивание на плоскость состоит в том, что эти куски раскладываются на плоскости и прикладываются друг к другу так же, как они прилегали на многограннике. Условие, что Q' можно развернуть на плоскость, означает, что такое прикладывание его кусков действительно можно осуществить на плоскости.

**) Развёртки имеют одинаковое строение, если их многоугольники и рёбра можно сопоставить так, что соответственные многоугольники склеиваются по соответственным рёбрам.

различных развёрток правильного тетраэдра, которые, однако, все имеют одинаковое строение.

На черт. 38,*а* изображена развёртка тетраэдра; стороны, помеченные одинаково, подлежат склеиванию; на черт. 38,*б* пунктиром указано, по каким линиям пойдут рёбра тетраэдра; на черт. 38,*в* изображён уже склеенный тетраэдр с указанием линий, по которым его нужно разрезать, чтобы обратно получить развёртку черт. 38,*а*; кроме как по пунктирным линиям, его нужно разрезать по рёбрам, сходящимся в вершине A. Данная развёртка любопытна в том отношении, что в ней имеют место довольно сложные «самосклеивания» треугольников.



Черт. 38.

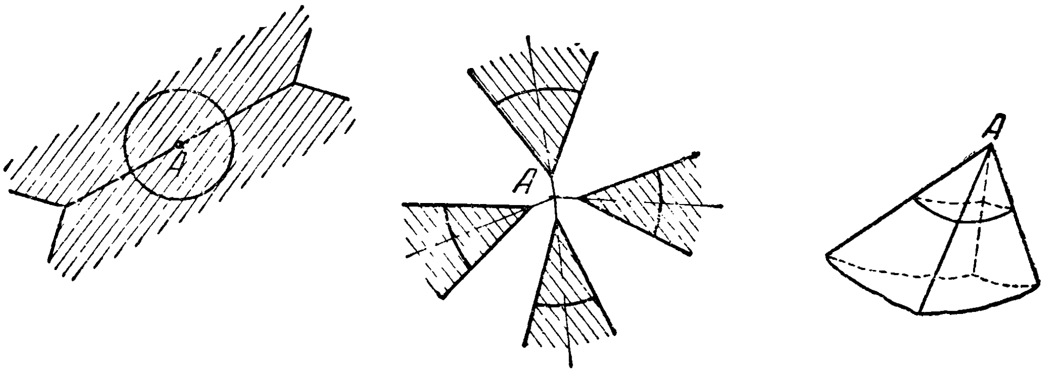
Задача, которую мы будем решать, состоит в том, чтобы узнать, во-первых, в какой мере выпуклый многогранник определяется своей развёрткой и, во-вторых, каковы те необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять заранее заданная развёртка для того, чтобы из неё можно было склеить выпуклый многогранник.

Вспоминая сказанное в предисловии, можно сказать, что первой задачей является установить теоремы единственности выпуклого многогранника с данной развёрткой. Эта задача решается в главе III и отчасти в § 2 главы V.

Одно из необходимых условий, которое нужно наложить на развёртку, мы установим в следующем пункте, другие же будут выяснены в следующем параграфе. После этого встанет вопрос о доказательстве достаточности найденных условий, т. е. речь будет идти о доказательстве теорем существования выпуклого многогранника с данной развёрткой. Решению этого вопроса посвящены глава IV и § 1 главы V. Формулировки основных результатов глав III, IV, V даются в § 3 главы II.

4. Кривизна. *Полным углом* вокруг внутренней, т. е. не лежащей на границе, точки развёртки мы называем сумму сходящихся в ней углов. Если эта точка лежит внутри ребра, по которому смежны две грани, то полный угол вокруг неё слагается из двух развёрнутых углов и потому равен 2π. Полный угол вокруг точки, лежащей внутри многоугольника развёртки, мы, естественно, полагаем равным 2π. (Аналогично определяется полный угол при точке на границе развёртки; он может не равняться π, только если точка является граничной вершиной.)

Если на многоугольниках, сходящихся в точке A, построить круговые секторы малого радиуса r, то в сумме они образуют окрестность точки A, и если полный угол вокруг точки A есть θ, то длина окружности этой окрестности будет θr (черт. 39). Если θ равно 2π, то такая окрестность налагается на плоский круг, и потому точка с полным углом 2π в смысле внутренней метрики ничем не отличается от точки внутри грани. Так будет заведомо для точек, лежащих внутри



Черт. 39.

неграничных рёбер. Точки, полный угол вокруг которых не равен 2π, всегда должны быть вершинами развёртки. Их можно назвать *истинными вершинами*.

Разность $2\pi - \theta$, где θ — полный угол вокруг внутренней точки A развёртки, мы называем *кривизной* точки A. Так как θ может быть отлично от 2π только в вершинах, то имеется лишь конечное число точек с кривизной, отличной от нуля. Поскольку углы определяются внутренней метрикой, кривизна также относится к понятиям внутренней геометрии.

Кривизной любой части развёртки мы называем сумму кривизн заключающихся в ней истинных вершин.

Если кривизна во всех точках развёртки $\geqslant 0$, то мы говорим о *развёртке* или *многогранной метрике положительной кривизны*.

У выпуклого многогранного угла сумма плоских углов всегда меньше 2π, так что кривизна его положительна. Поэтому выпуклый многогранник всегда имеет положительную кривизну. Таким образом, мы нашли одно *условие, необходимое для того, чтобы из данной развёртки можно было склеить выпуклый многогранник: суммы углов, сходящихся в каждой вершине развёртки, не должны превосходить* 2π.

(Так как выпуклый многогранник с границей есть часть полного выпуклого многогранника, то сумма углов, сходящихся в каждой его граничной вершине, а следовательно, и в каждой граничной вершине его развёртки, также не должна превосходить 2π.)

5. Задачи. 1. Доказать, что: а) кратчайшая на многограннике при переходе через ребро образует с ним равные (не смежные) углы; б) при последовательном развёртывании на плоскость тех граней, по которым проходит кратчайшая, она превращается в прямолинейный отрезок; в) кратчайшая на выпуклом многограннике не может проходить через вершину.

2. Рассмотреть кратчайшие на боковых поверхностях призмы и пирамид.

3. Указать примеры, когда две точки на многограннике соединяются не одной, а несколькими кратчайшими.

4. Указать примеры кратчайших на невыпуклом многограннике, проходящих через его вершины.

5. Какими свойствами характеризуется произвольная развёртка боковой поверхности призмы (пирамиды), состоящая из одного многоугольника?

6. Доказать, что всякий замкнутый выпуклый многогранник допускает развёртку, состоящую из одного звёздчатого многоугольника подобно естественной развёртке пирамиды. («Острия» звезды должны сходиться в одной вершине.)

7. Доказать, что всякий данный (конечный) многогранник допускает не более чем конечное число развёрток, вершины которых соответствуют только его вершинам, а рёбра имеют длины не больше данной.

§ 7. Топологические свойства многогранников и развёрток

1. Топология изучает свойства фигур, сохраняющиеся при любых взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях. Если точки двух фигур могут быть поставлены во взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие*), то фигуры называются *гомеоморфными*, а самое соответствие называется *гомеоморфизмом* или *топологическим отображением* одной фигуры на другую. Очевидно, две фигуры, гомеоморфные одной и той же третьей, гомеоморфны друг другу: достаточно сопоставить те их точки, которые отвечают одной и той же точке третьей фигуры.

Топологическим называется такое свойство фигуры, которое сохраняется при любых её топологических отображениях; это есть такое свойство, которое, принадлежа данной фигуре, принадлежит и всем гомеоморфным ей фигурам.

В этом параграфе мы установим основные топологические свойства выпуклых многогранников и их развёрток.

2. Теорема 1. *Замкнутый выпуклый многогранник гомеоморфен сфере.*

Возьмём внутри замкнутого выпуклого многогранника P точку O и опишем вокруг неё сферу S. Проводя из O лучи во всех направлениях, сопоставим друг другу точки многогранника P и сферы S, лежащие на одних и тех же лучах. Каждый луч пересекает сферу и

---

*) Соответствие φ между точками X одной фигуры и соответствующими точками $Y=\varphi(X)$ другой называется взаимно однозначным, если каждой точке X отвечает только одна точка Y, и обратно. Соответствие φ непрерывно, если из того, что точки X_n сходятся к X, следует, что соответствующие точки Y_n сходятся к точке Y, соответствующей X. Оно взаимно непрерывно, если то же верно для обратного соответствия φ^{-1} точек X точкам Y.

многогранник в одной точке, а потому установленное соответствие будет взаимно однозначным.

Оно будет также взаимно непрерывным. Действительно, при непрерывном движении точки на многограннике идущий в неё луч будет вращаться вокруг точки O непрерывно, а потому и соответствующая точка на сфере будет двигаться по ней непрерывно. Обратно, если точка сферы движется непрерывно, то идущий через неё луч также вращается непрерывно, а потому точка X, в которой он пересекает многогранник P, будет двигаться по нему непрерывно*). Следовательно, как прямое соответствие точек многогранника точкам сферы, так и обратное соответствие непрерывны, что и означает взаимную непрерывность рассматриваемого соответствия.

Всякий конечный выпуклый многогранник с границей есть часть замкнутого, а потому, проектируя его таким же способом на сферу, убедимся, что он гомеоморфен некоторому сферическому многоугольнику. Если граница многогранника состоит из единственной замкнутой ломаной, то этот многоугольник будет тоже ограничен одной замкнутой сферической ломаной. Такой многоугольник гомеоморфен кругу. (Это утверждение мы оставляем без доказательства, считая его непосредственно очевидным. Строгое доказательство по идее не представляет труда, но несколько кропотливо.)

Если граница многогранника состоит из нескольких замкнутых ломаных, то так же устроен соответствующий сферический многоугольник. Он гомеоморфен кругу с соответствующим числом круглых дыр. (Это утверждение мы не доказываем, поскольку оно не будет использовано.)

3. Т е о р е м а 2. *Бесконечный выпуклый многогранник, предельный угол которого не вырождается ни в плоский угол, ни в полупрямую, можно спроектировать на плоскость так, что каждой точке плоскости будет отвечать одна и только одна точка многогранника. Тем самым такой многогранник гомеоморфен плоскости.*

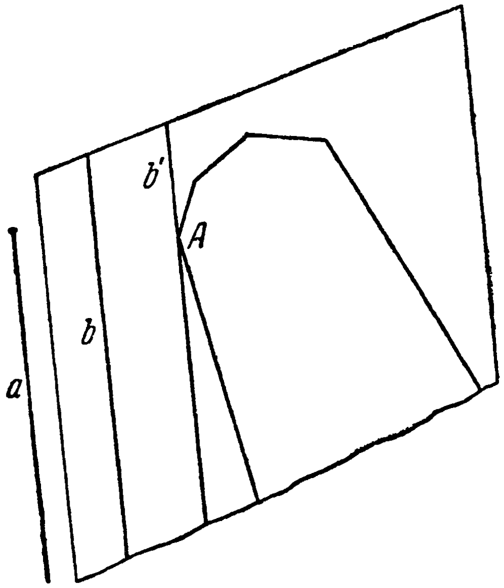
Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть предельный угол V бесконечного многогранника не вырождается. Тогда внутри него можно провести полупрямую a. Если точка A лежит на многограннике, то её можно принять за вершину угла V, и тогда весь угол V лежит в многограннике (см. теорему 1 § 4). Поэтому полупрямая, идущая из точки A в направлении a, содержится внутри многогранника.

Отсюда следует, что всякая прямая b, параллельная a, может пересекать многогранник только в одной точке (потому что начинающаяся от точки пересечения полупрямая, идущая в направлении a, уже оказывается вся внутри многогранника).

*) Это совершенно очевидно, если точка X движется по одной грани, а при переходе через рёбра и вершины непрерывность не нарушается, поскольку всякий луч, близкий к лучу, пересекающему многогранник в точке A на ребре или в вершине A, сам пересекает многогранник в точке X, близкой к точке A.

Докажем, что вместе с тем всякая прямая, параллельная a, пересекает многогранник. Допустим противное и пусть прямая b, параллельная a, многогранник не пересекает. Внутри него она не может лежать, так как многогранник не содержит никакой прямой. Следовательно, она лежит вне многогранника.

Пересечём многогранник плоскостью, проходящей через какую-либо его внутреннюю точку и прямую b. В сечении получим выпуклый многоугольник, лежащий по одну сторону от прямой b. Непосредственно очевидно, что такой многоугольник имеет опорную прямую b', параллельную b (черт. 40). Но часть этой прямой, идущая от точки касания A в направлении полупрямой a, по доказанному должна лежать внутри многогранника и, следовательно, не может быть частью опорной прямой b'. Полученное противоречие показывает, что всякая прямая b, параллельная a, должна пересекать многогранник.



Черт. 40.

Итак, всякая такая прямая пересекает многогранник и притом только в одной точке. Поэтому, проектируя многогранник на плоскость такими прямыми, получим проекцию, существование которой утверждает теорема, что и требовалось доказать.

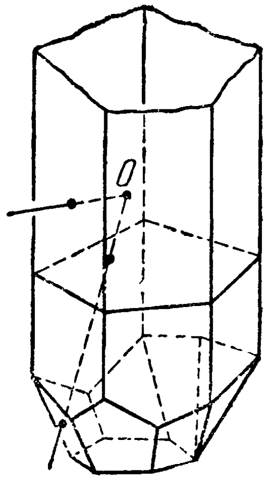
Многогранник с предельным углом, вырождающимся в плоский угол или в полупрямую, не может быть спроектирован на всю плоскость и никакая его проекция не однозначна (т. е. в некоторые точки плоскости проектируется несколько или даже бесконечно много точек многогранника). Если направление проектирования параллельно полупрямой, идущей в предельном угле, то некоторые проектирующие прямые будут скользить по бесконечным граням, другие же вовсе не будут пересекать многогранник.

Нетрудно убедиться, что в случае плоского предельного угла V многогранник можно спроектировать в полосу между парой параллельных прямых; эти прямые будут проекциями бесконечных граней, параллельных плоскости угла V. В случае же вырождения угла V в полупрямую a проекция вдоль неё представляет выпуклый многоугольник, стороны которого будут проекциями бесконечных граней.

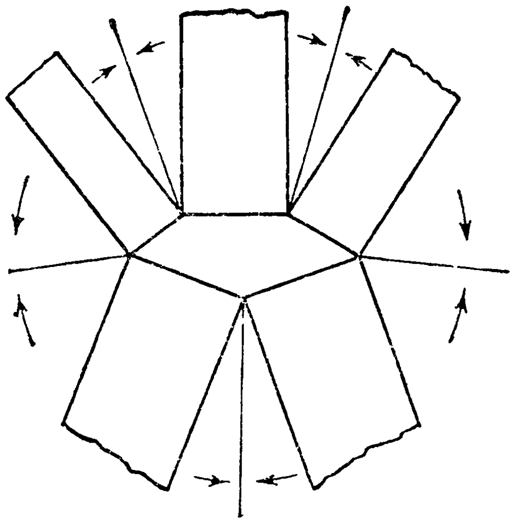
Во всяком случае, проектирование не даёт здесь взаимно однозначного отображения на всю плоскость, и потому необходимо другое построение.

Рассмотрим многогранник P, предельный угол которого сводится к полупрямой. Все его бесконечные рёбра параллельны. Пересекая их перпендикулярной плоскостью, отсечём от многогранника бесконечную в одну сторону призму P' (к которой мы присоединим её основание). Возьмём внутри этой призмы точку O. Всякий луч, идущий из O и пересекающий P', пересечёт P, и обратно (черт. 41). В результате, сопоставляя точки на одних и тех же лучах, получим взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие точек на P и P' (точки, общие у P и P', соответствуют сами себе).

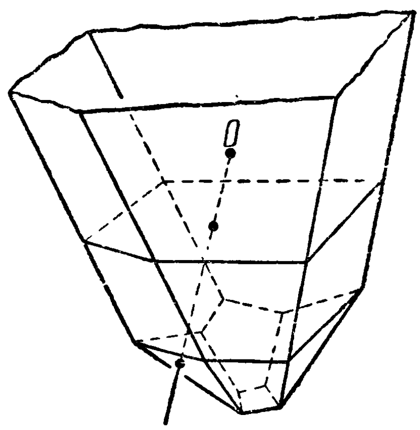
Но призму P', очевидно, можно отобразить на плоскость взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Достаточно наложить её боковые грани на плоскость основания и растянуть их так, чтобы они покрыли всю плоскость (черт. 42).



Черт. 41.



Черт. 42.



Черт. 43.

Этим доказано, что многогранник P гомеоморфен плоскости.

Рассмотрим теперь многогранник P, предельный угол которого плоский, но не сводится к полупрямой. У такого многогранника имеются две бесконечные грани, параллельные плоскости угла V, с бесконечными рёбрами, параллельными рёбрам угла V; у всех других его бесконечных граней рёбра попарно параллельны. Пересечём многогранник P плоскостью, отсекающей все его конечные грани (черт. 43). В результате получим многогранник P' с одной конечной гранью, содержащийся в P и с бесконечными гранями, налегающими на грани многогранника P.

Возьмём внутри него точку O. Легко убедиться, что всякий луч, идущий из O и пересекающий один многогранник, пересекает и другой. Таким образом, многогранник P отображается на P' взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Далее, аналогично предыдущему, легко видеть, что многогранник P' можно взаимно однозначно и взаимно непрерывно отобразить на плоскость. Этим доказывается, что многогранник P также гомеоморфен плоскости. (Этот вывод применим ко всякому бесконечному многограннику.)

Наши выводы привели к следующей теореме:

Теорема 3. *Бесконечный выпуклый многогранник гомеоморфен плоскости.*

4. Операция склеивания многогранника из развёртки представляет собой такое отображение развёртки на многогранник, которое, как ясно из определения этого отображения (n° 3 § 6) взаимно однозначно и взаимно непрерывно при том непременном условии, что точки развёртки, отождествляемые в силу «закона склеивания», считаются за одну точку развёртки. Поэтому развёртка, из которой можно склеить данный многогранник, необходимо ему гомеоморфна.

Говоря это, мы здесь и всюду дальше имеем в виду, что склеиваемые точки считаются за одну.

На основании этого замечания из теорем 1 и 3 следует

Теорема 4. *Развёртка замкнутого выпуклого многогранника гомеоморфна сфере, развёртка же бесконечного выпуклого многогранника гомеоморфна плоскости.*

(Можно также заключить, что развёртка конечного многогранника с границей гомеоморфна сферическому многоугольнику, а развёртка бесконечного многогранника с границей гомеоморфна бесконечному многоугольнику.)

Однако это условие, налагаемое на развёртку, неудобно в том отношении, что заранее не видно простого способа проверить для данной развёртки, гомеоморфна она сфере или нет. Поэтому мы заменим это условие другим, которое для любой развёртки проверяется совсем просто. Условие это даётся теоремой Эйлера, которую мы и докажем.

5. Будем называть *сетью* любую совокупность конечного числа простых (т. е. не имеющих самопересечений), незамкнутых ломаных, лежащих на многограннике и не имеющих общих точек, кроме концов. Каждую ломаную назовём «ребром» сети, концы ломаных назовём «вершинами» сети. Вообще говоря, такая сеть будет разбивать многогранник на некоторые области *). Если она его вовсе не разбивает, то считаем, что имеется всего одна область. Простейший пример сети даёт сеть рёбер самого многогранника; областями здесь будут его грани.

В общем случае сеть может слагаться из нескольких частей, не имеющих попарно общих точек. Каждую такую часть, не распадающуюся далее, мы называем связной компонентой сети.

Теорема 5. (Обобщённая теорема Эйлера.) *Если дана сеть на замкнутом выпуклом многограннике и e — число её вершин, k — число рёбер, l — число связных компонент, а f — число областей, на которые сеть разбивает многогранник, то*

$$e - k + f = l + 1. \tag{1}$$

В частности, если сеть связна (т. е. состоит из одной компоненты), то $e - k + f = 2$.

*) Одну область будут образовывать все точки, которые можно соединить друг с другом ломаными, не пересекая сети.

Доказательство основано на следующей непосредственно очевидной теореме, известной под наименованием теоремы Жордана: *всякая замкнутая ломаная на замкнутом выпуклом многограннике разбивает его.* При всей очевидности этой теоремы строгое доказательство её оказывается не слишком простым; оно будет дано дополнительно в последнем пункте настоящего параграфа. А сейчас, приняв теорему Жордана на веру, докажем обобщённую теорему Эйлера.

Для «пустой сети», т. е. когда никакой сети на многограннике нет, теорема верна, потому что в этом случае $e=k=l=0$, а область одна, так что $f=1$ и равенство (1) выполняется. Поэтому, если мы докажем, что, не меняя величины $e-k+f-l$, можно, устраняя рёбра по одному, уничтожить всю сеть, то теорема будет доказана.

Рассмотрим следующие три операции устранения рёбер сети.

1) Устраняется ребро с одним свободным концом. Тогда числа рёбер k и вершин e уменьшаются на единицу, а число областей f и число компонент l, очевидно, не меняются. Поэтому величина $e-k+f-l$ остаётся неизменной.

2) Устраняется ребро, являющееся общей границей (или частью границы) двух областей. Тогда эти области сливаются и число их f уменьшается на единицу. Число рёбер k также уменьшается на единицу. Ребро, разделяющее области, не имеет свободных концов, а потому они остаются, так что число e не изменяется. Число компонент l также остаётся неизменным, потому что область ограничена замкнутой ломаной, которая при изъятии одного ребра не может распасться на несвязанные части.

Таким образом, величина $e-k+f-l$ не меняется.

3) Устраняется ребро с двумя свободными концами. Такое ребро представляет само по себе связную компоненту сети, а потому число l уменьшается на единицу. Число рёбер k также убывает на единицу. Число вершин e уменьшается на два, число же областей f, очевидно, не меняется. Поэтому величина $e-k+f-l$ снова остаётся неизменной.

Пусть теперь нам дана любая сеть. Пользуясь первой и третьей операциями, устраняем все рёбра со свободными концами. Если после этого ещё остались рёбра, то они образуют замкнутые ломаные и потому (в силу теоремы Жордана!) разбивают многогранник на области. В таком случае применима вторая операция, которая рано или поздно приводит, очевидно, к появлению свободных концов. Тогда опять устраняем рёбра со свободными концами и т. д. до тех пор, пока не уничтожим всю сеть. При всех операциях число $e-k+$ $+f-l$ не меняется, а в отсутствии сети оно равно 1. Поэтому и для исходной сети $e-k+f-l=1$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь R — развёртка, из которой можно склеить замкнутый выпуклый многогранник P. Согласно определению это означает, что многогранник P можно разбить на области, соответствующие многоугольникам развёртки так, что общие отрезки границ областей отвечают склеиваемым сторонам соответствующих многоугольников. Эти отрезки границ представляют ломаные, образующие сеть на многограннике P. Числа вершин e, рёбер k и областей f этой сети равны, соответственно, числам вершин, рёбер и многоугольников развёртки (при том принятом нами условии, что склеиваемые стороны и вершины считаются за одно ребро и за одну вершину).

Мы условились также предполагать, что развёртка состоит из простых многоугольников (т. е. многоугольников, ограниченных каждый одной замкнутой ломаной). Докажем, что в силу этого условия сеть будет связной. Пусть A и B — какие-либо вершины развёртки (соответственно сети). Если они принадлежат одному многоугольнику, то соединяются ломаной, потому что он простой. Если же они принадлежат разным многоугольникам Q и R, то от Q к R можно перейти, идя по многоугольникам с общими вершинами или сторонами. Поэтому, идя по границам этих многоугольников, мы соединим вершины A и B цепью рёбер. А раз любые две вершины соединяются цепью рёбер, то сеть связна.

Итак, число компонент нашей сети $l=1$, а потому в силу теоремы Эйлера $e-k+f=2$.

Эти рассмотрения привели к следующей теореме:

Теорема 6. *Если из развёртки можно склеить замкнутый выпуклый многогранник, то необходимо число f её многоугольников, число k рёбер и число e вершин связаны соотношением Эйлера $e-k+f=2$.*

Обобщённая теорема Эйлера имеет топологический характер; при топологическом преобразовании ломаные, образующие сеть, могут стать кривыми, но ни число их, ни число вершин, ни число областей не изменятся. Поэтому то же соотношение между ними имеет место для сетей на всякой поверхности, гомеоморфной замкнутому выпуклому многограннику, и тем самым на всякой поверхности, гомеоморфной сфере. В связи с этим и теорему 6 можно высказать в топологической форме: *для всякой развёртки, гомеоморфной сфере, $e-k+f=2$. При этом сами многоугольники развёртки можно подвергать любым топологическим преобразованиям, так что их можно мыслить как «кривые многоугольники».*

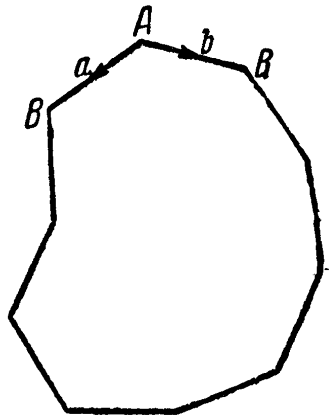
6 *). Теорема 7. (Обратная теорема Эйлера.) *Если развёртка без границы, составленная из конечных многоугольников, удовлетворяет условию Эйлера $e-k+f=2$, то она гомеоморфна сфере.*

В доказательстве мы будем допускать топологические преобразования многоугольников, так что ничто, кроме числа их сторон и правила склеивания, не будет играть роли.

---

*) Все дальнейшие выводы пп. 6—8 имеют значение только для гл. IV.

Если развёртка состоит более чем из одного многоугольника, то, «приклеивая» к одному из них другой, к ним третий и т. д., получим развёртку, состоящую из одного многоугольника. При этом склеивание производим каждый раз по одной паре сторон, подлежащих склеиванию, как указано в развёртке. Поэтому при каждом склеивании число многоугольников и число рёбер уменьшаются на 1, а число вершин остаётся прежним, так что величина $e-k+f$ не меняется и остаётся равной 2. В полученной развёртке $f=1$ и потому $e=k+1$.

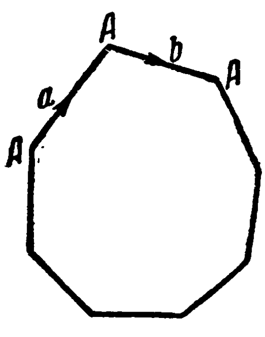


Черт. 44.

Единственный многоугольник полученной развёртки имеет $2k$ сторон, потому что стороны склеиваются попарно и каждая пара их даёт одно ребро. Число же вершин многоугольника — такое же, как число сторон, т. е. тоже $2k$. (Не путать вершины многоугольника с вершинами развёртки! Подлежащие склеиванию вершины многоугольника считаются за одну вершину развёртки.)

Покажем, что у нашего многоугольника имеется пара подлежащих склеиванию сторон a, b с общим концом, причём при склеивании a с b этот общий конец соответствует сам себе и даёт только одну вершину развёртки. (Если отметить на этих сторонах направления, совпадающие при склеивании, то они будут противоположными, черт. 44.)

Действительно, если бы такой пары склеиваемых сторон не было, то у каждой пары склеиваемых сторон никакой конец не соответствовал бы сам себе (эти стороны либо несоседние, либо соседние, но одинаково направлены, как на черт. 45 *)). Поэтому все концы сторон, т. е. все $2k$ вершин многоугольника, склеивались бы по крайней мере попарно, давая тем самым не более чем k вершин развёртки. Следовательно, число вершин развёртки $e \leqslant k$. Между тем мы имеем $e=k+1$. Поэтому должна иметься пара соседних склеиваемых и противоположно направленных сторон.



Черт. 45.

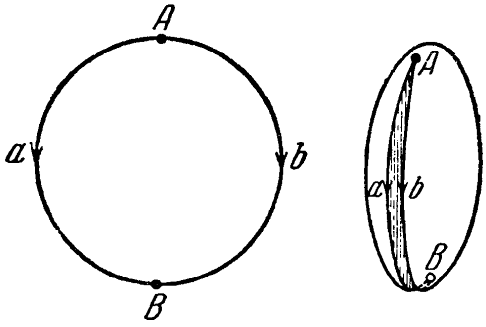
Осуществим склеивание двух таких сторон a, b (это возможно, так как мы допускаем любые топологические деформации многоугольников). Получим новый многоугольник с меньшим числом сторон. Для этого многоугольника, очевидно, снова $e'=k'+1$ и к нему приложимы те же рассуждения. Повторяя эту операцию, мы придём, наконец, к «многоугольнику», имеющему только две стороны a, b (черт. 46). Непосредственно очевидно, что склеивание этих сторон

*) Такое склеивание наглядно кажется невозможным, но нужно помнить, что склеивания заданы заранее и потому такие склеивания не могут считаться заранее исключёнными.

превращает такой многоугольник в поверхность, гомеоморфную сфере (черт. 46); это легко представить как склеивание краёв разреза сферы вдоль некоторой дуги. Теорема таким образом доказана.

Соединяя её с теоремой Эйлера в её топологической форме, высказанной в конце предыдущего пункта, приходим к следующей теореме:

Для того чтобы развёртка без границы, составленная из конечных многоугольников, была гомеоморфна сфере, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Эйлера $e-k+f=2$.



Черт. 46.

Это условие, следовательно, является характеристическим для закона склеивания поверхности типа сферы из простых кусков.

7. Развёртки с границей. Теорема 7 может быть дополнена следующим утверждением: *для всякой развёртки без границы, составленной из конечных многоугольников, число Эйлера* $e-k+f$ *не может быть больше* 2.

Если допустить $e-k+f>2$, то, повторяя рассуждение, проведённое вначале доказательства теоремы 7, мы придём к развёртке из одного многоугольника, так что для неё будет $f=1$ и $e>k+1$. Продолжая это рассуждение, мы найдём пару соседних сторон a, b, склеиваемых в противоположном направлении (черт. 44). Склеивая их и повторяя то же рассуждение, придём, наконец, к многоугольнику с двумя сторонами, склеиваемыми в одно ребро, и двумя вершинами, т. е. к развёртке с $f=1$, $k=1$, $e=2$. Для неё $e-k+f=2$, а так как при всех операциях число Эйлера не менялось, то и вначале оно было равно 2, вопреки предположению.

Тот же результат верен и для развёрток с границей. В общем случае можно высказать такую теорему:

Теорема 8. *Для всякой развёртки, состоящей из конечных многоугольников,* $e-k+f\leqslant 2-h$, *где* e, k, f *имеют обычный смысл, а* h *есть число замкнутых ломаных, образующих границу развёртки. При этом, если* $e-k+f=2-h$, *то развёртка гомеоморфна сферическому многоугольнику, ограниченному* h *ломаными; и обратно, для всякой такой развёртки* $e-k+f=2-h$.

В частности, для развёртки без границы $h=0$, и потому здесь заключаются все предыдущие результаты *).

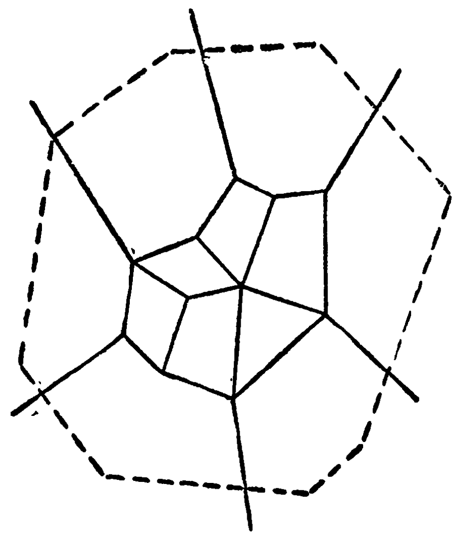
*) То, что граница конечной развёртки слагается из замкнутых ломаных, понимается в том смысле, что, идя от одного граничного ребра к следующему, имеющему с ним общую вершину (она может быть общей в силу склеивания смежных с этими рёбрами сторон многоугольников развёртки), и т. д., получим замкнутую ломаную. Это очевидно, поскольку число рёбер конечно и их ряд должен замкнуться. Если таких замкнутых ломаных несколько, то они не имеют общих точек, потому что в одной граничной вершине сходятся только два граничных ребра, и потому цепь последовательно смежных граничных рёбер определяется любым из них однозначно.

Доказательство. Для развёрток без границы ($h=0$) данная теорема уже содержится в доказанных утверждениях. Рассмотрим развёртку с границей. К любой ограничивающей её замкнутой ломаной можно подклеить простой многоугольник с тем же числом сторон. Получим новую развёртку, у которой числа вершин и рёбер — прежние, число многоугольников увеличилось на один, а число ограничивающих ломаных стало меньше на одну, т. е. для новой развёртки число $e-k+f+h$ осталось прежним. Но, заклеивая таким путём границу, мы придём к развёртке без границы, а для неё $e-k+f+h \leqslant 2$ ($h=0$). Так как это число не меняется, то то же верно для исходной развёртки.

Если для исходной развёртки было $e-k+f=2-h$, то путём заклеивания границ мы придём к развёртке без границ и с $e-k+f=2$. Такая развёртка по теореме 7 гомеоморфна сфере, а потому исходная развёртка гомеоморфна сферическому многоугольнику. Обратно, всякая развёртка, гомеоморфная сферическому многоугольнику, доклеивается до развёртки, гомеоморфной сфере, а потому для неё $e-k+f=2-h$.

Теорема доказана полностью.

8. Бесконечные развёртки. Для бесконечных развёрток могут быть получены аналогичные зависимости между их топологическим строением и числом Эйлера. Так как бесконечные выпуклые многогранники, а значит, и их развёртки гомеоморфны плоскости, то мы рассмотрим соотношение Эйлера для таких развёрток.



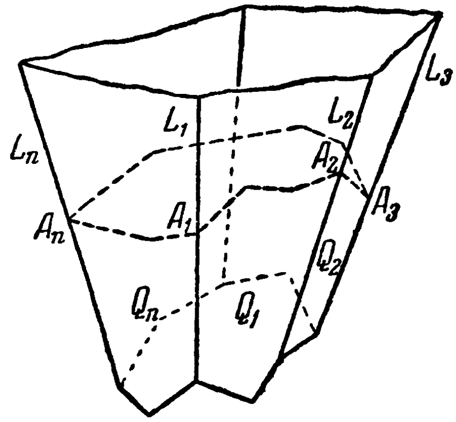
Черт. 47.

Теорема 9. *Для того чтобы развёртка без границы, содержащая бесконечные многоугольники, была гомеоморфна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы её число Эйлера равнялось единице*: $e-k+f=1$.

Необходимость. Отобразим развёртку на плоскость и вырежем из неё конечную часть, ограниченную одной замкнутой ломаной. Это мы сделаем таким образом, чтобы в этой конечной части содержались все вершины, все конечные рёбра и многоугольники, а от каждого бесконечного ребра имелось бы по одному отрезку и от каждого бесконечного многоугольника — по одному конечному куску (черт. 47). В результате получим конечную развёртку с тем же числом многоугольников f, но к числу вершин e и числу рёбер k прибавятся число вершин граничной ломаной и число её сторон. Но число вершин и сторон этой ломаной — одно и то же, а потому для нашей конечной развёртки число Эйлера будет то же самое $e-k+f$, что и для исходной.

Наша конечная развёртка ограничена одной ломаной и гомеоморфна многоугольнику. Поэтому согласно теореме 8 $e-k+f=2-1=1$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть дана бесконечная развёртка без границы с числом Эйлера $e-k+f=1$. Пусть Q_1 — бесконечный многоугольник развёртки, Q_2 — бесконечный многоугольник, склеиваемый с ним по бесконечной стороне L_1, и т. д. Так как число всех многоугольников конечно и стороны склеиваются попарно, то полученная последовательность должна замкнуться так, что последний её многоугольник Q_n склеится с Q_1 по бесконечной стороне L_n. В результате получается циклическая последовательность бесконечных многоугольников $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, смежных по бесконечным сторонам $L_1, L_2, \ldots, L_n$. В частности, многоугольник Q_1 может склеиваться сам с собою, и тогда последовательность состоит из него одного.



Черт. 48.

Если в развёртке остаются ещё бесконечные многоугольники, то, взяв любой из них, точно так же построим, исходя из него, другую циклическую последовательность. Повторяя это построение, разобьём совокупность всех бесконечных многоугольников развёртки на такие последовательности: $R^1, R^2, \ldots, R^m$. Каждая из них представляет как бы один бесконечный конец развёртки.

Возьмём на рёбрах $L_1, L_2, \ldots, L_n$, по которым смежны многоугольники первой последовательности R^1, точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и соединим их последовательно ломаными в многоугольниках $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. В результате получим замкнутую ломаную M^1, которая отрежет бесконечные части этих многоугольников (черт. 48; чертёж имеет условный характер, так как склеивание производится только абстрактно).

Проделывая ту же операцию со всеми последовательностями R^i, получим конечную развёртку с тем же числом многоугольников f. Число её вершин e увеличится на число вершин ломаных M^i, а число рёбер k — на число сторон ломаных M^i. Но у каждой замкнутой ломаной число вершин равно числу сторон, а потому число Эйлера полученной конечной развёртки будет то же, что у исходной: $e-k+f=1$.

По теореме 8 для развёртки с границей это возможно в том и только в том случае, если развёртка гомеоморфна обыкновенному многоугольнику, ограниченному одной замкнутой ломаной. Поэтому имеется только одна ломаная M и соответственно *лишь одна последовательность бесконечных многоугольников исходной развёртки.*

Отобразим теперь нашу конечную развёртку в выпуклый многоугольник. Из вершин его проведём полупрямые, разбивающие внешнюю область на бесконечные многоугольники. На каждой из них можно отобразить бесконечную часть соответствующего многоугольника исходной развёртки, отрезанную при построении ломаной M. В результате получится отображение всей исходной развёртки на плоскость. Тем самым она геоморфна плоскости, что и требовалось доказать.

Из только что проведённого рассмотрения видно, что вырезанная часть развёртки имеет число Эйлера $e-k+f=1$ тогда и только тогда, когда она ограничена одной ломаной M. Это соответствует тому, что исходная бесконечная развёртка имеет только один «бесконечный конец». По доказанному, равенство $e-k+f=1$ необходимо и достаточно для того, чтобы бесконечная развёртка была гомеоморфна плоскости. Поэтому наличие только одного бесконечного конца также необходимо и достаточно для этого, т. е. мы получаем следующую теорему:

Теорема 10. *Для того чтобы развёртка без границы была гомеоморфна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она имела один бесконечный конец* (*т. е. чтобы она содержала хотя бы один бесконечный многоугольник и чтобы все её бесконечные многоугольники образовывали одну циклическую последовательность при указанном в развёртке склеивании их по бесконечным сторонам*.

Заметим, что построение ломаных M^i сводит задачу о бесконечной развёртке с m «бесконечными концами» R^i к задаче о развёртке с m граничными ломаными. Это сразу позволяет получить для бесконечных развёрток теорему, аналогичную теореме 8:

Для всякой развёртки без границы, имеющей бесконечные многоугольники, $e-k+f\leqslant 2-m$, где m — число «концов»; при этом $e-k+f=1$ тогда и только тогда, когда развёртка гомеоморфна плоскости (*один бесконечный конец**)). Можно, далее, получить общую теорему: *для бесконечных развёрток с границей $e-k+f\leqslant 2-m-h$, где h — число замкнутых или бесконечных ломаных, образующих границу.*

Впрочем, эти результаты нам не понадобятся.

9. Теорема Жордана. Эта теорема утверждает, *что всякая простая замкнутая кривая, лежащая на поверхности, гомеоморфной сфере, разбивает поверхность на две области.*

Мы не будем доказывать эту наглядно очевидную теорему во всей общности. Нам достаточно доказать её лишь для того случая, когда рассматриваемая кривая есть простая замкнутая ломаная на замкнутом выпуклом многограннике.

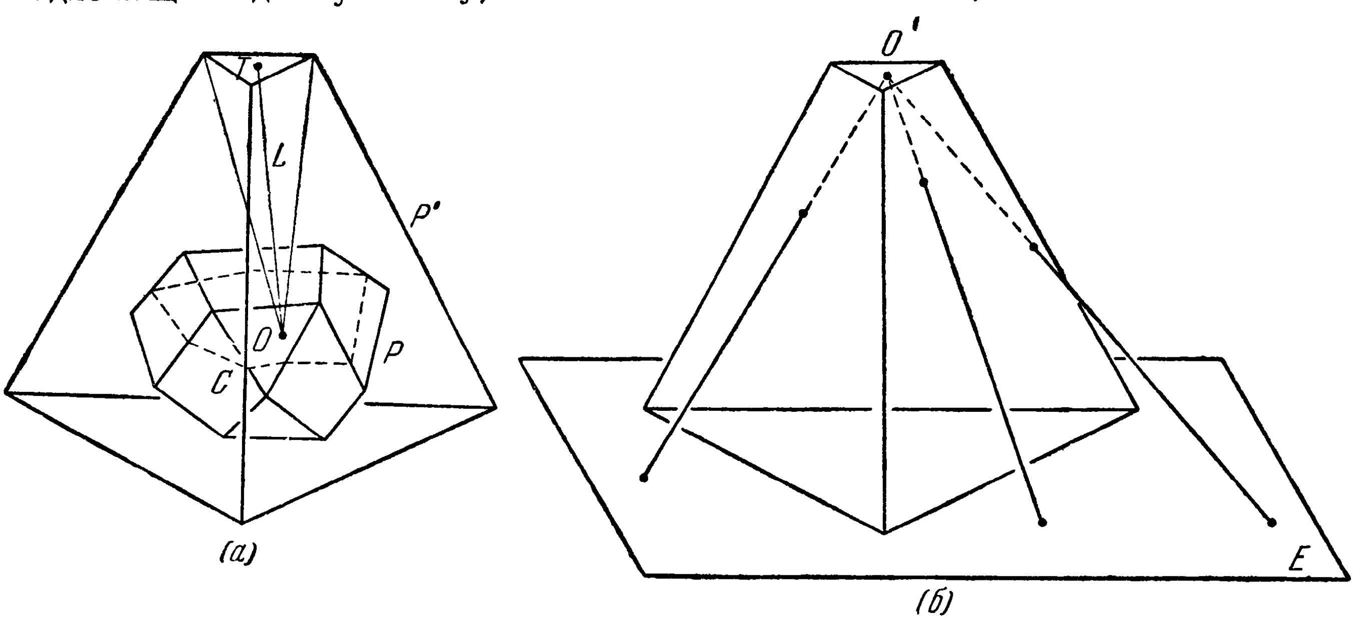
Итак, пусть имеется замкнутый выпуклый многогранник P и на нём замкнутая ломаная C, не имеющая кратных точек. Возьмём внутри многогранника P произвольную точку O и проведём из неё луч L, не пересекающий ломаную C. Тогда очевидно, что «достаточно острая» треугольная пирамида с вершиной O, содержащая внутри кусок луча L, пересекает P, также не задевая C. Взяв эту пирамиду настолько длинной, чтобы её основание T лежало вне P, мы построим усечённую пирамиду P' с основанием T, содержащую внутри себя многогранник P (черт. 49, a).

Спроектируем P на P' из точки O. Тогда ломаная C перейдёт в ломаную C' на P'. При этом в силу нашего построения ломаная C' не будет задевать треугольника T. Очевидно, наша теорема будет доказана, как только мы установим, что C' разбивает на две области многогранник P' с вынутой гранью T (считая при этом, что грань T удалена вместе с её рёбрами).

---

*) Присоединяя к каждому концу одну абстрактную вершину и считая, что в ней сходятся все его бесконечные рёбра, получим абстрактную развёртку без границы с m абстрактными вершинами соответственно m концам. Это замечание даёт также новое доказательство указанного обобщения теоремы 9.

Усечённую пирамиду P' с исключённым основанием T проектируем на плоскость E её второго основания из некоторой точки O', лежащей внутри T (стереографическая проекция, черт. 49, *б*). Так как указанное проектирование, очевидно, устанавливает взаимно однозначное отображение продырявленного многогранника P' на всю плоскость E, то остаётся доказать, что простая замкнутая ломаная C'', в которую проектируется C', разбивает плоскость E на две области. Для этого мы должны указать такое разбиение точек плоскости E (кроме точек ломаной C'') на два класса I и II, что точки, принадлежащие одному классу, всегда соединимы ломаной, не имеющей общих



Черт. 49.

точек с C'', а для любой пары точек из разных классов такой ломаной не существует.

Выберем на плоскости направление, не параллельное ни одной из сторон ломаной C'', и определим классы I и II следующим образом: точка принадлежит классу I, если луч, проведённый из неё в выбранном направлении, пересекает C'' в чётном числе точек (если луч проходит через вершину ломаной C'', то эта вершина считается точкой пересечения лишь при условии, что звенья ломаной C'', сходящиеся в этой вершине, лежат по разные стороны от луча); в противном случае точка принадлежит классу II.

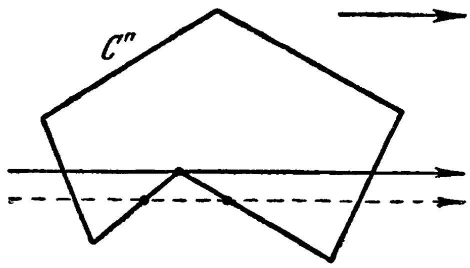
Докажем, что классы I и II обладают требуемым свойством. Прежде всего заметим, что в обоих классах заведомо имеются точки. Чтобы убедиться в этом, достаточно провести через внутреннюю точку m стороны ломаной C' прямую, параллельную данному направлению. Тогда точки этой прямой, лежащие по разные стороны от точки m достаточно близко от неё, принадлежат разным классам.

Пусть теперь две точки p и q соединимы ломаной, не имеющей общих точек с C''. Тогда, двигаясь непрерывно по этой ломаной, мы перейдём от точки p к точке q, ни разу не попав на C''. Но при таком движении точки число пересечений исходящего из неё луча данного направления с ломаной C'' может измениться лишь вследствие того, что луч наталкивается на новые вершины ломаной C'' или перестаёт проходить через прежние вершины. При этом легко проверить, что число точек пересечения изменяется лишь за счёт тех вершин, в которых звенья ломаной лежат по одну сторону от луча, и при прохождении луча через каждую такую вершину число точек пересечения изменяется на ± 2 *) (черт. 50). Таким образом, чётность числа пере-

*) В этом месте мы опираемся на тот факт, что из каждой вершины ломаной C'' исходят ровно два звена, т. е. используем замкнутость этой ломаной.

сечений не меняется, и точки p и q принадлежат одному классу. Тем самым доказано, что точки из разных классов нельзя соединить ломаной, не имеющей общих точек с C''.

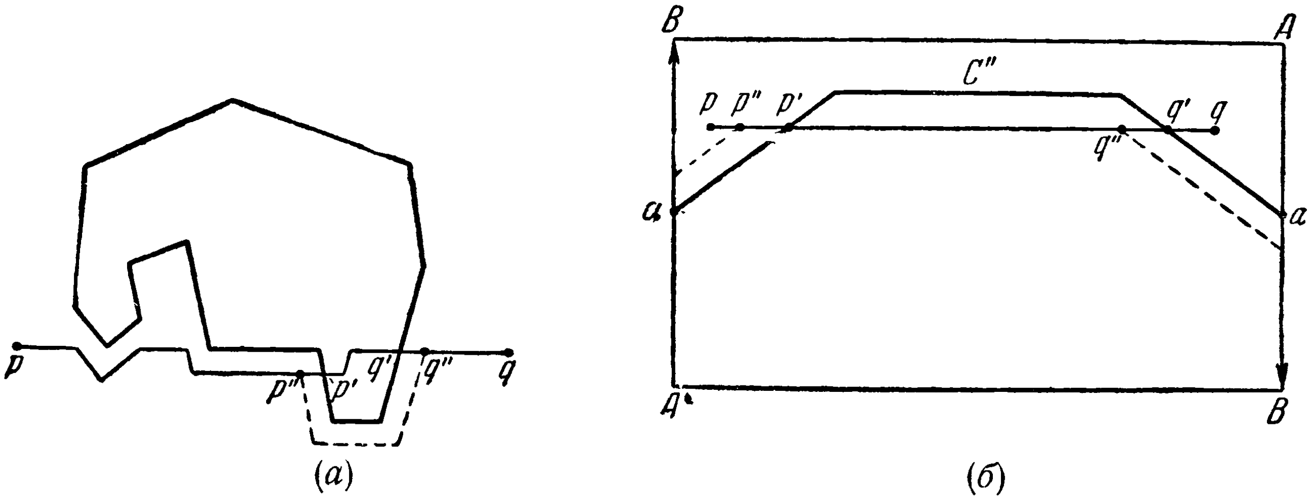
Осталось доказать, что точки из одного класса всегда соединимы ломаной, не пересекающей C''. Пусть точки p и q — из одного класса. Соединим p и q отрезком pq. Если на pq лежат вершины ломаной C'', для которых подходящие к ним звенья ломаной лежат по одну сторону от отрезка pq, то мы заменим достаточно малый участок отрезка pq, проходящий через такую вершину, двумя отрезками, не имеющими общих точек с C''. Аналогичным образом заменим участки отрезка pq, лежащие на звеньях ломаной C''. В результате мы получим ломаную R, соединяющую точки p и q и не имеющую с ломаной C'' никаких общих точек кроме настоящих точек пересечения, когда звено ломаной R, встречаясь со звеном ломаной C'', переходит с одной его стороны на другую (черт. 51, *а*).



Черт. 50.

Пусть p' — первая, а q' — последняя из этих точек пересечения.

Взяв на участке pp' ломаной R точку p'', близкую к p', проведём из неё ломаную R', идущую «вдоль C''» в одном из двух направлений (эта ломаная получается в результате малых параллельных смещений звеньев ломаной C''). Ломаная R' по построению не будет иметь общих точек с C'' и, будучи близкой к C'', пересечётся с R в точке q'', близкой к q'.



Черт. 51.

Рассмотрим ломаную R'', составленную из участка pp'' ломаной R, участка $p''q''$ ломаной R' и участка $q''q$ ломаной R (см. черт. 51, *а*). Эта ломаная могла бы иметь лишь одну точку пересечения с C'', именно, точку q', если бы последняя оказалась внутри отрезка $q''q$ *). Но тогда при переходе от q'' к q число пересечений луча, исходящего из этих точек, с ло-

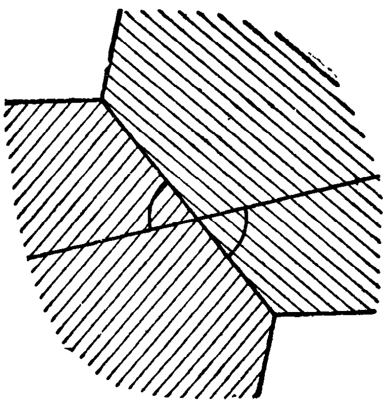
*) Этот случай может показаться невообразимым, однако тот факт, что отрезок $q''q$ не пересекается с ломаной C'', очевиден не в большей степени, чем сама теорема Жордана, выражающая определенное топологическое свойство сферы. Полезно убедиться, что на поверхностях другого топологического строения указанный факт может не иметь места. На черт. 51, *б* изображена развёртка листа Мёбиуса (противоположные стороны прямоугольника склеиваются так, что направления стрелок совпадают), на котором наше построение приводит к тому, что отрезок $q''q$ пересекает замкнутую ломаную C'' в точке q'. (Так как стороны прямоугольника склеиваются так, что стрелки совпадают, то пунктир действительно образует одну линию.)

маной C'' меняло бы свою чётность, и точки q'' и q принадлежали бы разным классам. Но q'' и p принадлежат одному классу, так что тогда также p и q принадлежали бы разным классам, вопреки предположению. Значит, R'' вовсе не имеет общих точек с C'', и теорема доказана.

§ 8. Некоторые теоремы из внутренней геометрии развёрток*)

1. Кратчайшие. Кривая в развёртке R, имеющая наименьшую длину среди всех кривых в той же развёртке с теми же концами, называется *кратчайшей*.

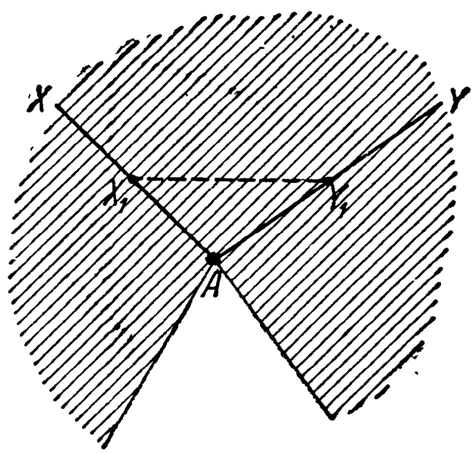
А) *Кратчайшая слагается из конечного числа прямолинейных отрезков в многоугольниках развёртки. Через внутреннюю точку ребра она переходит «без преломления», т. е. углы, образуемые ею с ребром с обеих сторон, равны* (черт. 52). *Через точку с полным углом* $<2\pi$ *кратчайшая проходить не может.* (Через точку с полным углом $>2\pi$ кратчайшая может проходить всегда, как это легко видеть на простейших примерах. Этот случай нас не интересует, потому что мы заняты развёртками положительной кривизны.)



Черт. 52.

Доказательство этих утверждений основано на следующем очевидном замечании: если A — точка кратчайшей, то на достаточно малом отрезке AB кратчайшая сводится к прямолинейному отрезку в многоугольнике развёртки. Это действительно так, потому что окрестность точки развёртки слагается из углов многоугольников или, что ещё проще, представляет часть внутренности многоугольника.

Если бы полный угол вокруг точки A был меньше 2π, то сходящиеся в ней отрезки AX, AY кратчайшей хотя бы с одной стороны образовывали бы угол, меньший π. Тогда точки X_1, Y_1 на этих отрезках, близкие к A, можно было бы соединить с этой стороны отрезком (черт. 53) и тем самым укоротить кратчайшую, что невозможно по самому её определению. Это построение отрезка X_1Y_1 естественно назвать срезанием угла в точке A.



Черт. 53.

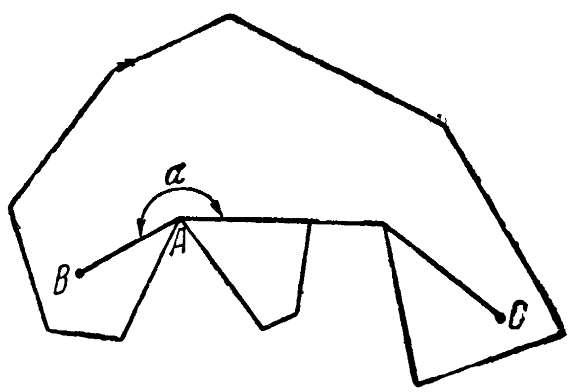
Если бы, переходя через внутреннюю точку A на ребре, кратчайшая преломлялась, то её отрезки, сходящиеся в A, образовывали бы с одной стороны угол, меньший π. Срезая его, мы опять укоротили бы кратчайшую, что невозможно.

*) Эти теоремы используются только в гл. IV и V.

Пусть теперь L — отрезок кратчайшей, лежащий в данном многоугольнике развёртки*). Каждая его точка имеет окрестность, в которой L представляется прямолинейным отрезком, откуда ясно, что и в целом L есть отрезок.

Кратчайшая пересекает каждый многоугольник конечное число раз. Действительно, если бы она пересекала многоугольник Q бесконечное число раз, то длины её отрезков, лежащих в Q, должны были бы стремиться к нулю; иначе она имела бы бесконечную длину. Но тогда эти отрезки сгущались бы к одной из вершин многоугольника Q. Эта вершина, будучи их предельной точкой, должна была бы принадлежать кратчайшей. Но в окрестности вершины кратчайшая должна быть прямолинейным отрезком и уж никак не может пересекать многоугольник Q бесконечное число раз. Полученное противоречие показывает, что число отрезков кратчайшей в многоугольнике конечно.

Теорема таким образом полностью доказана.



Черт. 54.

В) *Если развёртка имеет границу, то кратчайшая может частично проходить по границе* (как линия CB на черт. 54). *При этом её отрезки могут образовывать углы в тех и только тех вершинах границы, угол при которых больше* π.

Действительно, пусть два отрезка AX, AY одной кратчайшей сходятся в точке A на границе развёртки, образуя друг с другом некоторый угол. Если бы этот угол α с внутренней стороны развёртки был меньше π, то его можно было бы срезать (черт. 53). Тогда мы заменили бы кратчайшую более короткой линией, что невозможно. Следовательно, угол $\alpha > \pi$ и потому тем более полный угол при точке A больше π.

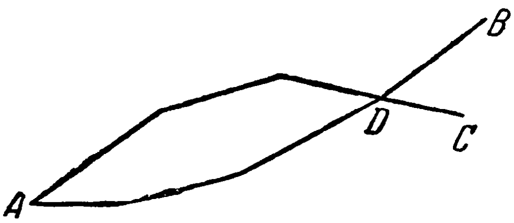
С) *В развёртке положительной кривизны у каждой кратчайшей, идущей внутри развёртки, есть окрестность, которую можно развернуть на плоскость, причём кратчайшая переходит в прямолинейный отрезок.* (Под разворачиванием на плоскость понимается изометрическое отображение.)

Если конец кратчайшей лежит в точке O с полным углом $< 2\pi$, то его окрестность нельзя развернуть на плоскость. Но тогда, проведя из точки O отрезок и надрезав по нему её окрестность, можно будет надрезанную окрестность развернуть на плоскость. Возможность

*) Не исключено, конечно, что кратчайшая проходит по многоугольнику развёртки неоднократно и тем самым имеет в нём несколько отрезков. Пример неоднократного прохождения кратчайшей по многоугольнику развёртки легко построить на развёртке, состоящей всего лишь из одного многоугольника подобно крестообразной развёртке куба (черт. 35).

развернуть на плоскость окрестности концов кратчайшей мы понимаем именно в этом смысле.

Теорема C следует из теоремы A. Действительно, согласно теореме A кратчайшая не может проходить через точки с полным углом $< 2\pi$. Поэтому в развёртке положительной кривизны каждая внутренняя точка кратчайшей имеет окрестность, разворачиваемую на плоскость. Согласно теореме A в каждой такой окрестности кратчайшая оказывается отрезком. Выбирая конечное число таких окрестностей, покрывающих всю кратчайшую, получим её окрестность, которую можно развернуть на плоскость, причём кратчайшая уже вся в целом превратится в отрезок.



Черт. 55.

D) *В развёртке положительной кривизны две кратчайшие AB и AC, исходящие из одной точки A в разные точки B и C, либо не имеют общих точек, помимо A, либо одна из них есть просто часть другой.*

Для доказательства допустим, что кратчайшие AB и AC имеют общую точку D, но не совпадают на участке AD (черт. 55). При этом не исключается, что D может быть концом одной из них, скажем $D = B$. Тогда участки AD этих кратчайших имеют равные длины, так как иначе, заменяя более длинный более коротким, мы сократили бы соответствующую кратчайшую. Поэтому мы получаем две кратчайшие между точками A и C, совпадающие на участке CD и дальше расходящиеся вдоль разных отрезков AD.

Но тогда их ветви образуют три угла, два из которых, как угол между AD и DC, равны π. Полный угол вокруг точки D, где они расходятся, получается больше 2π, что исключено по предположению о положительности кривизны. Поэтому на участке AD кратчайшие должны совпадать.

Но по совершенно тем же соображениям они и дальше нигде не могут разойтись. Таким образом, они полностью налегают так, что одна из них есть часть другой.

E) *В любой развёртке каждые две точки можно соединить кратчайшей.*

Пусть A и B — две данные точки развёртки R. Пусть их соединяет ломаная некоторой длины l. Тогда кратчайшую AB нужно, очевидно, искать только среди более коротких кривых.

Пусть G — множество всех точек X развёртки R, удалённых от A на расстояние $\rho_R(AX) \leqslant l$. Очевидно, каждая точка развёртки и, в частности, каждая точка множества G имеют окрестность, в которой кратчайшая заведомо существует и представляется отрезком. Каждую такую окрестность можно считать состоящей из многоугольников, являющихся частями многоугольников развёртки.

В силу известной леммы Бореля из данных окрестностей можно выбрать конечное число покрывающих множество G. А тогда их все можно разбить на треугольники, которые обозначим T_i.

В результате множество G оказывается покрытым непересекающимися треугольниками T_i, в каждом из которых кратчайшая заведомо существует и представляет собой отрезок.

Очевидно, что кратчайшую AB достаточно искать среди ломаных со звеньями в разных треугольниках T_i. (Из G кратчайшая AB выйти не может, так как тогда её длина была бы больше l, потому что все точки, удалённые от A не более чем на l, включены в G.) Длина ломаной со звеньями в треугольниках есть, очевидно, функция конечного числа переменных, меняющихся в конечной замкнутой области*). Поэтому она достигает минимума, т. е. существует кратчайшая AB.

Все полученные результаты А — Е можно резюмировать в следующей теореме:

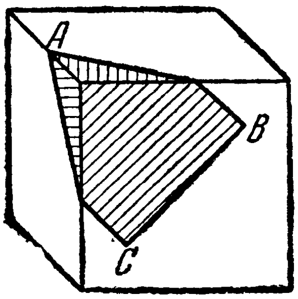
Теорема 1. *В любой развёртке положительной кривизны каждые две точки соединимы кратчайшей. Она слагается из отрезков на многоугольниках развёртки. Внутри развёртки она проходит через рёбра «без преломления» и у неё есть окрестность, разворачиваемая на плоскость, причём кратчайшая переходит в прямолинейный отрезок. Если же развёртка имеет границу и кратчайшая подходит к границе, то она может преломляться только в тех вершинах на границе, угол при которых больше* π.

2. Кривизна геодезического многоугольника. Назовём *геодезическим многоугольником* любую часть развёртки, ограниченную замкнутой линией, составленной из кратчайших, и гомеоморфную кругу, т. е. допускающую взаимно однозначное и непрерывное отображение на круг подобно простому плоскому многоугольнику, конечно, с учётом отождествлений (склеиваний), заданных в развёртке. Так как кратчайшие состоят из отрезков на многоугольниках развёртки, то геодезический

---

*) Точно определить эту функцию можно, например, следующим образом. На каждой стороне a_j треугольников T_i будем определять положение точки, расстоянием x_j от одного из концов. Рассмотрим такие ломаные, соединяющие точки A и B, которые пересекают стороны треугольников T_i в некотором данном порядке: a_{j1}, a_{j2}, $a_{j3}, \ldots$ (при этом, если ломаная на некотором отрезке совпадает со стороной a_k, то мы не считаем, что она её пересекает, но считаем, что она пересекает стороны, подходящие к концам a_k). Длина рассматриваемой ломаной есть, очевидно, вполне определённая непрерывная функция переменных x_{j1}, $x_{j2}, \ldots$ и потому достигает минимума. Рассматриваем все возможные последовательности сторон a_{j1}, $a_{j2}, \ldots$, как их могут пересекать ломаные AB. Каждой из этих последовательностей отвечают своя функция и свой минимум. Наименьший из этих минимумов и даст кратчайшую AB. То, что здесь речь идёт о многих функциях, не противоречит сказанному вначале о том, что длина ломаной AB есть одна непрерывная функция, потому что любое число функций можно объединить в одну, но от большего числа переменных. Например, $f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ и $g(x)$ $(c \leqslant x \leqslant d)$ можно считать функцией $\varphi(x, y) = \begin{cases} f(x) & (a \leqslant x \leqslant b, \quad y = y_0 < c), \\ g(y) & (c \leqslant y \leqslant d, \quad x = x_0 < a). \end{cases}$

многоугольник вырезается из развёртки ломаной, составленной из таких отрезков, и потому естественно сам представляет некоторую развёртку, составленную из кусков многоугольников исходной развёртки. Однако, в отличие от обыкновенного многоугольника геодезический многоугольник может содержать внутри истинные вершины развёртки.



Черт. 56.

Примером может служить геодезический треугольник ABC на черт. 56, где роль развёртки играет обыкновенный куб.

Так как геодезический многоугольник сам представляет некоторую развёртку, то углы его определяются так же, как углы при граничных вершинах развёртки (т. е. как суммы сходящихся в одной граничной вершине углов плоских многоугольников, образующих ту развёртку, которую представляет данный геодезический многоугольник).

Теорема 2. *Избыток суммы углов геодезического n-угольника (в сравнении с суммой углов плоского n-угольника) равен его кривизне, т. е. если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — углы геодезического n-угольника, $\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_m$ — кривизны вершин развёртки, содержащихся внутри него, то*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi = \sum_{j=1}^{m} \omega_j. \tag{1}$$

Для доказательства разобьём данный геодезический многоугольник P на треугольники T_i так, чтобы каждый из них содержался в одном многоугольнике развёртки. При этом может оказаться, что некоторые вершины этих треугольников, лежащие на границе многоугольника P, не служат его вершинами. Однако мы их примем также за вершины многоугольника P, что не изменит величины, стоящей в (1) слева, так как угол при такой вершине равен π.

Точно так же некоторые вершины треугольников T_i, лежащие внутри многоугольника P, могут не быть вершинами развёртки. Однако «разрезав» развёртку на треугольники T_i, мы эти вершины сделаем вершинами развёртки. И это не изменит суммы кривизн, потому что полный угол вокруг новой вершины равен 2π и кривизна её равна нулю.

Итак, мы можем все вершины треугольников T_i, лежащие на границе многоугольника P, считать его вершинами, а вершины этих треугольников, лежащие внутри P, — вершинами развёртки.

Так как каждый треугольник T_i содержится в одном многоугольнике развёртки и является поэтому обыкновенным плоским треугольником, то сумма его углов равна π. Если число всех треугольников T_i есть f, то сумма всех их углов есть $f\pi$. С другой стороны, та же сумма равна сумме углов при всех вершинах на границе и внутри P. Поэтому

$$f\pi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_j, \tag{2}$$

где θ_j — полный угол вокруг соответствующей вершины внутри P.

Если k — число сторон треугольников T_i и e — число вершин, то по теореме Эйлера $f-k+e=1$ (теорема 8 § 7). Вместе с тем число всех вершин равно сумме числа вершин внутри и на границе, т. е. $e=m+n$; поэтому

$$f-k+m+n=1. \tag{3}$$

Наконец, у каждого треугольника по три стороны, и только n сторон, лежащих на границе, принадлежат каждая одному треугольнику, внутренние же стороны принадлежат каждая двум треугольникам. Поэтому

$$3f=2k-n. \tag{4}$$

Умножая обе части равенства (3) на 2 и принимая во внимание, что в силу равенства (4), $2k=3f+n$, получим,

$$f=2m+n-2. \tag{5}$$

Подставляя это выражение для f в формулу (2), находим

$$2\pi m+\pi(n-2)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\sum_{j=1}^{m}\theta_j$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-(n-2)\pi=\sum_{j=1}^{m}(2\pi-\theta_j)=\sum_{j=1}^{m}\omega_j,$$

ибо по самому определению кривизны $\omega_j=2\pi-\theta_j$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Полная кривизна развёртки, гомеоморфной сфере, равна* 4π.

Для доказательства вырежем внутри одного из многоугольников развёртки R многоугольник P. Тогда, если $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — его углы, то

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=(n-2)\pi. \tag{6}$$

Если развёртка гомеоморфна сфере, то дополнение $P'=R-P$ (с присоединённой границей) будет геодезическим многоугольником. По построению этот многоугольник содержит все вершины развёртки и потому полная его кривизна равна полной кривизне развёртки. Поэтому, если Ω — эта полная кривизна, а $\alpha'_1,\ldots,\alpha'_n$ — углы геодезического многоугольника P', то согласно теореме 2

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i-(n-2)\pi=\Omega. \tag{7}$$

Но каждая вершина многоугольника P' есть вместе с тем вершина многоугольника P и полный угол вокруг неё равен 2π, потому что она лежит внутри многоугольника развёртки. Следовательно,

$$\alpha_i + \alpha'_i = 2\pi,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi n$$

или вследствие (6)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i = (n+2)\pi.$$

Подставляя это в (7), получим

$$\Omega = 4\pi,$$

что и требовалось доказать.

3. Многоугольник нулевой кривизны.

Теорема 4. *Если геодезический треугольник не содержит внутри себя точек с кривизной, отличной от нуля, то он разворачивается на плоскость, т. е. изометричен обычному плоскому треугольнику* *).

Пусть геодезический треугольник ABC не содержит точек с кривизной, отличной от нуля. Тогда по теореме 2 сумма его углов равна π, так что каждый угол меньше π.

По теореме 1 окрестность стороны AB можно развернуть на плоскость, причём AB перейдёт в прямолинейный отрезок. А так как угол B меньше π, то отсюда следует, что от треугольника ABC можно отрезать некоторый узкий треугольник ABX с вершиной X на стороне BC так, что этот треугольник разворачивается на плоскость.

Но к оставшемуся треугольнику AXC приложимо то же рассуждение. Поэтому точку X можно отодвигать по направлению к C, разворачивая на плоскость всё бóльшую и бóльшую часть треугольника ABC, пока он не окажется весь развёрнутым на плоскость.

Строгое проведение этого очевидного рассуждения не представляет, конечно, никакого труда **).

Теорема 5. *Если геодезический многоугольник Q не содержит внутри себя точек с кривизной, отличной от нуля, то его можно разбить на треугольники непересекающимися диагоналями.*

Мы рассматриваем многоугольник Q как развёртку и понимаем под диагональю кратчайшую, идущую внутри него от одной вершины до другой. (Однако, если Q есть часть развёртки R, то эта кратчайшая

---

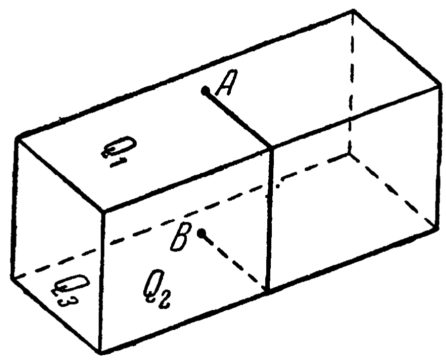
*) Если разбивать развёртку на части, то она всегда разворачивается на плоскость. Здесь речь идёт о разворачивании на плоскость без каких бы то ни было разрезов, так что все склеивания, данные в развёртке, должны быть реализованы на самом деле, а не только абстрактно.

**) Доказываем, что предел разворачиваемых треугольников есть разворачиваемый треугольник. Тогда существует крайняя точка X_0 такая, что треугольник ABX_0 разворачивается на плоскость. Точка X_0 должна совпадать с C, так как иначе, применяя наше рассуждение, мы получили бы ещё бóльший разворачиваемый треугольник.

в многоугольнике Q может не быть кратчайшей во всей развёртке R. Пример представляет линия AB на черт. 57; она — кратчайшая в части Q, составленной из граней Q_1, Q_2, Q_3, но не кратчайшая на всём изображённом многограннике.)

Для доказательства теоремы заметим, что кривизна многоугольника Q равна нулю, а потому согласно теореме 2 сумма всех его углов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — такая же, как у плоского многоугольника с тем же числом вершин n, т. е.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (n-2)\pi.$$

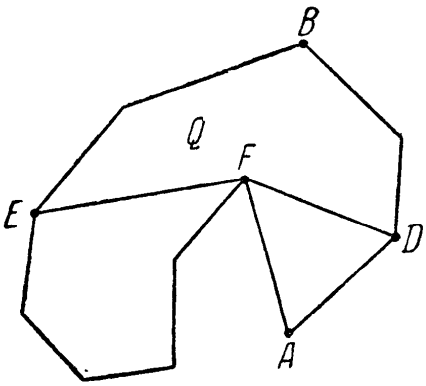


Черт. 57.

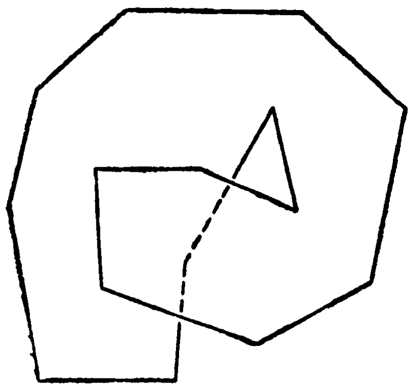
Поэтому среди его углов имеется по крайней мере три меньших π.

Пусть A, B, C — вершины, углы при которых меньше π. Очевидно, что какие-то две из них — не соседние. (Если бы они все три были соседними друг с другом, то многоугольник сводился бы к треугольнику и его нечего было бы разбивать на треугольники.) Пусть несоседними будут вершины A и B. Они делят периметр многоугольника на две ломаные, на которых лежат ещё другие вершины (черт. 58).

Возьмём любые две из этих вершин D, E, лежащих на разных ломаных, и соединим их кратчайшей DE в многоугольнике Q. Согласно



(а)



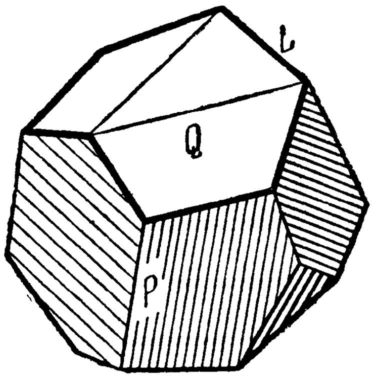
(б)

Черт. 58.

теореме 1 она не может пройти через вершины A, B, так как углы при них меньше π. Поэтому она не может всё время идти по периметру многоугольника, но должна, отходя от каких-то его вершин, проходить внутри него. На черт. 58, *а*, например, такой вершиной служит F. Тогда отрезок EF представляет собой диагональ, разбивающую многоугольник Q на два многоугольника с меньшим числом вершин. Применяя к каждому из них те же рассуждения, мы разобьём их диагоналями и т. д., пока не придём к разбиению многоугольника Q на треугольники.

Теорема доказана.

Согласно теореме 4 каждый треугольник из тех, на которые разбивается многоугольник Q, можно развернуть на плоскость. Разворачивая их все на плоскость и прикладывая друг к другу по сторонам, по которым они прилегали друг к другу в многоугольнике Q, мы тем самым и многоугольник Q развернём на плоскость. Однако при таком последовательном прикладывании треугольников они могут налегать один на другой, так что развёрнутый многоугольник Q может перекрываться сам с собой (см. черт. 58, *б*).



Черт. 59.

Резюмируя, можно высказать следующую теорему:

Теорема 6. *Геодезический многоугольник, не имеющий внутри себя точек ненулевой кривизны, можно развернуть на плоскость с той, однако, возможной особенностью, что он будет перекрываться сам с собой.*

В § 3 была доказана теорема о том, что всякий конечный выпуклый многогранник P с границей может быть дополнен единственным образом до замкнутого $\overline{P}$ без добавления новых вершин (теорема 4 § 3). Если граница P представляет одну ломаную L, то замкнутый многогранник $\overline{P}$ состоит, очевидно, из многогранника P и многогранника Q, смежного с ним по ломаной L (черт. 59). Этот многогранник Q имеет только граничные вершины и потому согласно теореме 6 может быть развёрнут на плоскость.

Если многогранник P ограничен несколькими ломаными, то то же верно для каждого из тех кусков Q_i, которые дополняют его до замкнутого.

Полученный результат можно выразить в следующей теореме, которую мы формулируем в наглядных терминах.

Теорема 7. *Всякий конечный выпуклый многогранник с границей может быть и притом единственным образом дополнен до замкнутого путём подклеивания к ограничивающим его ломаным таких многогранников, которые не имеют внутренних вершин и разворачиваются поэтому на плоскость (с возможностью перекрывания).*

4. Задачи. 1. Доказать, что полная кривизна (т. е. сумма кривизн всех вершин) любой конечной развёртки выражается формулой

$$\omega = 2\pi\chi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i),$$

где $\chi = e - k + f$ — эйлерово число развёртки, а α_i — углы при её граничных вершинах. Для развёртки без границы $\omega = 2\pi\chi$. (Положительность кривизны не предполагается. Проверить на примерах, вроде черт. 2в.)

2. Доказать, что полная кривизна бесконечной развёртки, гомеоморфной плоскости, не превосходит 2π. Обобщить этот результат, показав, что для

всякой бесконечной развёртки без границы $\omega \leqslant 2\pi\chi$. Какое неравенство будет при наличии границы (в него войдут углы при граничных вершинах)? (Это — довольно трудная задача.)

3. Дать пример кратчайших на невыпуклом многограннике, исходящих из одной точки и совпадающих на некотором отрезке, а дальше расходящихся, образуя «вилку».

4. Вырезать из куба геодезический многоугольник (без вершин внутри), который разворачивался бы на плоскость с перекрыванием.

5. Найти пример плоского многоугольника с перекрыванием, который нельзя было бы наложить ни на какой выпуклый многогранник. (Такой пример будет дан в n° 8 § 1 гл. V.)

§ 9. Обобщения

1. Выпуклые тела. Понятие выпуклого тела было определено в § 1. Ряд понятий и результатов следующих параграфов может быть обобщён на любые выпуклые тела. Так, можно доказать, что выпуклое тело имеет в каждой точке своей поверхности опорную плоскость и что, обратно, всякое тело, обладающее этим свойством, — выпуклое. Каждая точка, не принадлежащая выпуклому телу, отделима от него некоторой опорной плоскостью. Поэтому выпуклое тело является общей частью полупространств, ограниченных его опорными плоскостями. Обратно, общая часть любого числа полупространств будет выпуклым телом (если только она имеет внутренние точки).

Выпуклые тела могут быть конечными и бесконечными. Для бесконечных выпуклых тел можно определить предельный конус (аналог предельного угла) как поверхность тела, заполняемого лучами, откладываемыми от любой его точки и целиком содержащимися в рассматриваемом выпуклом теле. При подобном сжатии поверхность тела переходит в предельный конус. Сферическое изображение предельного конуса совпадает с замыканием сферического изображения поверхности тела.

Одним из основных методов исследования выпуклых тел является метод приближения выпуклыми многогранниками. Если на поверхности тела взять несколько точек и построить их выпуклую оболочку, то получим выпуклый многогранник, вписанный в тело. Если число точек безгранично увеличивать, располагая их всё гуще и гуще, то соответствующие выпуклые многогранники будут сходиться к телу. Легко доказать, что опорные плоскости этих многогранников будут давать в пределе опорные плоскости тела, откуда легко вывести, что через каждую точку поверхности тела проходит опорная плоскость.

Выпуклые поверхности могут быть полными — целые поверхности выпуклых тел — и неполными. Полные поверхности могут быть либо замкнутые, ограничивающие конечные выпуклые тела, либо бесконечные, но не содержащие прямых, либо бесконечные цилиндры. Замкнутые гомеоморфны сфере, бесконечные (не цилиндры) гомеоморфны плоскости (доказательство первого утверждения аналогично доказательству для многогранников, доказательство второго — несколько иное). Неполную выпуклую поверхность можно дополнить до полной, беря поверхность её выпуклой оболочки.

Понятие развёртки к общим выпуклым поверхностям неприменимо, так как такая поверхность не может быть составлена из многоугольников. Однако совершенно аналогично случаю многогранников для любых поверхностей можно ввести понятие об их внутренней метрике, задаваемой расстояниями между точками поверхности, измеряемыми на самой поверхности. Совокупность свойств поверхности и фигур на ней, зависящих только от внутренней метрики, образует внутреннюю геометрию поверхности. Внутренняя геометрия общих выпуклых поверхностей исследована в моей книге «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» *). Там среди других исследованы вопросы,

*) А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1948.

аналогичные тем, которые были рассмотрены здесь для многогранников. На место задания развёртки ставится абстрактное задание внутренней метрики поверхности.

2. Многогранники в n-мерном пространстве. Геометрия n-мерного эвклидова пространства может быть построена аналитически, по аналогии с обычной аналитической геометрией, или синтетически, исходя из аксиом, обобщающих естественным образом аксиомы трёхмерного эвклидова пространства*). На этом синтетическом пути начала n-мерной геометрии получаются аналогично началам трёхмерной. На этом пути не представляет никакого труда построить начала теории многогранников в n-мерном эвклидовом пространстве. Определение телесного многогранника идёт от m к $m+1$: $(m+1)$-мерный (телесный) многогранник есть тело, лежащее в $(m+1)$-мерной плоскости, имеющее в ней внутренние точки и ограниченное конечным числом m-мерных многогранников. n-мерный многогранник есть тело, ограниченное конечным числом $(n-1)$-мерных многогранников. Каждый такой $(n-1)$-мерный многогранник называется гранью с условием, что к нему присоединены все другие (если они имеются), лежащие в той же $(n-1)$-мерной плоскости и имеющие с ним и далее друг с другом общие куски их собственных, т. е. $(n-2)$-мерных, граней.

Если, как это принято, называть $(n-1)$-мерную плоскость просто плоскостью, то понятие выпуклого многогранника определяется дословно так же, как в § 1, и совершенно так же устанавливается эквивалентность двух определений выпуклости. Далее, все теоремы §§ 2—5 вместе с их доказательствами переносятся на n-мерный выпуклые многогранники без каких бы то ни было изменений. Нужно только называть плоскостью $(n-1)$-мерную плоскость и помнить, что имеются ещё плоскости меньших измерений. Например, предельный угол многогранника может вырождаться в плоский любого числа измерений от $n-1$ до 1.

Понятия полупространства, перпендикуляра к плоскости и параллельных плоскостей определяются так же, как в трёхмерном пространстве. Сферическое изображение строится на $(n-1)$-мерной сфере, которая определяется как геометрическое место точек, равноудалённых от данной — центра. На сфере имеются аналогично большим кругам «большие сферы» измерений от $n-2$ до 1, получаемые сечением сферы плоскостями измерений от $n-1$ до 2, проходящими через центр. Одномерная сфера есть окружность. Понятие сферического многоугольника естественно обобщается в понятие сферического многогранника. И тут имеется та же аналогия с обычной геометрией.

На основе этих общих замечаний можно без труда обобщить все результаты §§ 1—5 на многогранники в n-мерном пространстве.

Понятия о развертке и внутренней геометрии также допускают естественное обобщение. Однако здесь дело существенно усложняется тем, что не только вершины могут не иметь окрестности, изометричной $(n-1)$-мерному шару (по аналогии с кругом). Этим свойством могут обладать точки, лежащие на гранях любого числа измерений от $n-2$ до 0 (т. е. до вершин). У вы-

*) Вводится понятие m-мерной плоскости P^m, $0 \leqslant m \leqslant n-1$: нульмерная плоскость есть точка, одномерная — прямая, двухмерная — обычная плоскость, трёхмерная — обычное трёхмерное пространство и т. д. Аксиомы сочетания: 1) Через всякие $m+1$ точек «в общем расположении» (т. е. не лежащих на менее чем m-мерной плоскости) проходит и притом только одна m-мерная плоскость. 2) Если две плоскости P^m, P^k имеют общую точку, то их общая часть есть плоскость P^l, число измерений которой удовлетворяет неравенству $l \geqslant m+k-n$. (Например, в четырёхмерном пространстве двухмерные плоскости могут пересекаться либо в одной точке: $l=0$, либо по прямой: $l=1$.) 3) В пространстве есть по крайней мере $n+1$ точек в общем расположении (не лежащих ни в какой плоскости). Прочие аксиомы (порядка, конгруэнтности, непрерывности, параллельности) — такие же, как в трёхмерном пространстве. См. Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, гл. V, n° 14. Изд. 1-е, 1945.

пуклого многогранника точки внутри $(n-2)$-мерных граней никогда не имеют таких окрестностей. Это ведёт к усложнению понятия о кривизне. Появляются, так сказать, кривизны разных измерений от 1 до $n-1$ соответственно граням измерений от $n-2$ до 0. Установление понятия об этих кривизнах возможно элементарным путём. Но мы не будем на этом останавливаться.

3. Многогранники на n-мерной сфере и в пространстве Лобачевского. Трёхмерное сферическое пространство есть не что иное, как сфера в четырёхмерном пространстве, и в нём естественно определяются выпуклые многогранники. Заменяя отрезки дугами больших кругов, а плоскости — «большими» двухмерными сферами, легко обобщить на такое пространство все выводы §§ 1—3, 6 и 7. Бесконечные многогранники здесь отсутствуют. Понятие сферического изображения может быть перенесено в сферическое пространство, несмотря на отсутствие параллельных прямых. Делается это путём сопоставления большой сфере её центров (на всей трёхмерной сфере) и точке — большой сферы, для которой она служит центром. Во избежание двузначности, связанной с тем, что большая сфера, как и большой круг, имеет два диаметрально противоположных центра, можно отождествлять диаметрально противоположные точки. Тогда получим так называемое эллиптическое пространство Римана.

Если из центра сферы в четырёхмерном пространстве проводить лучи через точки её поверхности, то многогранникам на сфере сопоставляются многогранные углы. Поэтому теория многогранников в сферическом пространстве эквивалентна теории многогранных углов в четырёхмерном эвклидовом пространстве.

Совершенно аналогичные соображения применимы к n-мерному сферическому пространству, которое есть не более, как сфера в $(n+1)$-мерном эвклидовом пространстве.

Пространство Лобачевского отличается от эвклидова отсутствием аксиомы о единственности прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой. Поэтому все выводы, где понятие параллельности не используется (явно или неявно), могут быть дословно перенесены в пространство Лобачевского. Таким путём можно перенести в него понятие о выпуклом многограннике и все выводы о них, не опирающиеся на параллельность, т. е. всё, кроме понятий предельного угла и сферического изображения.

Для наглядного представления выпуклых многогранников и любых выпуклых тел в пространстве Лобачевского воспользуемся той его интерпретацией, в которой оно представляется внутренностью некоторого шара E в эвклидовом пространстве, а прямые Лобачевского изображаются отрезками эвклидовых прямых. Тогда отрезки в смысле геометрий Лобачевского и Эвклида совпадают, а потому всякое выпуклое тело пространства Лобачевского изображается эвклидовым выпуклым телом, у которого исключены точки, не лежащие внутри шара E. Обратно, всякое такое эвклидовски выпуклое тело H будет представлять выпуклое тело H' в пространстве Лобачевского.

Если тело H подходит к поверхности шара E, то это означает, что тело H' бесконечно. А так как H может подходить к поверхности E неоднократно, то бесконечное выпуклое тело в пространстве Лобачевского может иметь тем самым несколько (и даже бесконечно много!) «бесконечных концов».

Плоскость Лобачевского изображается куском плоскости, лежащим в шаре E, а потому выпуклые многогранники пространства Лобачевского изображаются эвклидовыми выпуклыми многогранниками с исключением точек, не лежащих внутри шара E. Бесконечные выпуклые многогранники пространства Лобачевского могут иметь любое конечное число «бесконечных концов», тогда как в эвклидовом пространстве бесконечные выпуклые многогранники имеют один такой конец или два (и тогда они являются призмами). Это обстоятельство значительно обогащает и усложняет теорию бесконечных выпуклых многогранников в пространстве Лобачевского.

Конечные многогранники пространства Лобачевского изображаются конечными эвклидовыми многогранниками и их теория не представляет почти ничего нового.

Понятие о развёртке определяется в пространстве Лобачевского так же, как в эвклидовом; нужно только говорить о многоугольниках на плоскости Лобачевского.

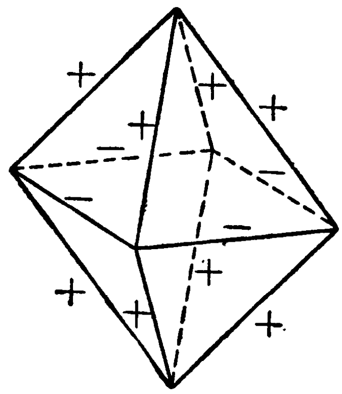
Результаты §§ 1—3, 6, 8 и 7 в части, касающейся конечных многогранников, переносятся в пространство Лобачевского дословно. Что же касается бесконечных многогранников и обобщения понятия о сферическом изображении, то они ещё мало изучены и их всестороннее исследование может служить темой чисто геометрической работы, сулящей, надо думать, интересные и содержательные результаты.

ГЛАВА II

МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 1. Лемма Коши

1. Все теоремы единственности или, что то же самое, теоремы о равенстве многогранников с некоторыми совпадающими данными, формулируемые дальше в §§ 3 и 4, доказываются в главах III и VI с помощью единого метода. Это — тот метод, которым Коши доказал свою теорему о равенстве замкнутых выпуклых многогранников, одинаково составленных из равных граней. Метод Коши представляет собой одно из прекраснейших рассуждений, какие только знает геометрия; это мнение, повидимому, всеобщее. Основан этот метод на одной топологической лемме, которую мы будем называть леммой Коши. Мы докажем сначала эту лемму, а потом покажем, как применил её сам Коши; тем самым станет ясной общая схема её применения для доказательства теорем единственности.



Черт. 60.

Лемма Коши. *Пусть на замкнутом выпуклом многограннике некоторые рёбра отмечены знаками плюс или минус. При обходе вокруг вершины, к которой подходят такие отмеченные рёбра, могут быть перемены знаков. Утверждается, что не может быть, чтобы при обходе вокруг всякой такой вершины было не менее четырёх перемен знака* (для иллюстрации см. черт. 60).

Этой лемме можно придать чисто топологическую форму:

Пусть на поверхности, гомеоморфной сфере, задана «сеть рёбер», т. е. задано конечное число ломаных (*или любых других линий, гомеоморфных каждая прямолинейному отрезку*), *не имеющих попарно общих точек, кроме концов* — «вершин сети». (Такова *сеть отмеченных рёбер многогранника.*) *И пусть среди областей, на которые этой сетью разбивается сфера, нет ни одной, ограниченной только двумя рёбрами.* (Это условие соответствует тому, что на многограннике никакие две вершины не соединяются двумя рёбрами *).)

*) Без этого условия лемма неверна. Достаточно взять на сфере любое чётное число меридианов и попеременно отметить их знаками плюс и минус. Можно дать и более сложные примеры.

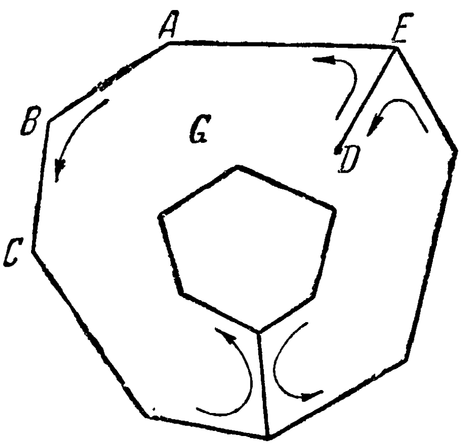
Утверждается, что невозможно сопоставить рёбрам сети знаки плюс и минус так, чтобы при обходе вокруг каждой вершины было не менее четырёх перемен знака.

Доказывается даже несколько больше. *Пусть N — общее число перемен знаков при обходах вокруг всех вершин, а E — общее число вершин сети. Тогда*

$$N \leqslant 4E - 8. \qquad (1)$$

Из этого неравенства утверждение леммы вытекает непосредственно.

2. Воспроизведём доказательство неравенства (1), данное Коши. Оно основано на подсчёте перемен знаков при обходе вокруг областей, на которые поверхность разбивается рёбрами сети. Если при обходе вокруг вершины A два ребра оказываются соседними, то они будут соседними и при обходе вокруг области, в границу которой они входят. Обратное тоже верно. Поэтому, если подсчитывать перемены знаков, обходя вокруг областей, то общее их число будет тоже N.



Черт. 61.

Это простое замечание требует некоторого обоснования. Введём на поверхности ориентацию и будем обходить область, следуя этой ориентации. Предположим, что мы прошли ребро AB, обходя контур области G, идя от A к B. Будем теперь огибать вершину E, начиная с ребра AB, идя по области G до тех пор, пока не дойдём до следующего ребра BC (черт. 61). Это ребро и будет следующим за AB при обходе как вокруг области G, так и вокруг вершины A. Таким образом, перемена знака от AB к BC окажется учтённой в обоих обходах.

Будем продолжать обход области G далее по ребру BC от B к C и т. д. Этот процесс мы будем продолжать до тех пор, пока не дойдём до пройденного уже ребра и притом так, что при дальнейшем обходе мы должны будем пройти его в том же направлении, что и в первый раз.

Дело в том, что в сети могут быть рёбра, не отделяющие область G от других, например, потому, что рассматриваемое ребро имеет в G свободный конец, или может, например, соединять два ограничивающих G замкнутых контура (см. черт. 61). Каждое такое ребро будет проходиться дважды: сначала в одном, потом в другом направлении. Таким образом, можно считать, что каждое ребро входит в границу разных областей или одной и той же области дважды и проходится в двух противоположных направлениях. Поэтому, например, если два ребра AB и BC разделяют области G и H, то в G они проходятся от AB к BC, а в H от BC к AB, что даёт полный обход вокруг A. Если вершина D есть свободный конец ребра DE, то при обходе вокруг G мы огибаем вершину D и возвращаемся к тому же ребру DE. Тем самым мы обойдём также вокруг вершины D.

Говоря, что область имеет n рёбер, мы будем иметь в виду, что ребро, не отделяющее её от другой области, считается дважды. Число перемен знака при обходе вокруг области не может быть больше числа n её рёбер, а кроме того, оно чётно, так как при полном обходе мы возвращаемся к исходному знаку. Поэтому, если F_n есть число областей с n рёбрами, то для общего числа N перемен знаков мы получаем оценку

$$N \leq 2F_3 + 4F_4 + 4F_5 + \ldots \tag{2}$$

Здесь мы пользуемся тем, что по условию области с двумя рёбрами отсутствуют, т. е. $F_2 = 0$.

Теперь преобразуем оценку (2), используя обобщённую формулу Эйлера.

Если E, K, F — числа вершин, рёбер и областей сети, то

$$E - K + F \geq 2. \tag{3}$$

Для связной сети согласно теореме Эйлера $E - K + F = 2$, а для сети из H связных компонент $E - K + F = 1 + H$, как это доказано в § 7 главы I (теорема 5).

Так как каждое ребро либо принадлежит двум областям, либо считается дважды у одной области, то

$$2K = \sum_n nF_n. \tag{4}$$

Общее число областей F есть

$$F = \sum_n F_n. \tag{5}$$

Из формулы (3) следует, что

$$4E - 8 \geq 4K - 4F,$$

а подставляя сюда K и F из (4) и (5), получаем

$$4E - 8 \geq \sum_n 2(n-2) F_n = 2F_3 + 4F_4 + 6F_5 + \ldots \tag{6}$$

Правая часть этого неравенства не меньше правой части неравенства (2), потому что при $n \geq 3$ число $2(n-2)$ не меньше ближайшего к n снизу чётного числа. Следовательно, из (2) и (6) следует

$$N \leq 4E - 8, \tag{1}$$

что и требовалось доказать.

Из неравенства (1) можно извлечь небольшое усиление леммы Коши:

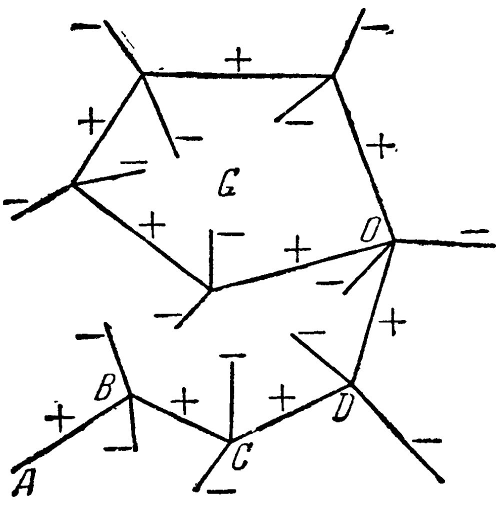
В условиях леммы Коши невозможно, чтобы не менее четырёх перемен знака было вокруг всех вершин, кроме трёх; вокруг кото-

рых имеются по две перемены знака, либо кроме двух, вокруг одной из которых нет перемен знака, а вокруг другой их только две, либо кроме одной, вокруг которой любое число перемен знака меньшее четырёх. Иначе было бы $N \geqslant 4E - 6$, вопреки неравенству (1).

Этой уточнённой леммой Коши мы будем иметь случай воспользоваться.

3. Приведённое доказательство леммы Коши ввиду своего вычислительного характера кажется несколько таинственным и не раскрывает наглядного основания этой леммы. Поэтому будет, пожалуй, не лишним дать чисто геометрическое её доказательство.

Доказательство будем вести от противного. Допустим, что в некоторой сети на сфере дана такая расстановка знаков на её рёбрах, что вокруг каждой вершины имеется не менее четырёх перемен знака. Возьмём какое-либо ребро AB этой сети, помеченное плюсом. К вершине B подходят кроме него другие рёбра так, что вокруг B имеется не менее четырёх перемен знака. Поэтому из B выходит хотя бы одно ребро BC, помеченное плюсом и такое, что вместе с ребром AB они разделяют подходящие к B рёбра, отмеченные минусами. Из вершины C опять исходит помеченное плюсом ребро CD, которое вместе с BC разделяет рёбра, отмеченные минусами. Будем итти, таким образом, от ребра AB по рёбрам BC, CD и т. д. Так как число рёбер конечно, то в некоторый момент мы вернёмся к уже пройденной вершине O и получим некоторый замкнутый контур L (черт. 62). В частном случае O может совпадать с A. Контур L разбивает сферу на две области; рассмотрим одну из них, G.



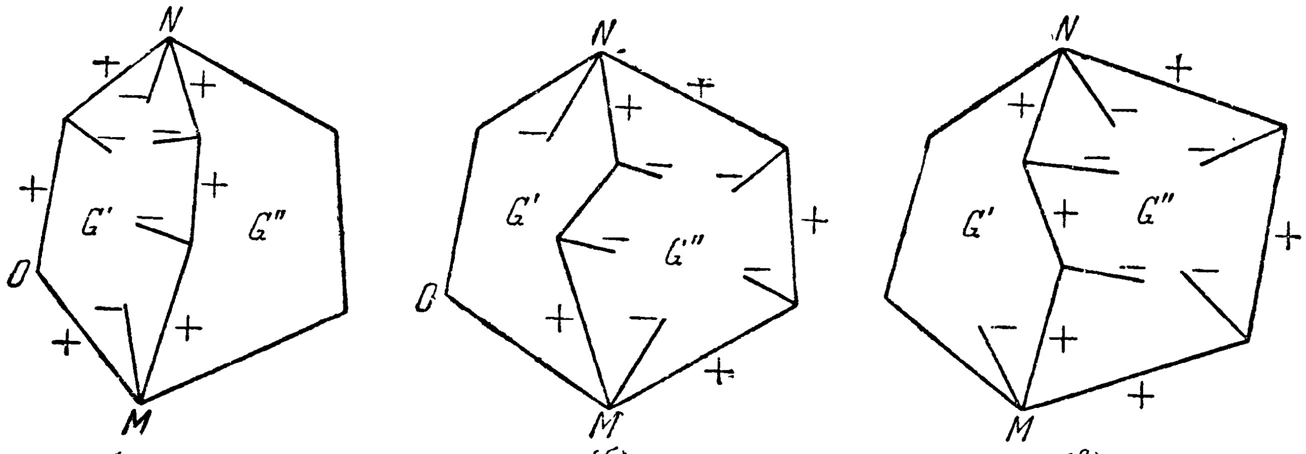
Черт. 62.

Все рёбра контура L помечены плюсами и каждая пара соседних рёбер разделяет рёбра, отмеченные минусами, кроме, может быть, рёбер, сходящихся в вершине O. Поэтому в области G содержатся рёбра с минусами, исходящими из всех её вершин, кроме, может быть, O.

Покажем, что внутри области G содержатся вершины сети. Если бы это было не так, то концы всех содержащихся в ней рёбер лежали бы в её вершинах. Но из всех вершин, кроме, может быть, одной O, внутрь области G идут рёбра, а в таком случае какие-нибудь две соседние вершины должны быть соединены таким ребром. (Чтобы убедиться в этом, достаточно представить себе G в виде многоугольника; рёбра внутри G изобразятся непересекающимися линиями, соединяющими его вершины. Но непересекающиеся диагонали можно провести из всех вершин, кроме двух. Если же рёбра идут из всех вершин, кроме одной, то среди них есть ребро, соединяющее две соседние вершины. Строгое доказательство проводится индукцией по числу вершин.)

Но если две соседние вершины X, Y контура L соединены ребром внутри G, то получается двуугольная область, ограниченная двумя рёбрами XY. И если внутри G нет вершин, то это будет двуугольная область в сети. Таких областей в сети нет по условию. Следовательно, предположение об отсутствии внутри G вершин сети неверно.

Пусть A_1 — вершина внутри G; из неё исходит некоторое ребро A_1B_1, отмеченное плюсами. Так же как и раньше, мы заключаем, что к вершине B_1 подходит ещё ребро B_1C_1, тоже отмеченное плюсом и разделяющее вместе с A_1B_1 рёбра, отмеченные минусами, подходящие к B_1.



(а) $G = G'$; O — её исключительная точка.

(б) $G = G''$; N — её исключительная точка.

(в) $G = G''$; M — её исключительная точка.

Черт. 63.

Будем итти, таким образом, по рёбрам A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 и т. д. до тех пор, пока не случится одно из двух: либо мы вернёмся к уже пройденной вершине, нигде не выходя за пределы G, либо мы дойдём до границы области G в некоторой её вершине N.

В первом случае мы получаем замкнутый контур L_1, который выделяет из G новую односвязную область G_1. К этой области G_1 приложимы все те рассуждения, какие мы применили к G.

Во втором случае мы пойдём от вершины N в обратную сторону до исходной вершины A_1 и дальше за неё. Если полученный при этом путь замкнётся, то будем иметь опять первый случай. Если же он кончится в некоторой вершине M области G, то получим линию MN, которая разобьёт G на две односвязные части G' и G''.

Если вершины M и N отличны от O, то из каждой из них идут рёбра с минусами внутрь G, т. е. внутрь G' или G''. Поэтому хотя бы одна из областей G' и G'' — такая, что внутрь неё из всех вершин, кроме, может быть, одной, идут рёбра с минусами. (Три возможных здесь случая изображены на черт. 63 а, б, в; под каждым отдельным чертежом указаны область, обладающая требуемым свойством, и её исключительная вершина.) Мы обозначим эту область G_1. Если, скажем, N совпадает с O, то за G_1 берём ту из областей G' или G'', в которую идут из вершины M рёбра с минусами. Таким образом, во всех случаях из области G можно выделить область G_1, обладающую теми же свойствами, что и область G. Но тогда, повторяя наше рассуждение, мы можем в G_1 выделить область G_2 и т. д. до бесконечности. Это, однако, невозможно ввиду конечности числа рёбер сети. Следовательно, вообще не может быть сети с предполагаемой расстановкой знаков, что и требовалось доказать.

4. Теперь покажем, как применяется лемма Коши к доказательству его теоремы о равенстве замкнутых выпуклых многогранников, одинаково составленных из равных граней.

Коши доказывает лемму: если два выпуклых многогранных угла составлены из соответственно равных плоских углов, следующих друг за другом в одинаковом порядке, то либо эти многогранные углы равны, либо разности их соответственных двугранных углов меняют знак не менее четырёх раз при обходе вокруг вершины. (Эта лемма доказывается в § 1 гл. III.)

Пусть теперь P_1 и P_2 — два многогранника, удовлетворяющие условиям теоремы Коши. Если все двугранные углы их равны, то сами многогранники равны. Если же не все двугранные углы равны, то пометим плюсом (минусом) каждое ребро многогранника P_1, двугранный угол при котором больше (меньше), чем при соответствующем ребре многогранника P_2. Тогда согласно приведённой только что лемме вокруг каждой вершины, к которой подходит хотя бы одно отмеченное ребро, будет не менее четырёх перемен знака. Но по лемме Коши это невозможно. Следовательно, у многогранников P_1 и P_2 не может быть соответственных неравных двугранных углов, и теорема доказана.

Конечно, не во всех случаях лемма Коши применяется так непосредственно. Однако простые дополнительные рассуждения, если они только необходимы, всегда приводят к цели при том необходимом условии, что заранее доказаны леммы, обеспечивающие нужные свойства расстановки знаков на рассматриваемой сети.

Поэтому главы III и VI, посвящённые теоремам о равенстве многогранников, начинаются именно с доказательства таких лемм.

§ 2. Лемма об отображении *)

1. Все теоремы существования для выпуклых многогранников, которые формулированы дальше в §§ 3—5, будут доказаны (не считая

*) В этом параграфе используются некоторые сведения из топологии. Читатель, не знакомый с ней, должен будет прочесть сначала § 8 этой главы, где даётся в простейшей форме весь необходимый материал. Впрочем, лемма об отображении используется лишь в гл. IV, VII и IX.

двух-трёх самых простых теорем) единым методом, основанным на одной топологической теореме, установленной впервые Брауэром в 1912 г. и известной под названием теоремы об инвариантности области: *если область, т. е. открытое множество G n-мерного эвклидова пространства, топологически отображается на какое-либо множество G' n-мерного же эвклидова пространства, то G' также является областью* *).

Из этой теоремы мы выводим лемму, которую называем «леммой об отображении»; в единообразном применении этой леммы и состоит метод доказательств существования, о котором идёт речь.

Мы будем называть *n-мерным многообразием* такое топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную внутренности n-мерного куба **).

Напомним, что множество M (в топологическом пространстве) называется *связным*, если его нельзя разбить на два непустых замкнутых относительно него подмножества (т. е. так, чтобы всякая точка прикосновения каждого из этих подмножеств M^i, принадлежащая M, содержалась бы в M^i).

Связной компонентой множества M называется всякое связное подмножество M' множества M, не содержащееся уже ни в каком его связном подмножестве, не считая, конечно, самого M'. Множество M есть сумма своих связных компонент.

2. Лемма об отображении. *Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — два многообразия одного и того же числа измерений n. Пусть дано отображение φ многообразия $\boldsymbol{A}$ в многообразие $\boldsymbol{B}$, удовлетворяющее следующим условиям*:

1) *В каждой связной компоненте многообразия $\boldsymbol{B}$ содержатся образы точек из $\boldsymbol{A}$.*

2) *φ взаимно однозначно.*

3) *φ непрерывно.*

4) *Если точки $B_m (m = 1, 2, \ldots)$ многообразия $\boldsymbol{B}$ являются образами точек A_m многообразия $\boldsymbol{A}$ и B_m сходятся к точке B, то в $\boldsymbol{A}$ существует точка A, отображающаяся в B, такая, что имеется подпоследовательность A_{m_i} из точек A_m, сходящаяся к A.*

При этих условиях $\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$, т. е. все точки многообразия $\boldsymbol{B}$ оказываются образами точек многообразия $\boldsymbol{A}$.

Отображение φ в силу условия 4) взаимно непрерывно. Действительно, пусть $B_m = \varphi(A_m)$, $B = \varphi(A)$ и B_m сходятся к B $(m = 1, 2, \ldots)$. Допустим, что точки A_m не сходятся к A. Тогда есть такая окрестность точки A, вне которой лежит бесконечно много точек A_m; пусть

---

*) Доказательство этой теоремы излагается в § 9 этой главы. Впрочем, самое её доказательство не играет для нас роли.

**) Обычно в понятие многообразия включаются требования связности и возможности разбиения на симплексы; эти требования мы отбрасываем.

это будут точки A_{m_1}, A_{m_2}, ... Мы получаем, что *)

$$B_{m_j} = \varphi(A_{m_j}); \quad B_{m_j} \to B; \quad B = \varphi(A),$$

и никакая подпоследовательность точек A_{m_j} не может сходиться к A. Но это противоречит условию 4), так как по взаимной однозначности отображения φ только данная точка A отображается в B. Следовательно, точки A_m должны сходиться к A, т. е. φ взаимно непрерывно.

Так как отображение φ взаимно однозначно и взаимно непрерывно, то оно топологическое. Отсюда на основании теоремы об инвариантности области следует, что образ многообразия $\boldsymbol{A}$, т. е. $\varphi(\boldsymbol{A})$, есть открытое множество в $\boldsymbol{B}$. Действительно, пусть $B \in \varphi(\boldsymbol{A})$, т. е. является образом некоторой точки A из $\boldsymbol{A}$; пусть U_B — окрестность точки $B \in \boldsymbol{B}$, гомеоморфная внутренности куба, т. е. гомеоморфная n-мерному эвклидову пространству. По непрерывности отображения φ у точки A существует окрестность V_A, образ которой содержится в U_B. Точка A имеет окрестность, гомеоморфную n-мерному кубу; пересечение её с V_A также есть окрестность точки A и отображается в U_B. Эта окрестность W_A гомеоморфна, очевидно, открытому множеству n-мерного эвклидова пространства. Поэтому на основании теоремы об инвариантности области её топологический образ $\varphi(W_A)$ в U_B есть открытое множество, т. е. является окрестностью точки B. Следовательно, всякая точка $B \in \varphi(\boldsymbol{A})$ имеет окрестность, содержащуюся в $\varphi(\boldsymbol{A})$, а это означает, что $\varphi(\boldsymbol{A})$ — открытое множество.

Вместе с тем из условия 4) следует, что $\varphi(\boldsymbol{A})$ также замкнуто в $\boldsymbol{B}$. Действительно, если точки $B_n = \varphi(A_n)$ сходятся к B, то по условию 4) существует точка A из $\boldsymbol{A}$, отображающаяся в B, т. е. B принадлежит $\varphi(\boldsymbol{A})$, и следовательно, $\varphi(\boldsymbol{A})$ замкнуто.

Но если $\varphi(\boldsymbol{A})$ и открыто, и замкнуто в $\boldsymbol{B}$, и имеет точки в каждой связной компоненте многообразия $\boldsymbol{B}$, то оно простирается на всё $\boldsymbol{B}$. Действительно, так как $\varphi(\boldsymbol{A})$ открыто, то его дополнение $\boldsymbol{B} - \varphi(\boldsymbol{A})$ замкнуто. Поэтому пересечения множеств $\varphi(\boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{B} - \varphi(\boldsymbol{A})$ любым множеством $\boldsymbol{M}$ из $\boldsymbol{B}$ замкнуты относительно этого $\boldsymbol{M}$ **). Возьмём в качестве $\boldsymbol{M}$ связную компоненту $\boldsymbol{B}'$ многообразия $\boldsymbol{B}$. Тогда формула $\boldsymbol{B}' = \varphi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}' + (\boldsymbol{B} - \varphi(\boldsymbol{A}))\,\boldsymbol{B}'$ даёт разложение компоненты $\boldsymbol{B}'$ на два замкнутых относительно неё множества. По связности множества $\boldsymbol{B}'$ такое разложение невозможно, так что одно из множеств должно быть пустым. Но по условию 1) в $\boldsymbol{B}'$ есть точки из $\varphi(\boldsymbol{A})$, т. е. $\boldsymbol{B}'\varphi(\boldsymbol{A})$ не пусто. Поэтому именно $(\boldsymbol{B} - \varphi(\boldsymbol{A}))\,\boldsymbol{B}'$ пусто. Следовательно, $\boldsymbol{B}' =$

---

*) Стрелка обозначает сходимость: точки B_{m_j} сходятся к B, т. е для всякой «сколь угодно малой» окрестности точки B можно указать такой номер, что точки B_{m_j} с бо́льшими номерами j все содержатся в этой окрестности.

**) Замкнутое множество по определению содержит все свои точки прикосновения. Поэтому общая часть, например, множеств $\varphi(\boldsymbol{A})$ и $\boldsymbol{M}$ содержит все свои точки прикосновения, содержащиеся в $\boldsymbol{M}$, и, следовательно, замкнута относительно $\boldsymbol{M}$.

$=\varphi(A)B'$. Суммируя по всем связным компонентам, получим $B=\varphi(A)$. Лемма доказана.

3. Покажем теперь, как лемма об отображении применяется к доказательствам существования. Наметим, например, доказательство теоремы Минковского о существовании замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями*) и площадями граней. (Детальное доказательство см. § 1 гл. VII.)

Выясним сначала необходимые условия, которым должны удовлетворять единичные векторы внешних нормалей $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \ldots, \boldsymbol{n}_n$ и площади граней $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Эти условия следующие:

1) Векторы $\boldsymbol{n}_i$ не компланарны.

2) Все $F_i > 0$.

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i F_i = 0$.

Необходимость первых двух условий очевидна. Третье условие означает равенство нулю векторной площади замкнутого многогранника. Доказывается оно просто.

Пусть T — какая-либо плоскость и $\boldsymbol{n}$ — нормаль к ней. Тогда скалярное произведение $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_i$ есть косинус угла между $\boldsymbol{n}$ и нормалью $\boldsymbol{n}_i$ к i-й грани; поэтому $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_i)F_i$ есть не что иное, как площадь проекции этой грани на плоскость T, взятая с соответствующим знаком в зависимости от угла между $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n}_i$.

Если замкнутый выпуклый многогранник спроектировать на плоскость T, то его проекция покроет на ней некоторый многоугольник и притом дважды: один раз «положительно» и другой раз «отрицательно». В результате сумма проекций граней со знаком будет равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_i F_i = \boldsymbol{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i F_i = 0.$$

А так как плоскость T, а значит, и вектор $\boldsymbol{n}$ можно выбрать произвольно, то необходимо

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i F_i = 0.$$

Теорема Минковского утверждает, что три указанных условия не только необходимы, но и достаточны для существования выпуклого многогранника с данными нормалями $\boldsymbol{n}_i$ и площадями граней F_i, т. е. *если данные единичные векторы $\boldsymbol{n}_i$ и числа F_i удовлетворяют этим условиям, то существует замкнутый выпуклый многогранник с внешними нормалями $\boldsymbol{n}_i$ и площадями граней F_i.*

Пусть $\boldsymbol{B}$ — множество всех комплексов чисел $F_1, \ldots, F_n$ (при данных неизменных векторах $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_n$), удовлетворяющих поставленным условиям. $\boldsymbol{B}$ можно изобразить как подмножество n-мерного простран-

*) Направление грани определяется внешней нормалью к этой грани.

ства R^n с координатами $F_1, \ldots, F_n$. Векторное равенство $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i F_i = 0$ эквивалентно трём скалярным равенствам и, следовательно, определяет в R^n $(n-3)$-мерную плоскость — линейное пространство R^{n-3}. В этом линейном пространстве неравенства $F_i > 0$ определяют некоторое открытое множество. Оно выпукло как пересечение R^{n-3} с открытыми полупространствами $F_i > 0$, и, следовательно, связно. Это и будет наше многообразие $\boldsymbol{B}$. (Предполагается, что $\boldsymbol{B}$ не пусто: теорема существования говорит, что *если* существуют F_i, удовлетворяющие условиям, т. е. если $\boldsymbol{B}$ не пусто, то существует и многогранник.)

Рассмотрим теперь все замкнутые выпуклые многогранники P с данными внешними нормалями $\boldsymbol{n}_i$ к их граням. Такие многогранники существуют. Действительно, по условию векторы $\boldsymbol{n}_i$ не компланарны, и существуют такие $F_i > 0$, что $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i F_i = 0$. Поэтому векторы $\boldsymbol{n}_i$ не направлены в одно полупространство. В таком случае плоскости, касающиеся какого-нибудь шара в точках с нормалями $\boldsymbol{n}_i$, ограничивают конечный (телесный) выпуклый многогранник. Его граница и есть замкнутый выпуклый многогранник с внешними нормалями $\boldsymbol{n}_i$ к его граням.

Каждый многогранник P определяется заданием опорных чисел $h_1, \ldots, h_n$ (см. гл. I, § 2). Поэтому множество всех многогранников P можно представить как подмножество n-мерного пространства R_1^n с координатами $h_1, \ldots, h_n$. Легко убедиться, что это подмножество открыто, потому что при малых смещениях плоскостей граней грани не исчезают.

Объединим в один класс все многогранники P, равные и параллельные друг другу. Так как перенос определяется тремя составляющими, то каждый класс задаётся $n-3$ переменными. (Можно, например, выбрать в качестве представителя класса многогранник с центром тяжести в начале.) Множество всех этих классов A образует $(n-3)$-мерное многообразие $\boldsymbol{A}$.

Итак, многообразия $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют одно и то же число измерений $n-3$.

Так как площади граней многогранника всегда удовлетворяют условиям теоремы, то мы имеем естественное отображение φ многообразия $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$. Если мы покажем, что оно удовлетворяет всем условиям леммы об отображении, то тем самым окажется, что всякая точка из $\boldsymbol{B}$ есть образ точки из $\boldsymbol{A}$, т. е. что для всякой совокупности чисел $F_1, \ldots, F_n$, удовлетворяющей условиям теоремы, существует многогранник с такими площадями граней.

Так как $\boldsymbol{B}$ связно, то условие 1) леммы об отображении выполняется автоматически. Взаимная однозначность отображения φ следует из теоремы единственности, также открытой Минковским (доказательство — в § 3 гл. VI): *при данных нормалях* $\boldsymbol{n}_i$ *и площадях граней* F_i

замкнутый выпуклый многогранник единственен с точностью до переноса. На языке многообразий $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ это означает, что каждой данной точке $B \in \boldsymbol{B}$ может отвечать только один класс $A \in \boldsymbol{A}$. Непрерывность отображения φ очевидна из непрерывной зависимости площадей граней от положения граней, т. е. от опорных чисел. Остаётся четвёртое условие леммы, которое доказывается без особого труда (см. § 1 гл. VII).

Таким образом, мы убеждаемся, что все условия леммы об отображении выполнены, и теорема доказана.

4. На этом примере видны основные условия применимости нашего метода. Он применим в таких случаях, когда теорема существования имеет форму: «для всякого a существует b и обратно, для всякого b существует a» *). В нашем примере a обозначает замкнутый выпуклый многогранник, b — совокупность чисел F_i и соответствующих им единичных векторов $\boldsymbol{n}_i$, причём F_i и $\boldsymbol{n}_i$ допускаются только такие, для которых выполняются условия теоремы. Теорема Минковского утверждает, что как для всякого многогранника a существует совокупность b площадей и нормалей его граней, так и для всякой совокупности b чисел F_i и векторов $\boldsymbol{n}_i$, удовлетворяющих нужным условиям, существует соответствующий многогранник a. Такого рода утверждения суть теоремы о необходимых и достаточных условиях. Так, в нашем примере речь идёт о необходимых и достаточных условиях того, чтобы данные числа F_i и единичные векторы $\boldsymbol{n}_i$ могли быть соответственно площадями и нормалями граней замкнутого выпуклого многогранника. Необходимость условий часто оказывается очевидной, и существенным оказывается только доказательство их достаточности. Все доказываемые в этой книге теоремы существования или теоремы о необходимых и достаточных условиях имеют именно этот характер.

Далее, в предлагаемом методе доказательству существования должна предшествовать соответствующая теорема единственности. Само соответствие φ непосредственно рассматриваемых объектов бывает обычно естественно определённым; для обеспечения же взаимной однозначности отображения многообразие специально строится с учётом «точности» соответствующей теоремы единственности, для чего при определении элементов многообразия интересующие нас объекты объединяются в классы или снабжаются дополнительными различиями.

Так, в доказательстве теоремы Минковского многообразие $\boldsymbol{A}$ состоит из классов многогранников, отличающихся лишь параллельным переносом. Или другой пример: при доказательстве существования многогранника с данной развёрткой соответствие развёртки многограннику становится естественно однозначным после того, как многогранник рассматривается вместе с нанесённой на нём сетью рёбер некоторой развёртки. Мы ограничиваемся затем развёртками и сетями некоторого фиксированного строения. Наконец, имея целью сделать соответствие и взаимно однозначным, мы объединяем в один класс многогранники, совмещающиеся вместе с нанесёнными на них сетями движением или движением и отражением. Рассматриваемое многообразие A состоит из этих классов. При этом могло бы быть, что $\boldsymbol{A}$ пусто. Однако в доказательстве первого требования леммы об отображении, очевидно, уже содержится доказательство непустоты многообразия $\boldsymbol{A}$. Вместе с тем, говоря формально, пустое множество тоже есть n-мерное многообразие, потому что в определении многообразия требование непустоты отсутствует.

5. Этот общий метод приложим, конечно, не только к доказательствам существования для многогранников. Например, пользуясь им, можно доказать

*) Этот факт сам по себе, конечно, не означает наличия однозначного соответствия между объектами.

«основную теорему алгебры» о существовании n корней у многочлена n-й степени. В качестве многообразия $\boldsymbol{B}$ берётся многообразие многочленов n-й степени с комплексными коэффициентами и со старшим коэффициентом единица, исключая многочлены с кратными корнями. В качестве $\boldsymbol{A}$ берётся многообразие совокупностей A по n различных комплексных чисел без указания порядка. Оба многообразия $2n$-мерные *). Можно дать другие примеры применимости того же метода к задачам алгебры. Приложение к одной теореме существования в теории функции комплексной переменной было дано Г. М. Голузиным **). Стоит ещё отметить, что пока нет никакого другого метода, не считая аналогичного метода, о котором речь в § 6 n° n° 7, 8, который позволял бы доказать все полученные в этой книге теоремы существования. Кстати сказать, это суть вообще все пока известные общие теоремы существования рассматриваемого типа для выпуклых многогранников (т. е. при условии, что речь идёт о данных, определяющих многогранник). Только для теоремы Минковского и ей аналогичных (теоремы 9 и 11 § 4) известны другие методы доказательства.

§ 3. Задание многогранника развёрткой (Обзор результатов глав III, IV и V)

1. Речь идёт о склеивании многогранника из развёртки в том смысле, как это было определено в § 6 главы I.

В §§ 6 и 7 главы I были выяснены условия, которым должна удовлетворять развёртка замкнутого выпуклого многогранника:

1) «Условие положительности кривизны»: сумма углов, сходящихся при склеивании в одной вершине развёртки, должна быть не более 2π для каждой вершины.

Сумма углов, сходящихся в одной вершине выпуклого многогранника, всегда меньше 2π. Допускаемая возможность равенства суммы углов 2π означает только, что вершина развёртки может дать при склеивании не вершину многогранника, но точку внутри грани или ребра.

Следовательно, это условие необходимо для развёртки всякого выпуклого многогранника.

2) «Условие Эйлера»: если f, k, e обозначают число многоугольников, число рёбер и число вершин развёртки, то должно быть $f-k+e=2$.

Необходимость этого условия для развёртки замкнутого выпуклого многогранника доказана теоремой 6 § 7 главы I. (Напоминаем, что склеиваемые стороны и вершины считаются, соответственно, за одно ребро или одну вершину развёртки и что все многоугольники развёртки предполагаются по условию простыми.)

Казалось, нужно было бы добавить ещё, что развёртка не содержит бесконечных многоугольников и не имеет границы. Но тео-

---

*) Такое доказательство дано в моей работе: А. Д. Александров, Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования, Известия Акад. наук СССР, сер. мат., 1939, № 3.

**) Г. М. Голузин, О методе непрерывности в теории конформных отображений, Матем. сборник, т. 4 (46): 1, стр. 3 (1938). Возможно, известны и другие, может быть ещё более ранние, приложения того же метода.

ремами 7 и 8 § 7 главы I установлено, что для таких развёрток всегда $f-k+e<2$, а потому условие Эйлера уже обеспечивает конечность многоугольников и отсутствие границы.

2. Если считать за замкнутый выпуклый многогранник любой дважды покрытый выпуклый многоугольник, т. е. склеенный из двух наложенных друг на друга равных многоугольников, то можно утверждать следующее:

1. *Формулированные условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы из данной развёртки можно было склеить замкнутый выпуклый многогранник. При этом таких многогранников может быть только два: один является зеркальным отражением другого или, что то же самое, один получается из другого выворачиванием на левую сторону.* (Если многогранник имеет плоскость симметрии, то это даёт тот же многогранник. Многогранники, различающиеся только положением в пространстве, не считаются различными.)

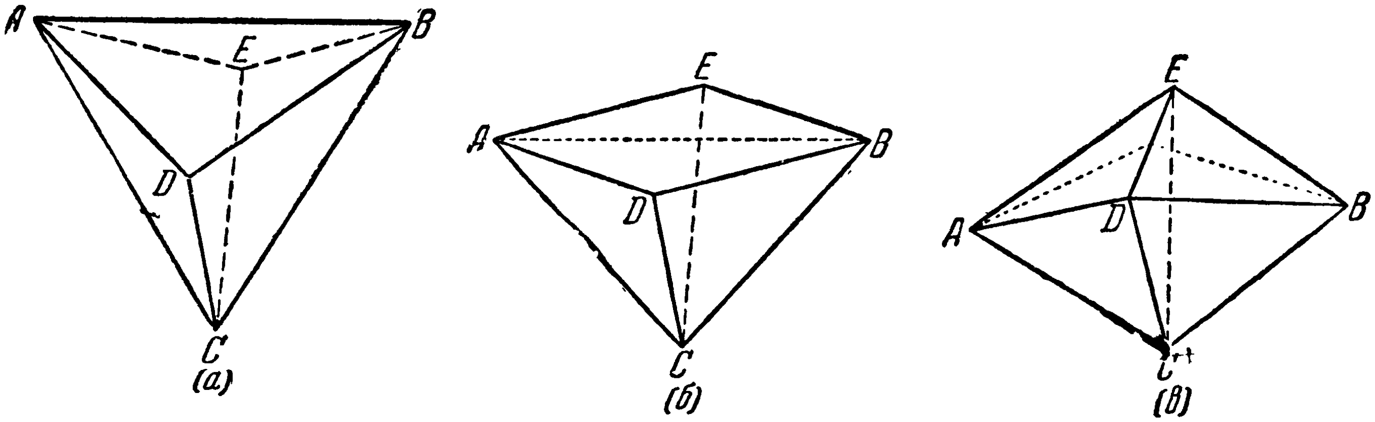
Случай дважды покрытого многоугольника мы неизбежно должны принять во внимание, потому что развёртка может, например, состоять из двух квадратов, которые по заданию нужно склеивать друг с другом по сторонам. Очевидно, все поставленные условия здесь выполнены. Хотя данный случай представляет вырождение, тем не менее мы не исключаем его, потому что это усложнило бы формулировку нашего результата. Далее, в этом параграфе и в главах III и IV, посвящённых доказательству указанного результата и других, с ним связанных, дважды покрытый выпуклый многоугольник считается выпуклым многогранником, если только явно не оговорено противное.

Собственно говоря, мы будем непосредственно доказывать теорему 1 в несколько иной формулировке. Как было доказано в § 7 главы I (теорема 6), развёртка, удовлетворяющая условию Эйлера $f-k+e=$ $=2$, гомеоморфна сфере. Поэтому теорему 1 можно формулировать так:

1*. *Из всякой гомеоморфной сферы развёртки, имеющей суммы углов при вершинах $\leqslant 2\pi$, можно склеить замкнутый выпуклый многогранник и притом только один с точностью до движения или движения и отражения.*

3. Преимущество условия Эйлера состоит в том, что оно, так же как другие условия, налагаемые на развёртку по её определении, проверяется без труда для каждой данной развёртки, и потому всегда имеется фактическая возможность решить вопрос, можно ли из неё склеить замкнутый выпуклый многогранник или нет. При этом вовсе не предполагается заранее, что из данной развёртки вообще можно склеить какой бы то ни было многогранник: такая возможность доказывается, если выполнены указанные условия. Так как такой выпуклый многогранник может быть только один (с точностью до движения и «выворачивания на левую сторону»), то при склеивании развёртки он получается как бы сам собой*). Однако мы не можем сказать заранее, какой именно он получится. Дело в том, что многоугольники и рёбра развёртки могут вовсе не соответствовать граням и рёбрам многогранника; заранее известно только, что вершинами многогранника будут те вершины развёртки, суммы углов вокруг которых $< 2\pi$. Примеры развёрток, рёбра которых не отвечают рёбрам многогранника, были приведены в § 6 главы I (черт. 37 и 38).

Определить по развёртке строение многогранника, т. е. найти в развёртке истинные его рёбра, представляется задачей, общее решение которой, повидимому, безнадёжно трудно. Она решается совсем



Черт. 64.

просто лишь для тетраэдра**). Дело в том, что с увеличением числа вершин число различных строений многогранников растёт крайне быстро.

Если $n(e)$ — число строений многогранника с e вершинами, то $n(4)=1$, $n(5)=2$, $n(6)=7$, $n(7)=34$, $n(8)=257$. Кроме того, при непрерывном изменении развёртки строение многогранника может меняться. Простой пример тому даётся на черт. 64, где многогранники (*б*) и (*в*) получаются из (*а*) путём непрерывного опускания вершин *A* и *B*. Пунктирная линия *AB* на многогранниках (*б*) и (*в*) соответствует ребру его развёртки, которая имеет то же строение, что и естественная развёртка многогранника (*а*).

*) Из развёртки выпуклого многогранника можно, конечно, склеить сколько угодно невыпуклых многогранников. Стоит лишь, например, продавить многогранник в окрестности какой-нибудь из вершин. Поэтому слова «сам собой» следует понимать в том смысле, что при склеивании нужно лишь следить за выпуклостью.

**) Рёбра многогранника должны быть кратчайшими линиями, соединяющими вершины развёртки, где суммы углов $< 2\pi$. Кроме того, между плоскими углами граней при одной вершине должны выполняться неравенства: каждый из углов не больше суммы остальных. Если уметь проводить в развёртке кратчайшие, для чего можно указать эффективный способ, то получается конечное число возможностей, из которых нужно выбрать одну, соответствующую строению многогранника. Следовательно, имеется принципиальная возможность решить задачу о склеивании многогранника эффективно. Впрочем, мне думается, эффективность не интересна: более важно то, что в силу единственности многогранник получается при склеивании «сам собой», какой нужно.

4. Поскольку развёртка не связана с многогранником однозначно, естественно спросить, какие однозначно связанные с многогранником данные заключаются в развёртке.

Как уже говорилось в n° 2 § 6 главы I, развёртка определяет «*внутреннюю метрику*» многогранника. Пусть X и Y — две точки многогранника P; за расстояние между ними на многограннике P принимается точная нижняя граница длин соединяющих их ломаных, лежащих на P. Это расстояние $\rho_P(XY)$ как функция пары точек X, Y и называется внутренней метрикой многогранника.

Пусть R — развёртка многогранника P. Если X' и Y' — две точки развёртки, то их можно соединить в развёртке R ломаными, составленными из отрезков, лежащих на многоугольниках развёртки и соединяющихся друг с другом в отождествлённых точках границ этих многоугольников. Точную нижнюю границу длин таких ломаных естественно считать расстоянием $\rho_R(X'Y')$ между точками X' и Y' в развёртке R. Если при склеивании из развёртки R многогранника P точки X', Y' переходят в точки X, Y на P, то, очевидно, $\rho_R(X'Y') = \rho_P(XY)$. Иными словами, склеивание многогранника P из развёртки R есть не что иное, как изометрическое отображение R на P, т. е. отображение, сохраняющее расстояния. Все развёртки одного и того же многогранника, очевидно, изометричны между собой (т. е. допускают отображения друг на друга, сохраняющие расстояния).

Развёртку можно трактовать как конкретный способ задания внутренней метрики многогранника. Как уже было указано, в силу условия Эйлера развёртка замкнутого выпуклого многогранника оказывается гомеоморфной сфере. Отобразив развёртку R на сферу S, мы перенесём на S метрику ρ_R развёртки R, т. е. каждой паре точек X, Y сферы S сопоставим расстояние $\rho_R(XY)$, равное расстоянию соответственных точек в развёртке R. (Это расстояние на сфере, конечно, не имеет ничего общего с собственной метрикой сферы; сфера мыслится здесь как абстрактное многообразие.) В этой метрике ρ_R каждая точка сферы S имеет окрестность такую же, как точка в развёртке, т. е. изометричную многогранному углу, в частности куску плоскости. Последний случай заведомо имеет место для точек, лежащих внутри многоугольников развёртки или внутри её рёбер: окрестность точки второго типа слагается из двух полуокрестностей, лежащих на многоугольниках, склеиваемых по данному ребру. Если в вершине A развёртки сумма углов не равна 2π, то её окрестность изометрична многогранному углу. С точки зрения внутренней метрики она полностью характеризуется суммой углов вокруг A или, как мы говорим, полным углом θ вокруг A. Разность $2\pi - \theta$ мы назвали кривизной вершины A. Условие об углах, налагаемое на развёртку выпуклого многогранника, утверждает, что кривизны всех вершин не отрицательны *).

*) Обратно, если на сфере S задана метрика ρ такая, что каждая точка сферы S имеет окрестность, изометричную многогранному углу, и расстояние между каждыми двумя точками X и Y в метрике ρ равно точной нижней

Метрику, которую можно задать посредством развёртки, мы называем *многогранной* метрикой, а если кривизны всех вершин $\geqslant 0$, то мы говорим, что это — *метрика положительной кривизны* (исключая случай, когда вовсе нет вершин с кривизной $\neq 0$; этот случай заведомо не может иметь места для развёрток, гомеоморфных сфере).

Высказанную выше теорему о существовании многогранника с данной развёрткой можно выразить теперь так:

1 **. *Для всякой многогранной метрики положительной кривизны, заданной на сфере, существует реализующий эту метрику замкнутый выпуклый многогранник и притом единственный с точностью до движения или движения и отражения.* (Утверждение, что многогранник P реализует метрику ρ_R, заданную на S, означает что P допускает изометричное в смысле метрики ρ_R отображение на S.)

В этой формулировке нет никакой многозначности: многогранник и его метрика связаны взаимно однозначно, если не различать равные многогранники.

Таким образом, теорема 1 ** даёт ответ на вопрос, поставленный в начале этого пункта. Внутренняя метрика и есть то «содержащееся в развёртке», что однозначно связано с многогранником.

5. Утверждение единственности, заключённое в теореме 1 *, доказывается в § 3 главы III в следующей несколько более сильной форме:

2. *Если задано изометрическое отображение одного замкнутого выпуклого многогранника на другой, то это отображение можно осуществить движением или движением и отражением.* В частности, речь может, конечно, итти об отображении многогранника на себя *). Это есть некоторое усиление уже упоминавшейся в § 1 теоремы Коши: два замкнутых выпуклых многогранника, одинаково составленные из равных граней, равны. Доказательство нашей теоремы сводится к теореме Коши с тем обобщением, что речь может итти и не об истинных гранях, а о любых многоугольниках, из которых многогранник составляется, хотя бы некоторые из этих многоугольников и представляли собой не целые грани, а только их части. Это обобщение теоремы Коши мы получаем как прямое следствие такой теоремы:

3. *Если два замкнутых выпуклых многогранника одинаково составлены из многоугольников с соответственно равными углами,*

границе длин кривых, соединяющих точки X и Y, причём длина измеряется в самой метрике ρ, то такую метрику можно задать посредством развёртки. Достаточно окружить каждую точку O окрестностью из треугольников с вершиной O и выбрать конечное число таких окрестностей, покрывающих всю сферу S. Полученные треугольники дадут в пересечениях конечное число многоугольников, которые образуют требуемую развёртку.

*) В § 5 гл. III мы докажем, что то же самое верно не только для замкнутых, но и для любых выпуклых многогранников с полной кривизной, равной, так же как у замкнутого многогранника, 4π. Например, сколь угодно тонкий вырез из поверхности куба, содержащий все вершины куба, не изгибается с сохранением выпуклости!

то все двугранные углы таких многогранников соответственно равны.

Читатель, знакомый с доказательством Коши, сам заметит, что именно такую теорему доказал, хотя и не формулировал, сам Коши с тем лишь ограничением, что у него речь идёт именно о гранях многогранника. Теорема 3 имеет самостоятельный интерес, потому что многогранники с равными плоскими углами могут быть далеки от изометричности; простой пример тому дают все прямоугольные параллелепипеды.

Теорему существования замкнутого выпуклого многогранника с данной развёрткой мы доказываем в §§ 1—3 главы IV, опираясь, в частности, на теорему 2.

6. Развёртка бесконечного выпуклого многогранника, помимо общих для всех развёрток условий, указанных в n° 1, должна удовлетворять ещё двум условиям:

1) *Развёртка гомеоморфна плоскости.*

2) *Сумма углов, сходящихся в одной вершине,* $\leqslant 2\pi$ *для каждой вершины.*

Необходимость первого условия ясна из того, что бесконечный выпуклый многогранник гомеоморфен плоскости. Второе условие необходимо по той же причине, по какой оно необходимо в случае развёртки замкнутого выпуклого многогранника.

Если к бесконечным выпуклым многогранникам присоединить также дважды покрытые бесконечные выпуклые многоугольники, то можно утверждать следующее:

4. *Из всякой развёртки, гомеоморфной плоскости и имеющей суммы углов при вершинах* $\leqslant 2\pi$, *можно склеить бесконечный выпуклый многогранник* *).

Эту теорему мы докажем в § 4 главы IV.

Условие гомеоморфности плоскости равносильно двум условиям, которые для каждой данной развёртки проверяются совсем просто:

1а) *Развёртка содержит хотя бы один бесконечный многоугольник.*

1б) *Если f, k, e — числа многоугольников, рёбер и вершин развёртки, то $f - k + e = 1$.*

Равносильность этих условий тому, что развёртка гомеоморфна плоскости, была доказана в § 7 главы I (теорема 9).

Бесконечный многогранник, вообще говоря, не определяется своей развёрткой однозначно, как видно уже на примере многогранного угла, который всегда можно изгибать, не меняя его граней, если их более

*) На языке метрики эту теорему можно формулировать так: всякая полная многогранная метрика положительной кривизны, заданная на плоскости, реализуема бесконечным выпуклым многогранником. При этом полной называется метрика, в которой всякое ограниченное бесконечное множество точек имеет точку сгущения.

трёх. Единственный случай, когда такая однозначность имеет место, содержится в следующей теореме:

5. *Если полная кривизна, т. е. сумма кривизн вершин развёртки равна* 2π, *то из неё можно склеить только один* (*с точностью до движения или движения и отражения*) *бесконечный выпуклый многогранник.* Или: *если кривизна бесконечного выпуклого многогранника равна* 2π, *то всякое его изометрическое отображение на выпуклый же многогранник сводится к движению или движению и отражению.*

Полная кривизна бесконечного выпуклого многогранника вообще не превосходит 2π. Для многогранников с полной кривизной $< 2\pi$ имеет место следующая теорема:

6. *Пусть* R — *развёртка, удовлетворяющая указанным выше необходимым условиям и имеющая полную кривизну* $\omega < 2\pi$. *В развёртке* R *задаётся ориентация. Пусть* L — *полупрямая на одном из её бесконечных многоугольников. Пусть* V — *выпуклый многогранный угол с кривизной* ω *и с данной ориентацией, т. е. данным обходом вокруг вершины, а* L_1 — *какая-либо его образующая. Существует выпуклый многогранник* P, *склеенный из развёртки* R, *имеющий* V *в качестве предельного угла и притом так, что при бесконечном подобном сжатии* P *в* V *линия на* P, *соответствующая* L, *переходит в* L_1, *а ориентация на* P, *определённая ориентацией развёртки* R, *переходит в данную ориентацию угла* V. *Такой многогранник* P — *единственный с точностью до переноса, если угол* V *закреплён в пространстве.* (Доказательство см. в § 5 гл. IV.)

Для единственности многогранника здесь нужно, следовательно, к заданию развёртки R присоединить задание предельного угла V, соответственных полупрямых L и L_1 на R и V, а также соответственных ориентаций R и V. Перемена ориентации при данном V не может быть осуществлена простым отражением, потому что при отражении многогранника P его предельный угол также претерпевает отражение и, следовательно, становится, вообще говоря, отличным от заданного угла V. Если оставлять R, V, L неизменными и вращать L_1 по углу V, то многогранник P будет как бы оборачиваться вокруг угла V, причём строение его будет, вообще говоря, меняться. Точно так же при непрерывном изменении угла V многогранник P тоже будет изгибаться. Равенство кривизн развёртки R и угла V необходимо, потому что, как показывает теорема 3 § 5 главы I, кривизна бесконечного выпуклого многогранника равна кривизне его предельного угла.

Теоремы 5 и 6 принадлежат С. П. Оловянишникову*). Теорему 5 и утверждение единственности, заключающееся в теореме 6, мы до-

*) С. П. Оловянишников, Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей, Матем. сборник, т. 18 (60): 3 (1946).

кажем в главе III (§§ 3, 4). Там же (§ 2) доказывается теорема для бесконечных многогранников, аналогичная теореме 3.

7. *Если у двух бесконечных выпуклых многогранников, одинаково составленных из любых многоугольников с соответственно равными углами, предельные углы равны, то двугранные углы этих многогранников также равны.* (Если предельный угол одного из многогранников сводится к полупрямой, то последнее условие лишнее, так как тогда из одного равенства соответственных углов многоугольников следует равенство предельных углов.)

Наконец, мы устанавливаем аналогичные результаты для многогранников, ограниченных каждый одной ломаной. В этом случае для справедливости утверждений теорем 2 и 3 нужно наложить дополнительное условие на границы многогранников: углы между смежными граничными рёбрами двух многогранников должны быть соответственно равны (см. § 5 гл. III).

Однако никаких эффективных необходимых и достаточных условий, при которых из данной развёртки можно склеить выпуклый многогранник с границей, мы не знаем. Тривиальное условие, что развёртку можно дополнить до развёртки замкнутого (или бесконечного) многогранника, не эффективно. Однако оно в ряде случаев позволяет формулировать легко проверяемые достаточные условия. Соответствующие результаты будут получены в § 1 главы V.

Вопрос о том, когда многогранник с границей определяется своей развёрткой (метрикой) и когда он допускает изгибания (т. е. непрерывные деформации с сохранением метрики), рассматривается в § 5 главы III и в § 2 главы V. Здесь получается ряд интересных результатов, но исчерпывающего решения этого вопроса мы также не имеем.

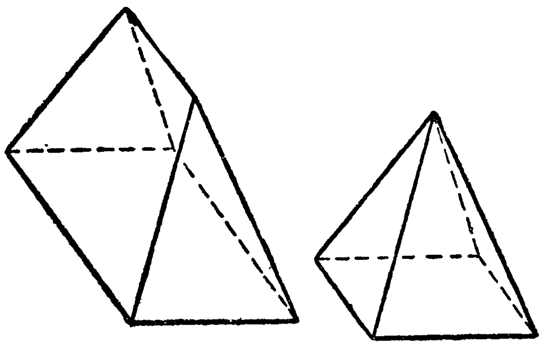
§ 4. Многогранники с данными направлениями граней (Обзор результатов глав VI, VII и VIII)

1. Направление грани выпуклого многогранника задаётся внешней нормалью к ней. Мы будем считать грани и опорные плоскости многогранника параллельными только в том случае, если параллельны их внешние нормали*). Нетривиальность задач, касающихся многогранников с заданными направлениями граней, выясняется, между прочим, из того, что эти направления, вообще говоря, вовсе ещё не определяют строение многогранника, как это видно на простом примере многогранников, изображённых на черт. 65. В применении же к выпуклым многоугольникам все приведённые дальше теоремы либо просто тривиальны, как, например, наша основная теорема 8, либо доказываются совсем просто; некоторое исключение составляют теоремы 10 и 11, которые и для многоугольников доказываются не очень уж просто.

*) Здесь и далее, говоря о том, что векторы параллельны, всякий раз понимаем под этим и то, что они одинаково направлены.

В §§ 1—3 главы VI мы докажем следующую теорему:

8. *Если у двух замкнутых выпуклых многогранников каждой грани одного соответствует параллельная грань другого, и обратно, и если их соответственные грани не могут быть помещены одна в другой параллельными переносами (т. е. они либо выступают одна из другой, либо совпадают), то многогранники равны и параллельно расположены.* Можно даже считать, что если на одном из многогранников нет грани с той же внешней нормалью, что и на другом, то она как бы есть, но вырождается в ребро, лежащее в соответствующей опорной плоскости. Это ребро должно тогда не умещаться в соответствующей грани другого многогранника.



Черт. 65.

Эту же теорему можно высказать и в такой форме:

Два замкнутых выпуклых многогранника либо равны и параллельно расположены, либо на одном из них есть хотя бы одна такая грань Q, что на втором многограннике элемент его границы (грань, ребро или вершина), лежащий в опорной плоскости, параллельной Q, можно путём параллельного переноса поместить в Q.

Частным следствием теоремы 8 является уже упоминавшаяся теорема единственности Минковского:

9. *Если у двух замкнутых выпуклых многогранников грани соответственно параллельны и имеют равные площади, то многогранники равны и параллельно расположены.* Иными словами, замкнутый выпуклый многогранник однозначно определяется направлениями и площадями своих граней. Действительно, равновеликие многоугольники нельзя поместить один в другом (если они не равны), и потому эта теорема содержится в теореме 8.

Такого рода следствий теоремы 8 можно назвать сколько угодно. Так, функцию $f(Q)$ выпуклого многоугольника Q будем называть монотонной, если $f(Q_1) < f(Q_2)$ всякий раз, когда Q_1 содержится в Q_2 и не совпадает с Q_2. Тогда, если у двух замкнутых выпуклых многоугольников грани соответственно параллельны и для каждой пары параллельных граней $Q_i^{(1)}$ и $Q_i^{(2)}$ есть такая монотонная функция f_i, что $f_i(Q_i^{(1)}) = f_i(Q_i^{(2)})$, то многогранники равны и параллельно расположены. Действительно, вследствие монотонности функций f_i из равенства $f_i(Q_i^{(1)}) = f_i(Q_i^{(2)})$ следует, что параллельные грани $Q_i^{(1)}$), $Q_i^{(2)}$ нельзя поместить одну в другой, а потому равенство многогранников следует из теоремы 8.

Беря за все f_i площадь, получаем теорему 9, беря за все f_i периметр, получаем теорему об однозначной определяемости многогранника направлениями и периметрами граней, и т. д. и т. д.

Теорема 8 допускает приложения в решении некоторых, хотя и более частных, но важных задач, которые будут рассмотрены в главе VIII. Так, с помощью неё будет доказана теорема Линделёфа*):

10. *Среди всех замкнутых выпуклых многогранников с данными направлениями и данной площадью наибольший объём ограничивает многогранник, описанный вокруг шара.*

Эта теорема получится как частное следствие одной теоремы Минковского, имеющей большой самостоятельный интерес. Речь идёт о так называемом смешении выпуклых тел и об их смешанных объёмах (см. § 2 гл. VI и §§ 2 и 3 гл. VII). Другое приложение теоремы 8 касается нахождения всех возможных параллелоэдров, т. е. (телесных) выпуклых многогранников, которыми можно заполнять пространство, прикладывая их друг к другу параллельно по целым граням, подобно ячейкам пчелиных сот (см. § 1 гл. VIII).

2. Минковский доказал не только единственность, но и существование замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней.

11. *Если единичные векторы $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ и числа $F_1, \ldots, F_n$ удовлетворяют условиям:*

1) векторы $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ все различны и не компланарны;

2) все числа $F_i > 0$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{m} \boldsymbol{n}_i F_i = 0$,

то существует замкнутый выпуклый многогранник, у которого $\boldsymbol{n}_i$ и F_i суть внешние нормали и площади его граней.

Эту теорему мы докажем в § 1 главы VII методом, основанным на «лемме об отображении»; в § 2 главы VII мы воспроизведём также доказательство самого Минковского.

Никакие другие теоремы существования, аналогичные теореме 11, не известны. Мы, например, имеем теорему единственности многогранника с данными периметрами граней, но не имеем соответствующей теоремы существования по той простой причине, что не известны необходимые условия, которым должны удовлетворять периметры граней замкнутого выпуклого многогранника. Если бы такие условия удалось выяснить, то наш метод позволил бы, надо думать, доказать и соответствующую теорему существования. Это замечание относится к любым другим монотонным функциям граней.

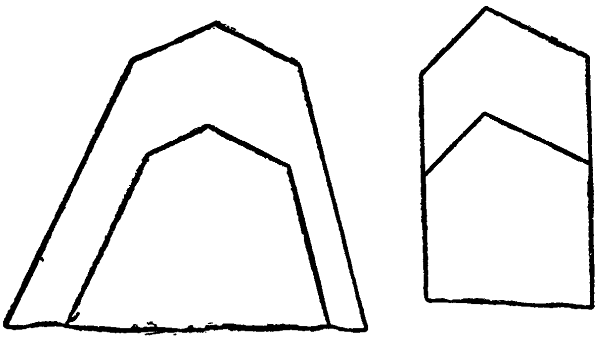
Ясно, что здесь всегда должны иметь место некоторые нетривиальные условия. Замкнутый выпуклый многогранник с m гранями данных направлений определяется m расстояниями плоскостей его граней от

---

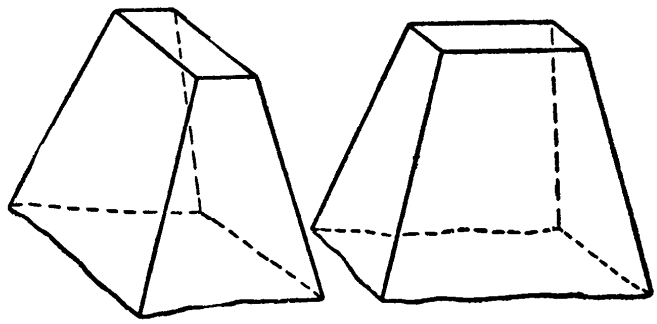
*) L. Lindelöf, Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume, Mathematische Annalen, т. 2, стр. 150 (1876). Другое доказательство дал Минковский в 1897 г. в той же работе, где он доказал теоремы 9 и 11; русский перевод: «Общие теоремы о выпуклых многогранниках», Успехи матем. наук, вып. 2 (1936).

какой-нибудь его внутренней точки. Однако задание, например, m периметров $l_1, \ldots, l_m$ его граней определяет его лишь с точностью до переноса, что даёт не m, а всего $m-3$ переменных, поскольку перенос задаётся тремя составляющими вектора переноса. Поэтому периметры должны удовлетворять условиям, выделяющим в m-мерной области положительных значений $l_1, \ldots, l_m$ некоторую $(m-3)$-мерную область значений, действительно возможных для периметров граней. Вся трудность состоит в отыскании условий, определяющих эту область значений $l_1, \ldots, l_m$, допустимых для периметров граней.

3. Условие равенства замкнутых многогранников, данное в теореме 8, для бесконечных многогранников не имеет смысла в применении



Черт. 66.



Черт. 67.

к их бесконечным граням; оно не может быть выполнено, если многогранники равны и параллельно расположены, потому что любой из двух равных и параллельно расположенных бесконечных многоугольников можно поместить в другом, как это видно на черт. 66. Требовать же выполнения этого условия для одних конечных граней явно недостаточно, как это видно из простейшего примера черт. 67. Поэтому необходимо дополнительное условие, налагаемое на бесконечные грани:

Бесконечные многогранники должны иметь равные и параллельные «бесконечные части», т. е. от каждого из них можно отрезать (достаточно большую) конечную часть так, что оставшиеся бесконечные части можно будет совместить путём параллельного переноса.

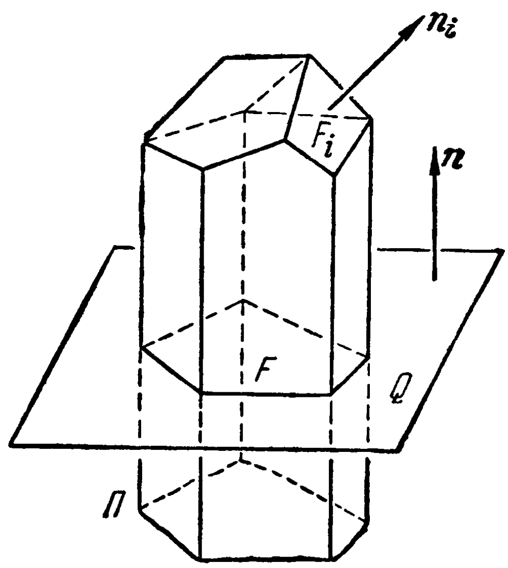
Это условие равносильно, как очевидно, тому, что можно совместить одним общим переносом плоскости всех бесконечных граней многогранников. Вводя это условие, получаем теорему, доказываемую в § 4 главы VI.

12. *Если у двух бесконечных выпуклых многогранников бесконечные части равны и параллельны, а ни одну конечную грань нельзя поместить в другой параллельным переносом, то многогранники равны и параллельно расположены.*

В случае конечных незамкнутых многогранников мы получим в § 5 главы VI аналогичные теоремы, вводя некоторые условия, налагаемые на их крайние, т. е. прилегающие к границе, грани и граничные рёбра. Теорему 12 о бесконечных многогранниках легко пересказать для конечных многогранников, если вспомнить замечания, сделанные в n° 6 § 1 главы I, о замене бесконечных многогранников конечными, но допускающими продолжение крайних граней. В этой связи стоит заметить, что теоремы такого рода можно рассматривать как теоремы о многогранниках, край которых задан, а сами они подчинены тем или иным условиям. Это есть не что иное, как «краевая задача», но поставленная в рамках элементарной геометрии. Вообще же в краевых задачах речь идёт о функции (или, если угодно, поверхности), которая задаётся на краю какой-либо данной области и должна удовлетворять в самой области тем или иным условиям — обычно требованию удовлетворять некоторому дифференциальному уравнению. (Связь наших теорем о многогранниках с такими краевыми задачами для дифференциальных уравнений выяснится ближе в параграфах «Обобщение» гл. VI и VII.)

4. Из теоремы 12 о равенстве бесконечных многогранников можно извлечь следствие, аналогичное теореме 9 Минковского:

Если у двух бесконечных выпуклых многогранников бесконечные части равны и параллельны, а конечные грани попарно параллельны и имеют равные площади, то многогранники равны и параллельно расположены. Аналогичный результат получаем, беря вместо площади любые монотонные функции граней; вывод будет тот же, что и выше, в n° 1.



Черт. 68.

Вместе с тем, подобно теореме 11 о существовании замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней, можно формулировать аналогичные теоремы для бесконечных многогранников. Для этого выясним сначала необходимые условия, которым должны удовлетворять нормали и площади граней бесконечного многогранника с параллельными бесконечными рёбрами.

Бесконечная часть такого многогранника представляет собой бесконечную в одну сторону выпуклую призму П, и если $\boldsymbol{n}$ — вектор, направленный вдоль её ребра в сторону конечной части многогранника, то внешние нормали к конечным граням многогранника должны образовывать с $\boldsymbol{n}$ острые углы (черт. 68).

Проекции конечных граней на плоскость Q, перпендикулярную к $\boldsymbol{n}$, покрывают сечение призмы П этой плоскостью. Поэтому, если $\boldsymbol{n}_i$ — внешние нормали и F_i — площади конечных граней, а F — площадь указанного сечения, то

$$F = \sum_i (\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_i) F_i,$$

потому что $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_i)F_i$ есть не что иное, как площадь проекции i-й грани на плоскость Q.

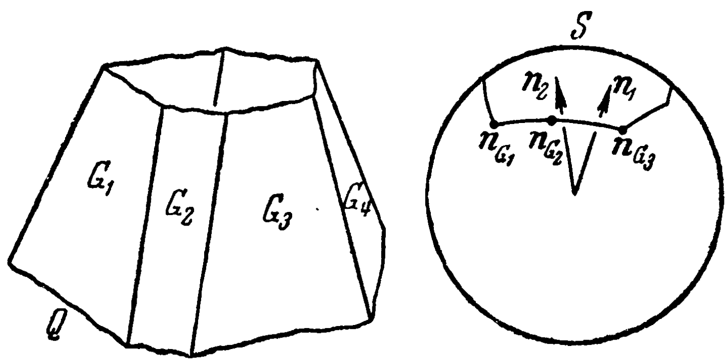
Оказывается, что эти условия являются также достаточными для существования выпуклого многогранника с данной бесконечной частью и данными площадями и нормалями конечных граней. Формулируем соответствующую теорему, доказательство которой даётся в § 3 главы VII.

13. *Пусть задана бесконечная выпуклая призма* Π *и пусть* $\boldsymbol{n}$ — *единичный вектор вдоль её ребра. Пусть* F — *площадь сечения этой призмы плоскостью, перпендикулярной к* $\boldsymbol{n}$. *Пусть, далее,* $\boldsymbol{n}_1, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{n}_m$ — *единичные векторы, образующие с* $\boldsymbol{n}$ *острые углы. Пусть, наконец,* $F_1, \ldots, F_m$ — *такие положительные числа, что*

$$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_i)\, F_i = F.$$

Тогда существует выпуклый многогранник с бесконечной частью Π, *конечные грани которого имеют внешние нормали* $\boldsymbol{n}_i$ *и площади* F_i.

В силу приведённого выше следствия теоремы 12 такой многогранник — единственный с точностью до переноса вдоль вектора $\boldsymbol{n}$, потому что только при таком переносе призма Π переходит сама в себя.



Черт. 69.

Для бесконечных многогранников с непараллельными бесконечными рёбрами имеет место гораздо более общий результат:

14. *Пусть* Q — *бесконечная часть какого-нибудь бесконечного выпуклого многогранника с непараллельными бесконечными рёбрами* (*черт.* 69). *Пусть* S — *сферический многоугольник, натянутый на сферические изображения граней из* Q, *и* $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ — *векторы, идущие из центра во внутренние точки многоугольника* S. *Пусть, наконец,* $f_1, \ldots, f_m$ — *любые монотонные непрерывные функции многоугольника, обращающиеся в нуль и в бесконечность вместе с площадью многоугольника.*

Тогда, какие бы положительные числа $a_1, \ldots, a_m$ *ни задать, существует бесконечный выпуклый многогранник с бесконечной частью* Q *и конечными гранями, имеющими внешние нормали* $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$, *причём функции* $f_1, \ldots, f_m$ *принимают для этих граней значения* $a_1, \ldots, a_m$, *так что* $f_i = a_i$ *для грани с нормалью* $\boldsymbol{n}_i$.

Из следствия теоремы 12, приведённого в начале этого пункта, вытекает, что такой многогранник — единственный, потому что при закреплённой бесконечной части Q перенос невозможен.

Необходимость условий, наложенных в теореме 14 на нормали, была уже отмечена в § 2. Сферическое изображение бесконечного выпуклого многогранника представляет собой сферический выпуклый многоугольник, натянутый на сферические изображения его бесконечных граней, в том смысле, что его вершины суть концы проведённых из центра сферы внешних нормалей к граням с непараллельными бесконечными рёбрами, а концы нормалей к граням с параллельными бесконечными рёбрами лежат на его сторонах. Концы же нормалей к конечным граням лежат внутри этого сферического многоугольника.

Задание бесконечной части Q равносильно заданию плоскостей её граней. Однако не всякие плоскости могут служить плоскостями граней какого-либо бесконечного многогранника. Для этого согласно сказанному необходимо, чтобы нормали к ним, проведённые из центра сферы, шли во все вершины и ещё, может быть, на стороны некоторого выпуклого сферического многоугольника. Однако этого ещё недостаточно: нужны условия на расстояния этих плоскостей от начала. Они будут выяснены дальше в n° 7.

Теорема 14 кажется на первый взгляд удивительной по своей общности. Однако на самом деле она представляет собой гораздо более поверхностный факт, чем теоремы 11 и 13, хотя в них фигурирует только площадь. Это будет видно из доказательства теоремы 14, предложенного А. В. Погореловым, которое воспроизводится в § 4 главы VII. При этом мы получим даже несколько более общий результат, сняв условие, чтобы функции f_i обращались в нуль вместе с площадью.

Для многогранников, имеющих границу, нам не известны никакие подобные теоремы, не считая довольно тривиальных следствий самих теорем 8, 13 и 14. Трудность состоит здесь в формулировке условий, которые нужно одновременно наложить на площади граней и границу многогранника, так как между ними, очевидно, есть некоторая зависимость.

5. Все формулированные выше теоремы 9—14 дословно обобщаются в пространство любого числа измерений, хотя метод доказательства для теорем 9, 10 и 12 приходится при этом изменить*). Исключение составляет теорема 8 об общем условии равенства замкнутых многогранников. То, что она не верна в четырёхмерном пространстве, видно на следующем простом примере. У куба с ребром 2 и прямоугольного параллелепипеда (в четырёхмерном пространстве) с рёбрами 1, 1, 3, 3 грани не помещаются одна в другой, хотя эти многогранники и не равны.

6. Замкнутый или бесконечный выпуклый многогранник определяется заданием плоскостей его граней: он является границей

*) Такое общее доказательство теорем 9 и 10 дано Минковским и излагается в § 3 гл. VIII. Общее доказательство теоремы 12 дано Погореловым и излагается в § 5 гл. VII.

пересечения полупространств, ограниченных этими плоскостями. Если заданы единичные векторы $\boldsymbol{n}_i$ внешних нормалей к граням, то плоскости граней определяются, если заданы ещё их расстояния от начала координат, причём эти расстояния считаются положительными, если направление от начала к плоскости совпадает с направлением внешней нормали, в противном же случае они считаются отрицательными. С таким условием о знаках эти расстояния мы называем *опорными числами* многогранника *). Опорное число h_i есть не что иное, как правая часть в нормальном уравнении плоскости грани

$$\boldsymbol{n}_i \boldsymbol{x} = h_i,$$

где $\boldsymbol{n}_i$ — единичная внешняя нормаль, а $\boldsymbol{x}$ — вектор, идущий из начала в переменную точку плоскости.

Полупространство, содержащее многогранник, определяется неравенством

$$\boldsymbol{n}_i \boldsymbol{x} \leqslant h_i$$

(а не противоположным, потому что нормаль $\boldsymbol{n}_i$—внешняя, т. е. идёт в полупространство, не содержащее многогранника). Сам многогранник есть граница пересечения этих полупространств.

Опорные числа не могут быть произвольными. Пусть векторы внешних нормалей суть $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$, а опорные числа $h_1, \ldots, h_m$. Пусть вектор $\boldsymbol{n}_k$ представляется как линейная комбинация других векторов $\boldsymbol{n}_i$ с неотрицательными коэффициентами:

$$\boldsymbol{n}_k = \sum_{i \neq k} \nu_{ki} \boldsymbol{n}_i \qquad (\nu_{ki} \geqslant 0). \tag{1}$$

Если $\boldsymbol{x}$ — вектор, идущий из начала во внутреннюю точку X k-ой грани, то

$$\boldsymbol{n}_k \boldsymbol{x} = h_k. \tag{2}$$

Вместе с тем так как точка X принадлежит многограннику и не лежит ни на одной из плоскостей других граней, то при $i \neq k$

$$\boldsymbol{n}_i \boldsymbol{x} < h_i.$$

Умножая эти неравенства на числа $\nu_{ki} \geqslant 0$, получим

$$\sum \nu_{ki} \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{x} < \sum \nu_{ki} h_i$$

или в силу (1) и (2)

$$h_k < \sum_{i \neq k} \nu_{ki} h_i. \tag{3}$$

*) Читатель, знакомый с теорией выпуклых тел, заметит, что опорные числа суть не что иное, как значения опорной функции многогранника для единичных векторов внешних нормалей к его граням. Их задание заменяет задание опорной функции. Отсюда их название. Минковский в своей работе «Общие теоремы о выпуклых многогранниках» называет их тангенциальными параметрами. Понятие опорной функции введено Минковским.

Если же вектор $\boldsymbol{n}_k$ представлен как линейная комбинация других векторов $\boldsymbol{n}_i$ с неположительными коэффициентами:

$$\boldsymbol{n}_k = \sum_{i \neq k} \nu_{ki} \boldsymbol{n}_i \qquad (\nu_{ki} \leqslant 0), \tag{4}$$

то точно так же получим

$$h_k > \sum_{i \neq k} \nu_{ki} h_i. \tag{5}$$

Следовательно, *для того чтобы данные числа* $h_1, \ldots, h_m$ *были опорными числами выпуклого многогранника с внешними нормалями* $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$, *необходимо, чтобы каждому разложению* (1) *или* (4) *любого из векторов* $\boldsymbol{n}_k$ *со сплошь неотрицательными или неположительными коэффициентами* ν_{ki} *соответствовало неравенство* (3) *или* (5).

В §§ 5 и 6 главы VII мы докажем, что это условие является также достаточным:

15. *Пусть имеется* m *различных некомпланарных единичных векторов* $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$. *Пусть каждому из этих векторов отнесено по числу* $h_1, \ldots, h_m$ *так, что если вектор* $\boldsymbol{n}_k$ *представлен как линейная комбинация других векторов со сплошь неотрицательными или сплошь неположительными коэффициентами*:

$$\boldsymbol{n}_k = \sum_{i \neq k} \nu_{ki} \boldsymbol{n}_i,$$

то

$$h_k < \sum_{i \neq k} \nu_{ki} h_i, \qquad \textit{если все } \nu_{ki} \geqslant 0,$$

и

$$h_k > \sum_{i \neq k} \nu_{ki} h_i, \qquad \textit{если все } \nu_{ki} \leqslant 0.$$

Тогда существует выпуклый многогранник, грани которого имеют внешние нормали $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ *и соответственно опорные числа* $h_1, \ldots, h_m$.

Если векторы $\boldsymbol{n}_i$ *направлены в одно полупространство, то этот многогранник — бесконечный. В противном случае он замкнутый.* (Предполагается, что полупространство содержит ограничивающую его плоскость.) *)

---

*) В моей работе «Применение теоремы об инвариантности области...» в Известиях АН СССР за 1939 г. эта теорема формулирована неверно: забыты неравенства для h_k, соответствующие разложениям векторов $\boldsymbol{n}_k$ с неположительными ν_{ki}. Одних неравенств с неотрицательными ν_{ki} недостаточно, как видно из следующего простого примера. Возьмём векторы $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_4$ внешних нормалей к граням правильного тетраэдра. Ни один из них не разлагается по другим иначе, как с отрицательными коэффициентами. Поэтому условия на h_k с положительными коэффициентами ν_{ki} отпадают, и, отбрасывая условия с отрицательными ν_{ki}, мы не получим никаких условий. Между тем легко передвинуть плоскости граней правильного тетраэдра так, чтобы они не ограничивали никакого многогранника с соответствующими внешними нормалями.

Достаточно требовать выполнения только тех неравенств для чисел h_k, которые соответствуют разложениям каждого вектора $\boldsymbol{n}_k$ по трём другим векторам $\boldsymbol{n}_i$.

Последнее замечание существенно по следующей причине. Если вектор $\boldsymbol{n}_k$ допускает разложение по четырём или более данным векторам с положительными (отрицательными) коэффициентами, то он допускает бесконечно много таких разложений. Разложение же по трём векторам вообще может быть только одно. Поэтому последнее замечание позволяет ограничиться конечным числом неравенств для чисел h_k и тем самым делает условия теоремы эффективно проверяемыми.

На первый взгляд доказательство теоремы 15 может показаться простым: «Возьмём пересечение полупространств $\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{x} \leqslant h_i$; оно и даст искомый многогранник». Однако это заключение слишком поспешно, потому что ещё не известно, не будет ли такое пересечение пустым. В этом и состоит первая трудность в доказательстве теоремы 15.

7. Из теоремы 15 легко вывести условие, необходимое и достаточное для того, чтобы данные плоскости были плоскостями бесконечных граней какого-либо выпуклого многогранника.

16. *Для того чтобы плоскости $P_1, \ldots, P_m$ с нормалями $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ были плоскостями бесконечных граней какого-либо выпуклого многогранника (с внешними нормалями $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$), необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, нормали $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ шли в вершины и, быть может, ещё в точки на сторонах некоторого сферического выпуклого многоугольника* (а именно, того многоугольника, какой должно представлять сферическое изображение всего многогранника с данными бесконечными гранями), *и, во-вторых, чтобы опорные числа $h_1, \ldots, h_m$ плоскостей $P_1, \ldots, P_m$ удовлетворяли условиям теоремы* 15.

Необходимость условий нам уже известна. Они также достаточны. Действительно, в силу теоремы 15 при выполнении её условий существует многогранник с нормалями $\boldsymbol{n}_i$ и опорными числами h_i. Он будет бесконечный, так как нормали $\boldsymbol{n}_i$ направлены в одно полупространство, и все его грани будут бесконечными, потому что нормаль к конечной грани шла бы внутрь сферического многоугольника, натянутого на концы нормалей к бесконечным граням, а между тем по условию все нормали $\boldsymbol{n}_i$ лежат на границе такого многоугольника.

Если векторы $\boldsymbol{n}_i$ идут к границе выпуклого многоугольника или, что равносильно, лежат на поверхности выпуклого многогранного угла, то, как очевидно, ни один из них не разлагается по другим с отрицательными коэффициентами. Поэтому соответствующее условие теоремы 15 просто отпадает.

Тот факт, что вектор $\boldsymbol{n}$ разлагается по трём векторам $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$ с положительными коэффициентами, означает, что он идёт внутри трёхгранного угла с рёбрами $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$. Поэтому, когда все векторы $\boldsymbol{n}_i$ расположены по поверхности выпуклого многогранного угла, то ни один из них не может разлагаться по трём (и более) другим с положительными коэффициентами.

Остаётся одна возможность, — что вектор n_k лежит в одной плоскости с двумя другими n_i, n_j и идёт в угле между ними. Тогда он и разлагается по ним с положительными коэффициентами. Это означает, что конец вектора n_k лежит внутри стороны сферического многоугольника, натянутой на концы рассматриваемых трёх векторов. Такой вектор, как мы знаем, является нормалью к бесконечной грани с параллельными бесконечными рёбрами.

Следовательно, условия теоремы 15 в данном случае крайне упрощаются и подлежат проверке лишь для векторов, идущих внутрь сторон сферического многоугольника. Если же таких векторов вовсе нет, то никаких разложений, фигурирующих в теореме 15, для векторов n_i быть не может и потому и условий никаких нет, т. е. любые плоскости с такими нормалями n_i будут плоскостями бесконечных граней некоторого многогранника.

Особый случай получается, когда все векторы n_i компланарны, так что натянутый на их концы сферический многоугольник оказывается полусферой. Это соответствует тому случаю, когда бесконечная часть многогранника является призмой. Здесь условия на числа h_i должны учитываться полностью. Но h_i можно рассматривать как опорные числа многоугольника, получающегося в сечении призмы. Тогда в теореме 15 достаточно брать разложения по двум векторам.

Теоремы 15 и 16 обобщаются на пространство любого числа измерений n с тем лишь изменением, что в n-мерном пространстве нужно брать разложения по n векторам.

§ 5. Многогранники с вершинами на данных лучах (Обзор результатов главы IX)

1. Возьмём в пространстве какую-либо точку O и проведём из неё лучи $l_1, \ldots, l_m$, не направленные в одно полупространство. Мы будем рассматривать замкнутые выпуклые многогранники с вершинами на этих лучах; по условию точка O должна лежать внутри такого многогранника. Такие многогранники существуют: например, многогранник, вписанный в шар с центром в точке O.

Пусть $r_1, \ldots, r_m$ — расстояния вершин многогранника от точки O. Числа r_i не произвольны, что следует из теоремы:

17. *Для того чтобы положительные числа $r_1, \ldots, r_m$ были расстояниями от O до вершин замкнутого выпуклого многогранника на лучах $l_1, \ldots, l_m$, необходимо и достаточно следующее условие*:

Если e_i обозначают единичные векторы вдоль лучей l_i и $e_k = \sum \nu_{ki} e_i$ есть разложение любого из векторов e_k по другим *вектором с неотрицательными коэффициентами, то*

$$\frac{1}{r_k} < \sum \frac{\nu_{kl}}{r_l}.$$

Достаточно, чтобы эти неравенства выполнялись для разложения векторов e_k по трём другим.

Доказательство этой теоремы элементарно. Взяв точки A_l на данных лучах, построим выпуклую оболочку совокупности этих точек. Это будет многогранник P. Для того чтобы любая из точек A_l была его вершиной, необходимо и достаточно, чтобы она не попадала в выпуклую оболочку совокупности остальных. Отсюда и следует необходимость и достаточность условия теоремы, как будет показано в § 1 главы IX.

Между теоремой 17 и приведённой в предыдущем параграфе теоремой 15 есть формальная аналогия, имеющая простое геометрическое основание. Оно состоит в том, что многогранник с вершинами на лучах e_i путём полярного преобразования преобразуется в многогранник, грани которого имеют внешние нормали e_i. При этом, если r_i суть расстояния вершин первого многогранника от точки O, то опорные числа второго будут $h_i = \frac{1}{r_i}$. (Полярное преобразование было рассмотрено в n° 4 § 5 главы I.) Однако полного перехода от теоремы 17 к теореме 15 нет, так как в теореме 17 все $r_i > 0$, в то время как в теореме 15 допускаются $h_i < 0$.

2. Поставим следующий вопрос. Пусть $l_1, \ldots, l_m$ — лучи из точки O, не направленные в одно полупространство. Каковы условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данные числа $\omega_1, \ldots, \omega_m$ были кривизнами (площадями сферических изображений) вершин замкнутого выпуклого многогранника, лежащих соответственно на лучах $l_1, \ldots, l_m$? (Предполагается, что других вершин многогранник не имеет.) И в какой мере многогранник определяется условиями, что его вершины лежат на данных лучах и имеют данные кривизны? Ответ на первый вопрос даётся следующей теоремой:

18. *Пусть из точки O исходят лучи $l_1, \ldots, l_m$, не направленные в одно полупространство. Пусть $\Omega_{i_1, \ldots, i_k}$ — площадь сферического изображения телесного угла, являющегося выпуклой оболочкой совокупности лучей $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$. Для того чтобы числа $\omega_1, \ldots, \omega_m$ были площадями сферических изображений вершин выпуклого многогранника с вершинами на лучах $l_1, \ldots, l_m$, необходимы и достаточны следующие условия:*

1) *Все* $\omega_i > 0$.

2) $\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 4\pi$.

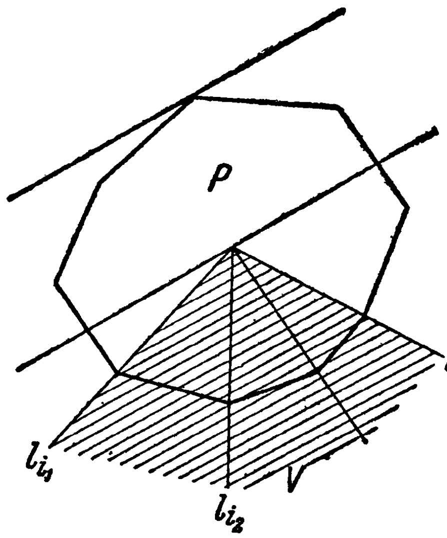
3) *Для каждой совокупности лучей* $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$

$$\sum \omega_{j_p} > \Omega_{i_1, \ldots, i_k},$$

где сумма берётся по всем лучам l_{j_p}, *не попавшим в выпуклую оболочку совокупности лучей* $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$. Рассматриваются, конечно, только такие совокупности лучей $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$, выпуклая оболочка которых не есть всё пространство: иначе последнее условие лишено смысла.

Необходимость условий 1) и 2) очевидна: условие 2) означает, что сферическое изображение замкнутого выпуклого многогранника покрывает всю сферу.

Докажем необходимость третьего условия. Пусть P — замкнутый выпуклый многогранник с вершинами на лучах $l_1, \ldots, l_m$. Берём лучи $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$ и пусть V — их выпуклая оболочка, причём V не простирается на всё пространство. Выпуклая оболочка конечной совокупности лучей, исходящих из одной точки O, есть телесный выпуклый многогранный угол с вершиной O.



Черт. 70.

Пусть лучи $l_{j_1}, \ldots, l_{j_l}$, а соответственно и вершины $A_{j_1}, \ldots, A_{j_l}$ оказываются вне V. Плоскость, опорная к V, пересекает многогранник P, а при параллельном движении от точки O она становится в некоторый момент опорной в некоторой вершине, не попавшей в V. (На черт. 70, изображена аналогичная картина в случае многоугольника.) Следовательно, всякая опорная плоскость к V имеет параллельную ей опорную плоскость к P в одной из вершин $A_{j_1}, \ldots, A_{j_l}$. Кроме того, в этих вершинах имеются и другие опорные плоскости, например плоскости граней, не пересекающих V. Поэтому сферическое изображение угла V содержится в сферическом изображении вершин $A_{j_1}, \ldots, A_{j_l}$ и не совпадает с ним. Отсюда и следует неравенство $\sum_{p=1}^{l} \omega_{j_p} > \Omega_{i_1, \ldots, i_k}$.

Достаточность условий теоремы 18 будет доказана в § 1 главы IX, т. е. мы докажем существование выпуклого многогранника, вершины которого лежат на данных лучах и имеют данные площади сферических изображений.

При преобразовании подобия с центром в O вершины остаются на тех же лучах и их сферические изображения, очевидно, не меняются. Другие преобразования невозможны, т. е. многогранник определяется лучами l_i, на которых лежат его вершины, и кривизнами вершин ω_i однозначно с точностью до подобного преобразования с центром в общем начале лучей.

Это вытекает из следующей общей теоремы:

19. *Если вершины конечных телесных выпуклых многогранников лежат на одних и тех же лучах, исходящих из внутренней точки O*

этих многогранников, то либо эти многогранники подобны с центром подобия в точке O, либо у них есть такая пара вершин, лежащих на одном луче, что сферическое изображение одной из них содержится в сферическом изображении другой, не совпадая с ним.

Если площади сферических изображений равны, то вторая возможность исключена, и многогранники должны быть подобны. Вместо площади можно взять любую монотонную функцию сферического многоугольника (или, что равносильно, многогранного угла).

Доказывается теорема 19 очень просто. Пусть многогранники P_1 и P_2 имеют вершины на общих лучах, исходящих из их общей внутренней точки O. Сожмём P_2 подобно к точке O так, чтобы он оказался внутри P_1. Сферические изображения при этом не изменятся.

Будем теперь увеличивать многогранник P_2 подобно из точки O. В некоторый момент он коснётся многогранника P_1 в какой-нибудь точке. Если эта точка не есть вершина, то многогранники P_1 и P_2 касаются по грани или по ребру (пересекаться они не могут, так как P_2 всё ещё не выходит из P_1). А так как вершины многогранников P_1 и P_2 лежат на общих лучах, то в таком случае у них есть хотя бы одна общая вершина, принадлежащая грани или ребру, по которым они касаются. Таким образом, в момент касания многогранников P_1 и P_2 какие-то их вершины A_1 и A_2 совпадают. Но так как P_2 лежит в P_1, то многогранный угол V_2 при A_2 заключён в многогранном угле V_1 при A_1. Поэтому плоскость, опорная к V_1, будет опорной также к V_2, т. е. сферическое изображение вершины A_2 содержит сферическое изображение вершины A_1.

Если площади всех сферических изображений по условию равны, то, следовательно, сферические изображения вершин A_2 и A_1 совпадают. Тем самым совпадают также углы V_1 и V_2, т. е. рёбра многогранников P_1 и P_2, сходящиеся в их общей вершине $A_1 = A_2$, налегают друг на друга. Так как все их вершины лежат на общих лучах, то концы налегающих рёбер также совпадают. Применяя к ним то же рассуждение и т. д., убедимся, что многогранники P_1 и P_2 совпадают, так что до преобразования они были подобны с центром подобия в O, что и требовалось доказать.

3. Теперь обратимся к бесконечным многогранникам, причём будем иметь в виду телесные многогранники. Можно было бы рассматривать бесконечные выпуклые многогранники с вершинами на данных лучах, исходящих из точки O, но мы ограничимся рассмотрением многогранников с вершинами на данных параллельных лучах, что соответствует бесконечно удалённой точке O. Впрочем, результаты, которые мы получим, нетрудно переделать на случай не бесконечно удалённой точки O.

То требование, чтобы точка O лежала внутри многогранника, сводится для бесконечно удалённой точки к тому, что всякая прямая, параллельная данным лучам, либо вовсе не пересекает многогранник, либо имеет с ним общую полупрямую.

Задание параллельных лучей, на которых должны лежать вершины многогранника, эквивалентно заданию плоскости T, перпендикулярной к этим лучам, и проекций $A_1, \ldots, A_m$ вершин на эту плоскость. Многогранник должен быть расположен так, чтобы всякая прямая, перпендикулярная к плоскости T, либо вовсе его не пересекала, либо имела с ним общую полупрямую. Тогда проекция многогранника на плоскость T либо покрывает её всю один раз, либо покрывает на ней некоторый выпуклый, конечный или бесконечный, многоугольник, причём внутренность этого многоугольника покрывается один раз, а его стороны являются проекциями граней, перпендикулярных к плоскости T.

Так как бесконечный выпуклый многогранник определяется не одними вершинами, а ещё предельным углом, то в рассматриваемых заданиях будет фигурировать предельный угол, который мы считаем здесь телесным углом. Как уже указывалось, он может вырождаться в полупрямую или в плоский угол.

Предельный угол многогранника определяется с точностью до переноса. Для определённости мы будем считать, что его вершина совпадает с вершиной O_1 многогранника, проектирующейся в данную точку A_1.

Предельный угол располагается по отношению к плоскости T так же, как сам многогранник: прямая, перпендикулярная к T, либо не пересекает его, либо имеет с ним общую полупрямую. Действительно, пусть прямая L перпендикулярна к плоскости T и пересекает предельный угол V многогранника P. Так как вершина O_1 предельного угла принадлежит многограннику, то при подобном сжатии многогранника к вершине O_1 мы будем получать многогранники P', содержащиеся в P и содержащие угол V; в пределе они будут сходиться к V. Так как прямая L пересекает V, то она пересекает и все эти многогранники P' и имеет с ними общую полупрямую. (Иначе, увеличивая P' до P и соответственно перемещая прямую L, мы получили бы прямую L_1, которая пересекает P не по полупрямой, вопреки условию, наложенному на расположение многогранника P.) Предел же этих полупрямых будет полупрямой, общей у угла V и прямой L.

Далее, условия, наложенные на расположение многогранника и предельного угла относительно плоскости T, будут предполагаться выполненными.

Формулируем теперь теорему, аналогичную теореме 18:

20. *Пусть на плоскости T заданы точки $A_1, \ldots, A_m$ и этим точкам A_i отнесены числа $\omega_1, \ldots, \omega_m$. Для того чтобы эти числа были площадями сферических изображений вершин бесконечного выпуклого многогранника с проекциями вершин в точках $A_1, \ldots, A_m$, необходимы и достаточны следующие условия:*

1) *Все* $\omega_i > 0$ и $< 2\pi$.

2) $\sum\limits_{i=1}^{m} \omega_i \leqslant 2\pi$.

Необходимость первого условия очевидна; необходимость второго была доказана в n° 3 § 5 главы I: сферическое изображение бесконечного многогранника содержится в полусфере и, следовательно, имеет площадь $\leqslant 2\pi$. Интерес теоремы 20 — в том, что кривизны вершин оказываются неподчинёнными никаким условиям, кроме этих тривиальных.

При параллельном переносе многогранника в направлении, перпендикулярном к плоскости T, проекции его вершин и их сферические изображения остаются неизменными. Однако, вообще говоря, многогранник не определяется этими данными однозначно, с точностью до такого переноса, что видно из теоремы:

21. *Бесконечный выпуклый многогранник при данных* $A_1, \ldots, A_m$ *и* $\omega_1, \ldots, \omega_m$ *будет единственный с точностью до такого переноса тогда и только тогда, когда* $\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 2\pi$, *т. е. когда площадь его сферического изображения равна* 2π.

В n° 3 § 5 главы I доказано, что сферическое изображение предельного угла совпадает со сферическим изображением многогранника. Поэтому при $\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 2\pi$ предельный угол сводится к полупрямой и, следовательно, определён заранее. Если же площадь сферического изображения многогранника, а значит, и предельного угла, $< 2\pi$, то предельный угол может ещё меняться. Это приводит к следующей общей теореме, включающей теоремы 20 и 21:

22. *Пусть на плоскости T заданы точки* $A_1, \ldots, A_m$ *и им отнесены такие числа* $\omega_1, \ldots, \omega_m$, *что* 1) $0 < \omega_i < 2\pi$ *при всех* i, 2) $\sum_{i=1}^{m} \omega_i \leqslant 2\pi$. *Пусть, далее,* V — *выпуклый многогранный угол с площадью сферического изображения, равной* $\sum_{i=1}^{m} \omega_i$, *расположенный так, что всякая прямая, перпендикулярная к плоскости T, либо не пересекает его, либо имеет с ним общую полупрямую**).

Тогда существует бесконечный выпуклый многогранник, для которого 1) *точки* A_i *суть проекции вершин,* 2) *числа* ω_i *суть площади сферических изображений соответствующих вершин и* 3) *угол* V *есть его предельный угол.*

Такой многогранник — единственный, с точностью до перeноса в направлении, перпендикулярном к плоскости T.

Доказательство теоремы 22 даётся в § 2 главы IX.

Утверждение единственности, заключённое в этой теореме, является следствием общей теоремы, аналогичной теореме 19 и доказываемой столь же просто (см. § 2 гл. IX).

Для многогранников с границей также получаются аналогичные теоремы существования и единственности.

---

*) V может быть полупрямой или плоским углом.

4. Если заданы предельный угол V и проекции $A_1, \ldots, A_m$ вершин многогранника на плоскость T, то для того, чтобы многогранник был определён, остаётся задать высоты $p_1, \ldots, p_m$ вершин над плоскостью T, причём они считаются положительными по одну сторону от T и отрицательными по другую сторону. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы при данных предельном угле V и проекциях $A_1, \ldots, A_m$ вершин многогранника числа $p_1, \ldots, p_m$ были бы высотами вершин, формулируются несколько громоздко, и мы их не будем здесь приводить. Однако они легко выводятся из того факта, что точка B_k с высотой p_k над A_k будет вершиной многогранника тогда и только тогда, когда она не попадает в выпуклую оболочку его предельного угла и других вершин B_i.

5. Все теоремы, формулированные в этом параграфе, вместе с их доказательствами дословно обобщаются на выпуклые многогранники в пространстве любого числа измерений: нужно лишь всюду вместо 4π или 2π брать, соответственно, площадь всей сферы или полусферы радиуса единица в таком пространстве. В частности, все они верны для выпуклых многоугольников с заменой 4π и 2π на 2π и π соответственно. Теоремы 20, 21 и 22 для бесконечных многоугольников доказываются совершенно просто. Предельный угол задаёт направления бесконечных сторон и потому многоугольник строится непосредственно, если заданы углы α_i при его вершинах и проекции вершин на прямую T. (Роль кривизн ω_i играют здесь, очевидно, величины $\pi - \alpha_i$.) Теорема 18 для конечных многоугольников далеко не так очевидна, и мы не знаем никакого другого её доказательства, кроме простого пересказа того, которое даётся в случае многогранников.

6. Вернёмся, наконец, к замечанию, сделанному в начале этого параграфа по поводу полярного преобразования многогранника. Полярное преобразование относительно единичной сферы с центром во внутренней точке O выпуклого многогранника P сопоставляет ему также выпуклый многогранник P'. При этом грани многогранника P' перпендикулярны к лучам, идущим из O через вершины многогранника P, и обратно, вершины многогранника P' лежат на лучах, идущих из O, перпендикулярно к граням многогранника P. (См. n° 4 § 5 гл. I.) Между гранями и вершинами обоих многогранников имеется полная взаимность: каждой грани одного отвечает вершина другого, и обратно, причём вершинам, принадлежащим данной грани, отвечают грани, сходящиеся в соответственной вершине. Спроектируем многогранник P' из точки O на сферу E. Сфера разобьётся на выпуклые сферические многоугольники S'_i, являющиеся проекциями граней Q' многогранника P'. Вершины этих многоугольников суть проекции вершин многогранника P' (см. черт. 32 на стр. 48, где для простоты изображены полярные многоугольники. Для них вместо сферы нужно брать единичную окружность с центром O).

Лучи, идущие из O через вершины какой-либо грани Q_i' многогранника P', являются нормалями к граням многогранника P, сходящимися в его соответствующей вершине A_i. Поэтому многоугольник S_i оказывается сферическим многоугольником, натянутым на концы нормалей к граням, сходящимся в вершине A_i. Иными словами, этот многоугольник есть не что иное, как сферическое изображение вершины A_i

Таким образом, *проекция грани многогранника P' на сферу S есть сферическое изображение соответствующей вершины многогранника P.* Ввиду полной взаимности многогранников P и P' их можно поменять здесь ролями.

Пользуясь этими замечаниями, каждой теореме о многогранниках с вершинами на данных лучах можно сопоставить теорему о многогранниках с гранями, перпендикулярными к тем же лучам. Так, например, теорема 18 превращается в следующую теорему:

23. *Пусть из точки O исходят лучи $l_1, \ldots, l_m$, не направленные в одно полупространство. Пусть $\Omega_{i_1, \ldots, i_k}$ — площадь сферического изображения телесного угла, являющегося выпуклой оболочкой совокупности лучей $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$. Для того чтобы среди замкнутых выпуклых многогранников с точкой O внутри и с гранями, перпендикулярными к лучам l_i, существовал многогранник с данными площадями $\omega_1, \ldots, \omega_m$ проекций его граней на единичную сферу с центром O, необходимы и достаточны следующие условия:* 1) *Все* $\omega_i > 0$; 2) $\sum_{i=1}^{m} \omega_i = 4\pi$; 3) *для каждой совокупности лучей $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$, идущих в одно полупространство,* $\sum_j \omega_j > \Omega_{i_1, \ldots, i_k}$, *где сумма берётся по всем j, соответствующим лучам l_j, не попавшим в выпуклую оболочку совокупности лучей $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$.*

Теорема 19 превращается в следующее утверждение:

24. *Если у двух замкнутых выпуклых многогранников, имеющих общие внутренние точки, грани соответственно параллельны, то, либо многогранные углы, проектирующие их параллельные грани из некоторой общей внутренней точки O, совпадают, так что многогранники подобны с центром подобия в O, либо среди этих углов, проектирующих грани любого из двух многогранников, есть хотя бы один, содержащий в себе угол, проектирующий параллельную грань другого (но не совпадающий с ним).*

Поэтому, в частности, многогранник определяется данными теоремы 23 однозначно с точностью до подобия.

Теоремы 23 и 24 могут быть, конечно, доказаны и непосредственно, совершенно аналогично теоремам 18 и 19.

Теоремы о бесконечных многогранниках с вершинами на данных параллельных лучах не допускают такого полярного преобразования, потому что в них центр O лежит на бесконечности. Если же точку O взять не на бесконечности, то и для бесконечных многогранников получатся теоремы, допускающие полярное преобразование.

§ 6. Теоремы жёсткости (Обзор результатов глав X и XI)

1. Пусть многогранник P_0 подвергается некоторой деформации, т. е. дано непрерывное семейство многогранников P_t, зависящее от параметра t, причём значению $t=0$ соответствует исходный многогранник P_0. Параметр t удобно мыслить как время, в связи с чем мы будем говорить о движении элементов многогранника, вызывающем его деформацию: о движении вершин, вращении граней и т. п.

Если x есть какая-либо величина, относящаяся к многограннику, как, например, площадь грани, длина ребра и т. п., то при деформации она будет функцией параметра t. Производную $\frac{dx}{dt}$ мы будем часто называть *скоростью изменения* величины x. Величину x мы называем *стационарной*, если начальная скорость её изменения равна нулю: $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=0$.

Предметом исследования будут не конечные деформации многогранников, а «начальные деформации», т. е. бесконечно малые деформации первого порядка в начальный момент. Иными словами, нас будут интересовать не самые изменения тех или иных элементов многогранника или связанных с ним величин, а только главные части первого порядка относительно t; не приращения Δx, а дифференциалы dx или, что равносильно, начальные скорости $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}$.

Многогранник P_0 называется *жёстким* при тех или иных условиях, если всякая его начальная деформация, подчинённая этим условиям, сводится к его движению как твёрдого тела (или в более общем случае — к некоторому другому заведомо тривиальному преобразованию). Это означает, что при этих условиях все элементы многогранника оказываются стационарными, если только исключить его движение, закрепив, например, одну вершину, направление исходящего из неё ребра и направление плоскости грани, прилегающей к этому ребру.

Теоремы жёсткости сводятся к утверждениям такого типа: многогранник — жёсткий, если при его деформациях какого-нибудь вида некоторые данные относящиеся к нему величины стационарны. Например, ещё Коши по существу доказал, хотя и не формулировал явно, такую теорему*):

*) Эта теорема впервые явно высказана и доказана Деном (Dehn) (М. Ден, О жёсткости выпуклых многогранников, Успехи матем. наук. вып. 2; оригинал появился в Math. Ann. в 1915 г.). Ден не заметил, что буквальное повторение рассуждений Коши, приведших его к теореме о равенстве многогранников

если все грани замкнутого выпуклого многогранника жёсткие, то и сам он жёсткий. То-есть допустим, что замкнутый выпуклый многогранник деформируется так, что строение его не меняется, а плоскости граней движутся (переносятся и поворачиваются) с определёнными скоростями. Тогда, если грани жёсткие, т. е. длины рёбер и углы на гранях стационарны, то начальная деформация многогранника сводится к движению.

Эта теорема аналогична теореме Коши о равенстве многогранников, одинаково составленных из равных граней. Аналогия становится особенно ясной, если заметить, что определению жёсткости можно придать следующую форму: многогранник P_0 — жёсткий, если при данных условиях всякий деформированный многогранник P_t равен P_0 с точностью первого порядка *) относительно t. Это определение, очевидно, эквивалентно предыдущему. Вместе с тем оно показывает, что теоремы жёсткости являются теоремами о равенстве с точностью первого порядка. Это замечание наводит на мысль искать для каждой теоремы о равенстве соответствующую теорему жёсткости. Конечно, такой переход от одних теорем к другим не будет, вообще говоря, тривиальным, потому что, во-первых, теоремы жёсткости суть теоремы не о точном равенстве, но только о равенстве с точностью первого порядка, а во-вторых, их условия состоят не в точном равенстве тех или иных элементов многогранников, а только в их стационарности, т. е. в равенстве элементов многогранников P_0 и P_t с точностью первого порядка относительно t. Тем не менее каждой теореме о равенстве (или, что то же, теореме единственности), высказанной в §§ 3—5, соответствует аналогичная теорема жёсткости с небольшими изменениями условий или результата.

Дальше мы формулируем в качестве примеров несколько теорем жёсткости из доказываемых в главах X и XI.

2. Соответственно теореме 2 § 4 о равенстве изометричных многогранников имеет место следующая теорема:

25. *Если замкнутый выпуклый многогранник деформируется так, что внутренние расстояния между его вершинами стационарны, то его начальная деформация сводится к движению. Короче, замкнутый выпуклый многогранник со стационарной внутренней метрикой — жёсткий.* Этот результат можно высказать в несколько иной форме.

25*. *Пусть на замкнутом выпуклом многограннике P_0 задана некоторая его развёртка R_0, все вершины которой лежат в вершинах или на рёбрах многогранника P_0. Если многогранник P_0*

с равными гранями, даёт также и эту теорему о жёсткости. Метод Дена совершенно отличен от метода Коши. Другое доказательство дал ещё Г. Вейль. См. H. Weul, Sitzungs Berichte Preuss, Acad., 1916.

*) То-есть существуют равные P_0 многогранники P_0^t такие, что максимум расстояний их вершин от соответствующих вершин P_t при малых t есть бесконечно малая более высокого порядка, чем t.

деформируется так, что на нём не появляется новых вершин, кроме, может быть, вершин развёртки R_0, лежащих на его «старых» рёбрах, то развёртка R_0 также деформируется) и если при этом длины её рёбер и углы её многоугольников стационарны, то многогранник — жёсткий, т. е. его начальная деформация неизбежно сводится к движению.* Коротко: *замкнутый выпуклый многогранник со стационарной развёрткой — жёсткий.*

В теоремах 25 и 25* заранее не исключается ни переламывание граней и рёбер, ни даже нарушение выпуклости многогранника. Однако появление новых вершин допускается только внутри «старых» рёбер. Если такие «новые» вершины имеются, то в теореме 25 и они учитываются среди всех вершин. Нарушение выпуклости многогранника может быть вызвано «проламыванием его внутрь» в новой вершине.

Теорема 25* или 25 содержит как следствие приведённую выше теорему о жёсткости многогранника с жёсткими гранями. И она, конечно, более общая, потому что в ней допускается переламывание граней. А, например, куб с одной вынутой гранью жёсткий, если грани жёсткие, но он нежёсткий, если допустить переламывание граней по диагоналям. (Первое утверждение следует из очевидной жёсткости трёхгранных углов со стационарными плоскими углами; второе утверждение проверяется непосредственно.)

Отличия теоремы 25* от теоремы о равенстве многогранников с одинаковыми развёртками, не считая общего отличия всякой теоремы жёсткости от теорем о равенстве, состоят в следующем:

1) В теореме о равенстве нет условия, что вершины развёртки лежат в вершинах или на рёбрах многогранника: они могут при склеивании попадать внутрь граней. Но в теореме 25* это ограничение оказывается необходимым: без него она неверна, как будет показано в § 1 главы X.

2) Теорема о равенстве верна для многогранников, вырождающихся в многоугольники, но теорема 25* для них неверна. [Если допустить нарушение выпуклости, то это тривиально: стоит лишь сломать многоугольник по диагонали. Но и без нарушения выпуклости дважды покрытый многоугольник (кроме треугольника) — нежёсткий. Возьмём, например, дважды покрытый квадрат $ABCD$ со стороной, равной a, и выдвинем вершину D из его плоскости на высоту $h = vt$, где v — скорость движения вершины D. Получим тетраэдр с ребром $CD = \sqrt{a^2 + h^2} \approx a + \frac{1}{2}\frac{h^2}{a} = a + \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}t^2$. Отсюда видно, что изменение расстояний между вершинами будет второго порядка относительно t, т. е. эти расстояния стационарны, хотя вершина D движется с поло-

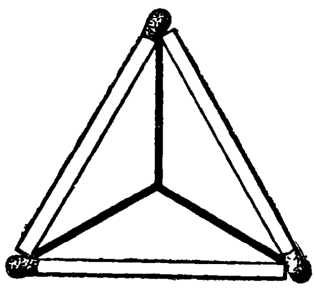
*) Мы докажем, что на многограннике P_t, близком к P_0, всегда есть развёртка, близкая к R_0, вследствие чего и можно говорить о деформации развёртки. Деформация многогранника P_0 подчиняется некоторым общим условиям, которые мы здесь не формулируем. Коротко они сводятся к тому, что новых вершин, кроме вершин развёртки, на нём не появляется.

жительной скоростью. Аналогичные соображения применимы, конечно, к многоугольнику с любым числом сторон >3.]

3) В теореме о равенстве многогранники предполагаются выпуклыми, в теореме же 25 или 25* нарушение выпуклости при деформации заранее не исключается: оно может быть вызвано переламыванием граней с возникновением новых вершин на рёбрах. (Теорема, однако, утверждает, что при стационарной развёртке это движение точки внутрь многогранника имеет нулевую начальную скорость.) В этом отношении теорема 25 оказывается более общей, чем теорема 2.

Аналогично теореме 3 § 3 о равенстве двугранных углов при равенстве плоских углов имеет место следующая теорема:

26. *Если замкнутый выпуклый многогранник деформируется так, что углы на его гранях стационарны, то и двугранные его углы стационарны.* При этом под гранями можно понимать не истинные грани, а любые их части, на которые они разбиваются отрезками, не пересекающимися, однако, внутри истинных граней. Деформация многогранника состоит в движении плоскостей этих кусков граней.



Черт. 71.

Для бесконечных многогранников также имеют место теоремы жёсткости, аналогичные теоремам о равенстве, высказанным в § 3. Их формулировки получаются, грубо говоря, простой подстановкой понятия стационарности на место равенства. Они будут точно формулированы и доказаны в главе X.

3. Теорема 26 допускает интересную механическую интерпретацию.

27. *Пусть дана система стержней, скреплённых на шарнирах в концах так, что они образуют систему рёбер замкнутого выпуклого многогранника. В стержнях такой системы невозможны напряжения, если на них не действуют внешние силы, и если стержни не изогнуты и находятся в равновесии.*

Пример системы с напряжениями без воздействия внешних сил можно получить из трёх спичек и трёх резиновых нитей (черт. 71). Спички располагаются по сторонам правильного треугольника, а резиновые нити идут из вершин к центру треугольника. В центре они соединены и натянуты. Поэтому в этой системе имеются напряжения, хотя она находится в равновесии без воздействия внешних сил. Теорема 27 утверждает, что для системы рёбер замкнутого выпуклого многогранника подобное состояние равновесия с напряжениями невозможно.

Связь теорем 26 и 27 будет полностью выяснена в § 4 главы X; там же будут установлены аналогичные результаты для некоторых других стержневых систем.

4. В § 4 были указаны общие теоремы о равенстве выпуклых многогранников с параллельными гранями. Этим теоремам также соответствуют теоремы о жёсткости. Для их формулировки введём понятие существенно монотонной функции многоугольника. Будем говорить, что функция $f(Q)$ выпуклого многоугольника Q *существенно монотонна*, если при параллельном движении любой его стороны наружу функция f меняется со скоростью, большей нуля, т. е. если h_i — расстояние от данной точки внутри Q до прямой, содержащей i-ю сторону, то $\frac{\partial f}{\partial h_i} > 0$.

Примером могут служить площадь и периметр многоугольника.

Формулируем теорему жёсткости, аналогичную теореме 8 § 4 о равенстве замкнутых выпуклых многогранников:

28. *Если замкнутый выпуклый многогранник деформируется вследствие параллельных смещений плоскостей его граней так, что для каждой грани некоторая (вообще говоря, своя для каждой грани) существенно монотонная её функция стационарна, то начальная деформация многогранника сводится к его параллельному переносу.*

В отличие от следствия теоремы 8, указанного в § 4, здесь на функции граней наложено условие существенной, а не простой монотонности. Без этого условия теорема 28 неверна. Например, положим $f(Q) = [F(Q) - 1]^3$, где $F(Q)$ — площадь многогранника Q. Эта функция, как легко видеть, монотонная: если Q_1 содержит Q_2, то $F(Q_1) > F(Q_2)$ и потому $f(Q_1) > f(Q_2)$. Однако при $F(Q) = 1$ она не существенно монотонная, так как $\frac{\partial f}{\partial h_i} = 3[F(Q) - 1]^2 \frac{\partial F}{\partial h_i}$, так что $\frac{\partial f}{\partial h_i} = 0$ при $F = 1$. Поэтому, если взять куб с ребром единица и выдвигать одну из его граней с произвольной скоростью, то функция f для всех его граней будет стационарной, хотя деформация явно не сводится к переносу даже с точностью только первого порядка.

Для бесконечных многогранников также имеются теоремы о жёсткости, аналогичные теореме 28; дополнительное условие в них состоит в том, что плоскости бесконечных граней вообще должны быть неподвижны (или по крайней мере стационарны), зато условие о стационарности каких-нибудь существенно монотонных функций налагается только на конечные грани.

Эти теоремы будут точно формулированы и доказаны в главе XI.

5. Теоремы о равенстве, высказанные в §§ 3 и 4, доказываются, как было отмечено, с помощью леммы Коши. Оказывается, что в случае теорем жёсткости в их общих формулировках, в которых мы их доказываем, эта лемма неприменима, потому что основное её условие о невозможности только двух перемен знака при обходе вокруг вершины нельзя обеспечить заранее. Например, при стационарности плоских углов выпуклого многогранного угла число перемен знака скорости изменения его двугранных углов может равняться двум, если только имеются двугранные углы, равные π. Это как раз соответствует тому, что мы допускаем разбиение истинной грани многогранника на отдельные части. Возможность наличия только двух перемен знака в этом случае легко может быть установлена на примерах (см. § 1 гл. X). Однако мы докажем, что в этом случае распределение знаков подчинено некоторому дополнительному условию, которое всё же обеспечивает результат леммы Коши: невозможно, чтобы вокруг каждой вершины, к которой подходят отмеченные рёбра, было не менее четырёх перемен знака, либо две перемены с упомянутым дополнительным условием. Эта «усиленная лемма Коши» будет доказана в § 2 главы IX, и с её помощью будут доказаны все теоремы о жёсткости глав X и XI.

6. Общей теореме 19 о подобии многогранников с вершинами на данных лучах и с непомещаемыми друг внутри друга сферическими изображениями также отвечает теорема о жёсткости. Для её формулировки введём понятие о существенно монотонной функции сферического многоугольника, аналогично такому же понятию для плоского многоугольника.

Именно, выпуклый сферический многоугольник ограничен большими кругами, несущими его стороны. При вращении такого большого круга вокруг двух его диаметрально противоположных точек, не принадлежащих стороне, многоугольник деформируется. Функцию f сферического многоугольника мы называем *существенно монотонной*, если при таком вращении любой данной его стороны с положительной скоростью наружу от многоугольника функция f возрастает с положительной скоростью. Этим свойством, как легко видеть, обладает, в частности, площадь.

Теорема о жёсткости, соответствующая теореме 19, утверждает:

29. *Если замкнутый выпуклый многогранник деформируется вследствие движения его вершин по данным лучам, исходящим из его внутренней точки O, так, что для сферического изображения каждой вершины стационарна какая-либо его существенно монотонная функция, то начальная деформация многогранника сводится к подобному преобразованию относительно центра O.*

Эта теорема доказывается почти так же просто, как теорема 19 (см. § 1 гл. IX). Сходные теоремы имеют место и для бесконечных многогранников при дополнительном условии стационарности предельного угла (см. § 2 гл. IX).

7. Теперь мы выясним глубокую связь между теоремами жёсткости, с одной стороны, и теоремами существования и единственности — с другой. Окажется, что при очень общих условиях из теорем жёсткости можно вывести теоремы существования и единственности.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — какие-либо параметры, определяющие многогранник с точностью до некоторого тривиального преобразования, а $b_1, \ldots, b_n$ — другие параметры, относящиеся к многограннику, о которых мы хотим доказать, что они также определяют многогранник с точностью до такого же преобразования, т. е. речь идёт о теоремах существования и единственности многогранника с данными $b_1, \ldots, b_n$. Например, если рассматривать замкнутые многогранники с $n+1$ вершинами, лежащими на данных лучах, исходящих из общей точки O, то параметры $a_1, \ldots, a_n$ могут быть отношениями расстояний n вершин от точки O к расстоянию от O до $(n+1)$-й вершины. Эти отношения определяют многогранник с точностью до подобия с центром O. За параметры $b_1, \ldots, b_n$ можно взять кривизны — площади сферических изображений n вершин; кривизна $(n+1)$-й вершины определяется из условия, что полная кривизна замкнутого многогранника равна 4π.

Так как параметры a_i определяют многогранник, то величины b_i будут их функциями:

$$b_i = f_i(a_i, \ldots, a_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Эти функции мы предполагаем дифференцируемыми, так что

$$db_i = \frac{\partial b_i}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial b_i}{\partial a_n} da_n \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

(Это условие дифференцируемости имеет место для всяких параметров $b_i = f(a_1, \ldots, a_n)$, представляющих естественный интерес. В частности, и в приведённом примере кривизны вершин являются дифференцируемыми функциями расстояний вершин от точки O; в этом нетрудно убедиться.)

Теорема о жёсткости многогранника P_0 при стационарных b_i состоит, очевидно, в том, что если все $db_i = 0$, то при значениях $a_i = a^0{}_i$, относящихся к P_0, все $da_i = 0$. Иными словами, однородная система (2) не имеет иных решений, помимо тривиального. Это эквивалентно тому, что определитель системы (2), т. е. якобиан системы функций (1), отличен от нуля. А в таком случае, как известно, функции (1) обратимы в окрестности значений $a_i = a_i^0$ и $b_i = b_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, соответствующих данному многограннику P_0. Следовательно, задав b_i, близкие к b_i^0, мы можем и притом единственным образом найти по ним a_i, близкие к a_i^0; тем самым существует многогранник P, близкий к P_0 (с точностью до тривиального преобразования) и имеющий данные b_i, причём такой многогранник — единственный с точностью до тривиального преобразования.

Таким образом, *из теоремы жёсткости следуют теоремы существования и единственности в малой окрестности данного многогранника P_0.*

8. Две следующие простые леммы дают условия, при которых этот результат может быть расширен до полных теорем существования и единственности.

Лемма А. *Пусть **A** и **B** — два многообразия и пусть дано однозначное непрерывное отображение φ многообразия **A** в **B**, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *Если точка B из **B** есть образ точки A из **A**: $B = \varphi(A)$, то существует окрестность точки B, допускающая обратное отображение φ^{-1} в **A**.*

2) *Во всякой связной компоненте многообразия **B** содержатся образы точек из **A**.*

3) $\varphi(\mathbf{A})$ *замкнуто, т. е. если точки $B_n = \varphi(A_n)$ сходятся к B, то B есть образ некоторой точки из **A**.*

*Тогда φ есть отображение **A** на **B**.*

В силу условия 1), если $B \in \varphi(\mathbf{A})$, то B имеет окрестность, содержащуюся в $\varphi(\mathbf{A})$; следовательно, $\varphi(A)$ — открытое множество.

Соединяя этот результат с требованиями 2) и 3), совершенно так же, как в лемме об отображении, получим, что $\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ *). Если A есть многообразие

---

*) Этот метод чаще представляют как метод непрерывного продолжения. Пусть $B_0 \in \varphi(A)$ и B_1 — любое такое, что существует непрерывная кривая B_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, соединяющая B_0 с B_1. Тогда из условия 1) леммы А следует, что при малых t $B_t \in \varphi(A)$. Пусть T — точная верхняя граница тех t, при которых $B_t \in \varphi(A)$. Тогда по условию 3) $B_T \in \varphi(A)$ и при $T < 1$ по условию 1) можно было бы взять $t > T$ такое, что $B_t \in \psi(A)$. Следовательно, $T = 1$ и $B_1 \in \varphi(\mathbf{A})$. Условие 2) обеспечивает соединимость любой точки B из **B** с какой-нибудь точкой из $\varphi(\mathbf{A})$.

многогранников, рассматриваемых с точностью до тривиального преобразования, а $\boldsymbol{B}$ есть многообразие данных $B(b_1, \ldots, b_n)$, для которых имеет место теорема о жёсткости, то, как только что показано, из этой теоремы вытекает условие 1) леммы А. Поэтому, как только два других условия выполнены, имеет место полная теорема существования. Такое доказательство теоремы 1 существования замкнутого выпуклого многогранника с данной развёрткой даётся в главе VI моей книги «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей».

Лемма В. *Пусть, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, φ имеют то же значение, что в лемме* А, *причём φ есть отображение $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$ (что имеет место, например, при условиях леммы* А). *Пусть кроме того, выполнены следующие условия*:

1) *Если точка B из $\boldsymbol{B}$ есть образ точки A из $\boldsymbol{A}$, то имеется окрестность точки A, отображение которой в окрестность B взаимно однозначно и взаимно непрерывно.*

2) *Многообразие $\boldsymbol{A}$ связно, а многообразие $\boldsymbol{B}$ односвязно* *), *т. е. всякую замкнутую кривую в нём можно стянуть в точку.*

Тогда отображение φ взаимно однозначно.

Эта лемма хорошо известна в топологии. Отображение φ, удовлетворяющее условиям леммы В, есть не что иное, как отображение накрытия многообразия $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$, и если $\boldsymbol{B}$ односвязно, то, как известно, такое отображение есть гомеоморфизм, т. е., в частности, оно взаимно однозначно. Легко, впрочем, доказать лемму В, не ссылаясь на теорию накрывающих многообразий, что мы и сделаем.

Допустим, что φ не взаимно однозначно. Тогда в $\boldsymbol{B}$ найдётся точка B, являющаяся образом двух разных точек A_0 и A_1 из $\boldsymbol{A}$. По связности многообразия $\boldsymbol{A}$ существует непрерывная кривая L, соединяющая A_0 с A_1, т. е. каждому t из отрезка $(0, 1)$ можно сопоставить точку $A(t)$ так, что $A(t)$ зависит от t непрерывно и $A(0) = A_0$, $A(1) = A_1$.

Образ этой кривой есть некоторая кривая $M = \varphi(L)$ с точками $B(t) = \varphi(A(t))$; кривая эта — замкнутая, потому что $\varphi(A_0) = \varphi(A_1) = B$. По условию 2) кривую M можно стянуть в некоторую точку B_0, т. е. существует такое непрерывное семейство кривых $M(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, что $M(0) = M$, $M(1) = B_0$; при этом имеется в виду, что точки $B(t, s)$ кривых $M(s)$ таковы, что 1) $B(t, s)$ непрерывно зависит от обоих аргументов, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, и 2) при данном s $B(t, s)$ есть параметрическое представление кривой $M(s)$.

По первому условию леммы отображение φ взаимно однозначно и взаимно непрерывно в окрестности всякой точки $A \in \boldsymbol{A}$.

По лемме Бореля кривую L можно покрыть конечным числом таких окрестностей $U_1, \ldots, U_m$ и разбить эту же кривую L на отрезки $L_1, \ldots, L_m$, содержащиеся соответственно в $U_1, \ldots, U_m$: каждому отрезку L_i отвечает сегмент $\tau_i = [t_{i-1}, t_i]$ на отрезке $[0, 1]$ такой, что если $t \in \tau_i$, то $A(t) \in U_i$.

Соответственно кривая M будет покрыта окрестностями $\nu_i = \varphi(U_i)$ и разобьётся на отрезки $M_i = \varphi(L_i)$. Пусть s_0 столь мало, что кривая $M(s_0 t_0)$ лежит в окрестности $\nu = \sum\limits_i \nu_i$ кривой $M = M(0)$. Возьмём любое значение параметра t. Пусть оно принадлежит сегменту τ_i. Тогда точка $B(t, s_0) \in \nu_i = \varphi(U_i)$, и мы можем однозначно отнести ей её прообраз, который обозначим $A(t, s_0)$. В результате отрезкам кривой $M(s_0)$, соответствующим сегментам τ_i, будут сопоставлены некоторые кривые $L_i(s_0)$ в $\boldsymbol{A}$. Эти кривые имеют последовательно общие концы, потому что отрезки M_i имеют общие концы, принадлежащие одним и тем же окрестностям, в которых отображение φ взаимно однозначно. Следовательно, кривые $L_i(s_0)$ образуют в сумме одну кривую $L(s_0)$, концы

*) Достаточно, например, открытую прямоугольную полосу $\boldsymbol{A}$ «намотать» на боковую поверхность цилиндра $\boldsymbol{B}$ так, чтобы концы полосы налегали друг на друга, как мы получим уже неоднозначное отображение, для которого выполнены все условия леммы, кроме односвязности $\boldsymbol{B}$.

которой лежат, очевидно, в точках A_0 и A_1. Образ кривой $L(s_0)$ есть кривая $B(t, s_0)$.

То же рассуждение можно повторить, отправляясь теперь не от кривой A_t, а от кривой $L(s_0)$, и т. д. В результате мы придём к тому, что каждой кривой $M(s)$ можно сопоставить кривую $L(s)$, соединяющую точки A_0 и A_1 и отображающуюся на $M(s)$ *). Но $M(1)$ есть одна точка B_0, а $L(1)$ — кривая, соединяющая две точки A_0 и A_1. Поэтому отображение φ кривой $L(1)$ на $M(1) = B_0$ не взаимно однозначно в любой окрестности каждой точки, например A_0. Это противоречит условиям леммы. Следовательно, предположение о том, что в одну точку B_0 отображаются две точки A_0 и A_1, неверно; отображение φ должно быть взаимно однозначным, что и требовалось доказать.

9. Пусть $\boldsymbol{A}$ — многообразие многогранников, рассматриваемых с точностью до некоторого тривиального преобразования, а $\boldsymbol{B}$ — многообразие данных $B(b_1, \ldots, b_n)$, для которых выполняется теорема жёсткости. Тогда, как было показано, из этой теоремы вытекает первое условие леммы В. Поэтому, если $\boldsymbol{A}$ связно, а $\boldsymbol{B}$ — односвязно, то отображение φ многообразия $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$ взаимно однозначно, что означает, что имеет место теорема единственности с точностью до соответствующего тривиального преобразования. Если, например, $\boldsymbol{A}$ есть многообразие многогранников с вершинами на данных лучах и рассматриваемых с точностью до подобия, а $\boldsymbol{B}$ — многообразие допустимых значений площадей сферических изображений ω_i, то $\boldsymbol{A}$, очевидно, связно, а $\boldsymbol{B}$ заведомо односвязно, потому что оно выпукло, как ясно из определяющих его условий, указанных в теореме 18. Аналогичное положение имеется и в других случаях; например, в теореме Минковского 11, где $\boldsymbol{A}$ — многообразие многогранников с данными направлениями граней, а $\boldsymbol{B}$ — многообразие допустимых значений площадей граней; многообразие $\boldsymbol{B}$ в этом случае тоже выпукло и потому односвязно. (Однако в случае теорем о существовании многогранника с данной развёрткой я не могу установить односвязность многообразия допустимых развёрток.)

Итак, мы получаем следующий общий метод доказательства теорем существования и единственности:

1. Доказываем соответствующую теорему жёсткости и из неё выводим существование и единственность «в малых окрестностях».

2. Доказываем, что выполняются условия леммы А, и тогда получаем полную теорему существования.

3. Доказываем, что выполняются ещё условия леммы В, и тогда получаем теорему единственности.

Такой метод имеет свои преимущества:

Во-первых, теорема жёсткости сводится, как было показано, к линейной задаче: к исследованию уравнений (2), а потому может легче поддаваться решению, особенно при аналитической трактовке вопроса. По той же причине этот метод легче обобщается на задачи, касающиеся кривых поверхностей, где многообразия $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ суть бесконечномерные функциональные пространства **).

Во-вторых, для доказательства существования оказывается ненужной полная теорема единственности в отличие от того, что требует метод, основанный на лемме об отображении.

Однако, если теорема единственности может быть доказана прямым путём, то лемма об отображении даёт более короткий путь доказательства существования. Кроме того, теоремы о жёсткости с чисто геометрической точки

*) Строгое обоснование этого заключения проводится так: для малых s утверждение верно. Пусть S — точная верхняя граница таких s. Тогда, беря $s \to S - 0$, получим кривую $L(S)$, а к ней применимы те же рассуждения и, следовательно, должно быть $S = 1$.

**) Именно этим методом воспользовался Вейль для решения задачи о существовании замкнутой выпуклой поверхности с данной метрикой.

зрения представляются несколько искусственными ввиду привлечения понятий и теорем дифференциального исчисления.

10. Вернемся к вопросу о нарушениях теоремы жёсткости многогранников со стационарной развёрткой. Мы показали, что эта теорема не имеет места для многогранников, вырождающихся в многоугольники, даже при условии сохранения выпуклости многогранника. Сейчас мы убедимся в этом на основании совсем других соображений.

Пусть B — многообразие развёрток с данным числом вершин, а A — многообразие замкнутых выпуклых многогранников, рассматриваемых с точностью до движения, но не отражения. Так как из одной развёртки можно склеить два взаимно симметричных многогранника, то отображение A на B не взаимно однозначно, а двулистно. Неоднозначность, связанная с наличием у какого-нибудь невырожденного многогранника элементов симметрии, устраняется наименованием его вершин соответственно вершинам развёртки*). Это, однако, невозможно для вырожденного многогранника: при отражении его в его плоскости все его вершины переходят сами в себя. Сколь угодно малые смещения его вершин, произведённые по разные стороны от его плоскости, приводят к симметричным многогранникам, т. е. дают переход с одного листа многообразия A на другой. Множество вырожденных многогранников отображается в B однозначно и представляет собой множество разветвления многообразия A при его отображении на B, подобно точке разветвления функции $\sqrt{x+iy}$. Поэтому отображение A на B не может быть взаимно однозначным в окрестности вырожденных многогранников, а потому и теорема о жёсткости для них не может иметь места. При доказательстве существования многогранника с данной развёрткой, основанном на теореме жёсткости, приходится исключать вырожденные многогранники и их развёртки.

11. В заключение ещё одно общее замечание. Пусть A и B, как и выше, — многообразия многогранников A, определённых параметрами $a_1, \ldots, a_n$, и некоторых данных $B(b_1, \ldots, b_n)$. Пусть отображение φ многообразия A на B задаётся непрерывно дифференцируемыми функциями (1). Множество тех A, где нарушается теорема жёсткости, есть множество нулей якобиана этой системы функций. Это множество, следовательно, замкнуто. Если оно содержит внутреннюю точку A, то в окрестности этой точки функции (1) зависимы, и потому отображение φ не взаимно однозначно. Следовательно, если φ взаимно однозначно, т. е. имеет место теорема единственности, *то множество, где нарушается теорема жёсткости, есть замкнутое нигде не плотное множество.*

§ 7. Переход от многогранников к кривым поверхностям

1. Общие теоремы о выпуклых многогранниках, о которых шла речь в §§ 3—6, имеют значение не только сами по себе, но ещё с той точки зрения, что они допускают обобщения на более или менее произвольные выпуклые поверхности. При исследовании задач теории выпуклых поверхностей оказывается сначала полезным поставить и решить эти задачи для многогранников. В одних случаях это позволяет путём предельного перехода от многогранников к общим выпуклым поверхностям решить поставленную задачу

*) Если многогранник P_0 имеет плоскость симметрии и X, Y — две симметричные его вершины, то симметричные их смещения приводят к парам взаимно симметричных многогранников, близких к P_0. Однако при совмещении их путём отражения вершина X попадает в Y, и обратно; поэтому, если допускать совмещение лишь одинаково поименованных вершин, то такие совмещения исключаются. Аналогичное замечание применимо в случае наличия других элементов симметрии. Двулистность отображения A на B можно устранить, вводя ориентацию развёрток и тем самым удваивая B.

теории поверхностей. В других случаях, когда такой предельный переход не удаётся, мы получаем по крайней мере ориентировку в вопросе.

Благодаря наглядности и простоте свойств многогранников такой подход оказывается часто очень полезным, особенно в вопросах геометрии «в целом» или в применении к нерегулярным поверхностям, когда обычные для теории поверхностей аналитические методы теряют свой автоматизм *).

Так как нашей темой являются выпуклые многогранники, то мы ограничиваемся тем, что в конце почти каждой главы в параграфе «Обобщения» приводим без доказательства соответствующие теоремы для других выпуклых поверхностей с указанием на источники, где эти теоремы доказываются. Здесь же мы сделаем несколько общих замечаний — прежде всего о том, какие задания для общей выпуклой поверхности соответствуют рассматриваемым заданиям для многогранников.

2. В § 3 уже было выяснено, что задание развёртки многогранника эквивалентно заданию его внутренней метрики. Для общей выпуклой поверхности речь должна итти также о её внутренней метрике, т. е. о функции пары её точек, дающей расстояние между этими точками, измеренное на поверхности; оно равно по определению точной нижней границе длин кривых, лежащих на поверхности и соединяющих данные её точки.

Пусть на сфере S (или на другом многообразии) задана непрерывная функция $\rho(XY)$ пары её точек; мы говорим, что $\rho(XY)$ есть *метрика* поверхности F или что поверхность F реализует метрику $\rho(XY)$, если существует такое топологическое отображение h сферы S на поверхность F, что для каждой пары точек X, Y $\rho(XY)=\rho_F(h(X)h(Y))$, где ρ_F — внутренняя метрика поверхности F.

Пусть F_i и n_i — площади и внешние нормали граней многогранника P. Рассмотрим единичную сферу E, на которую производится сферическое отображение. Тогда, если M есть какое-либо множество на E, то

$$F_P(M)=\sum_{n_i \in M} F_i$$

есть площадь того множества на P, которое является полным прообразом множества M при сферическом отображении. (Сумма берётся по всем граням, нормали к которым направлены в M.) $F_P(M)$ есть функция множества на сфере E, называемая *поверхностной функцией* многогранника P. Задание площадей и нормалей граней, очевидно, эквивалентно заданию поверхностной функции. Для произвольной выпуклой поверхности Φ поверхностная функция определяется точно так же: $F_\Phi(M)$ есть площадь того множества N на Φ, которое является полным прообразом множества M при сферическом изображении, т. е. через каждую точку из N проходит хотя бы одна опорная плоскость, внешняя нормаль к которой направлена в M. (Можно доказать, что $F_\Phi(M)$ есть вполне аддитивная функция, определённая во всяком случае для всех борелевских множеств M **).)

Пусть $\overline{e}_i$ — данные лучи, исходящие из точки O, или соответственно точки на единичной сфере E с центром в O. Пусть ω_i — площади сферических изображений вершин многогранника P, лежащих на лучах $\overline{e}_i$. Если M есть множество на E, то

$$\omega_{P,O}(M)=\sum_{\overline{e}_i \in M} \omega_i$$

*) Последовательное проведение метода приближения многогранниками в применении к внутренней геометрии произвольных выпуклых поверхностей дано в моей книге «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей».

**) См. А. Д. Александров, К теории смешанных объёмов выпуклых тел, часть 1, Матем. сборник, т. 2, вып. 5 (1937). В этой работе впервые введено и самое понятие поверхностной функции.

есть площадь сферического изображения того множества на P, центральной проекцией которого является множество M. Функция множества $\omega_{P,O}(M)$ зависит не только от многогранника, но и от выбора точки O или сферы E, поэтому мы называем её площадью сферического изображения, отнесённой к сфере E. Задание лучей $\bar{e}_i$ и сферических изображений вершин ω_i, очевидно, эквивалентно заданию этой функции.

Для произвольной выпуклой поверхности Φ эта функция определяется аналогично: $\omega_{\Phi,O}(M)$ есть площадь сферического изображения того множества на Φ, центральной проекцией которого из точки O на сферу E является множество M. (Можно доказать, что $\omega_{\Phi,O}(M)$ есть вполне аддитивная функция, определённая во всяком случае для всех борелевских множеств *).)

Аналогично для бесконечной выпуклой поверхности Φ определяется функция $\omega_{\Phi,T}(M)$ — площадь сферического изображения, отнесённая к плоскости T: для данного множества M на плоскости T и $\omega_{\Phi,T}(M)$ есть площадь сферического изображения того множества на поверхности Φ, проекцией которого служит M.

Наконец, вместо опорных чисел для многогранника в случае произвольной выпуклой поверхности нужно рассматривать её опорную функцию $H(\boldsymbol{u})$. Для единичного вектора $\boldsymbol{n}$ $H(\boldsymbol{n})$ есть расстояние от начала O до опорной плоскости Q с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$, считающееся положительным, если направление от O к Q совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{n}$, и отрицательным, если это направление противоположно $\boldsymbol{n}$. Если вектор $\boldsymbol{u}$ — не единичный, то $H(\boldsymbol{u}) = |\boldsymbol{u}| \cdot H\left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right)$.

Следует ещё отметить, что вместо предельного многогранного угла для общей бесконечной выпуклой поверхности следует рассматривать «предельный конус», определяемый совершенно аналогично.

Пользуясь введёнными общими понятиями, легко формулировать теоремы единственности и жёсткости для общих выпуклых поверхностей, соответственно приведённым выше теоремам для многогранников. Для формулировки теорем существования нужны ещё условия которые следует наложить на соответствующие данные. Для функций $H(\boldsymbol{u})$, $F_\Phi(M)$, $\omega_{\Phi,E}(M)$, $\omega_{\Phi,T}(M)$ эти условия легко получаются из условий теорем о многогранниках. Они формулируются в последних параграфах глав VII и IX. Исключение составляет метрика $\rho(XY)$: необходимые условия, налагаемые на неё, не могут быть получены простым пересказом условий теорем о многогранниках **).

3. Теоремы единственности и жёсткости не могут быть сами по себе перенесены с многогранников на другие выпуклые поверхности путём предельного перехода. Для того чтобы это стало возможным, эти теоремы нужно дополнить оценками деформации многогранника в зависимости от изменения тех данных, которые фигурируют в этих теоремах, причём эти оценки не должны зависеть от числа вершин или во всяком случае не должны вырождаться при бесконечном возрастании числа вершин.

Рассмотрим, например, теорему 3 о равенстве изометричных замкнутых выпуклых многогранников. Ей должна соответствовать до сих пор не доказанная в общем случае теорема о равенстве изометричных замкнутых выпуклых поверхностей. Подход к доказательству этой предполагаемой теоремы через оценки деформации многогранника в зависимости от изменения его

*) См. мою книгу «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», §§ 2, 4 гл. V.

**) Эти условия можно найти в той же моей книге или в другой форме в моей статье «Геометрия и топология в Советском Союзе», § 8, Успехи матем. наук, т. II, вып. 5 (21) (1947).

внутренней метрики был, между прочим, указан С. Э. Кон-Фоссеном *) и состоит в следующем. Пусть r_{ij} и ρ_{ij} — расстояния между i-й и j-й вершинами многогранника, измеренные соответственно в пространстве и на самом многограннике. Пусть, далее, P_1 и P_2 — два замкнутых выпуклых многогранника, вершины которых поставлены во взаимно однозначное соответствие, и $r_{ij}^{(1)}$, $r_{ij}^{(2)}$, $\rho_{ij}^{(1)}$, $\rho_{ij}^{(2)}$ — введённые выше расстояния между их вершинами. Величина $\Delta r = \max \left| r_{ij}^{(1)} - r_{ij}^{(2)} \right|$ характеризует, очевидно, величину пространственной деформации при переходе от P_1 к P_2, а $\Delta\rho = \left| \rho_{ij}^{(1)} - \rho_{ij}^{(2)} \right|$ — величину внутренней деформации. Требуется дать оценку

$$\Delta r \leqslant f(\Delta\rho), \tag{1}$$

где непрерывная функция f должна обращаться в нуль при $\Delta\rho = 0$ и не зависеть от многогранников P_1 и P_2 или зависеть от самых общих характеристик их формы, как, например, от радиусов шаров, содержащих P_1 и P_2 и содержащихся в них. Допустим, что такая оценка найдена. Пусть F_1 и F_2 — две изометричные замкнутые выпуклые поверхности. Возьмём на них достаточно густые сети точек A_i^1, A_i^2, соответствующих друг другу в силу изометрического отображения F_1 на F_2. Впишем в F_1 и F_2 замкнутые выпуклые многогранники P_1 и P_2 с вершинами в этих точках. Тогда, как оказывается, чем гуще сеть точек A_i, тем ближе расстояние между ними, измеренное на многограннике, подходит к расстоянию, измеренному на поверхности. А так как поверхности изометричны, то тем самым величина $\Delta\rho$ для многогранников P_1 и P_2 стремится к нулю по мере сгущения сети точек A_i.

Если мы имеем оценку (1) с требуемыми свойствами, то при $\Delta\rho \to 0$ будем иметь $\Delta r \to 0$. Но $\Delta r = \max \left| r_{ij}^{(1)} - r_{ij}^{(2)} \right|$ есть не что иное, как максимум разности пространственных расстояний между соответственными точками A_i, A_j поверхностей F_1 и F_2. Поэтому должно быть $\Delta r = 0$, т. е. поверхности F_1 и F_2 равны.

Аналогичный подход возможен априори к любой другой теореме единственности. Однако, насколько я знаю, ни для одной из них не известна ни одна оценка желаемого типа, и потому такой подход к переносу теорем единственности с многогранников на общие выпуклые поверхности остаётся пока в области чистых гипотез.

Так же обстоит дело и с теоремами жёсткости. Поэтому эти теоремы для выпуклых поверхностей доказываются иными методами. Более того, например, теоремы единственности и жёсткости замкнутой выпуклой поверхности с данной (стационарной) внутренней метрикой до сих пор вообще не доказаны без дополнительных предположений о некоторой регулярности поверхности. Таким образом, в вопросах единственности и жёсткости теоремы о многогранниках могут служить лишь указанием на результат, к которому можно стремиться при переходе к любым выпуклым поверхностям.

4. С теоремами существования дело обстоит гораздо проще: все приведённые выше теоремы существования для выпуклых многогранников переносятся путём предельного перехода на общие выпуклые поверхности. Этот переход осуществляется в общих чертах следующим образом.

Пусть мы хотим доказать существование выпуклой поверхности с данными B_0. Пусть соответствующая теорема существования для выпуклых многогранников уже известна. Тогда доказываем теорему сходимости: если выпуклые многогранники P_n сходятся к поверхности F, то их данные B_{P_i} сходятся в том или ином смысле к данным B_F, относящимся к F. От сходимости данных B требуется лишь, чтобы она была однозначной, т. е. B_n не-

*) С. Э. Кон-Фоссен, Изгибание поверхностей в целом, Успехи матем. наук, вып. 1 (1936).

могут иметь двух пределов в смысле этой сходимости. Затем строим последовательность данных B_n, сходящихся к B_0 и относящихся к многогранникам. По теореме существования для многогранников существуют выпуклые многогранники P_n с данными B_n. Из этих многогранников выбираем сходящуюся последовательность P_{n_i}, что, оказывается, всегда можно сделать. Предел этой последовательности будет некоторой выпуклой поверхностью. По теореме сходимости B_{n_i} сходятся к B_F и вместе с тем по заданию B_{n_i} сходятся к B_0, а так как предел данных B_{n_i} может быть только один, то $B_F = B_0$, т. е. поверхность F имеет данные B_0.

Если данные B_0 представляют собой опорную функцию $H(\boldsymbol{n})$, то сходимость данных B_m к B_0 есть просто сходимость опорных функций, или сходимость опорных чисел h_i к значениям опорной функции $H(\boldsymbol{n})$ для векторов $\boldsymbol{n}_i$ при условии, что множество точек $\boldsymbol{n}_i$ на сфере беспредельно сгущается.

Если B_0 есть метрика $\rho(XY)$, заданная на сфере S, то её нужно приближать многогранными метриками положительной кривизны. Теорема же о сходимости метрик выглядит так: если замкнутые или бесконечные полные выпуклые поверхности Φ_n сходятся к Φ и точки X_n, Y_n на Φ_n сходятся соответственно к X, Y, то $\rho\Phi_n(X_nY_n)$ сходятся к $\rho\Phi(XY)$. Если B_0 есть одна из функций множества $F(M)$ или $\omega(M)$ на единичной сфере E, то сходимость следует понимать в смысле слабой сходимости. Если $\varphi_n(M)$ и $\varphi(M)$ — вполне аддитивные функции множества на сфере E, то говорят, что φ_n слабо сходятся к φ, если для всякой непрерывной функции $f(X)$ точки X на сфере E

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f(X)\,\varphi_n(dM) = \int_E f(X)\,\varphi(dM),$$

где интеграл понимается в смысле Радона *). Заданные функции $F(M)$ и $\omega(M)$ нужно приближать в смысле слабой сходимости «дискретными» функциями $F_n(M)$ и $\omega_n(M)$, имеющими конечные нагрузки в данных точках и обращающимися в нуль для всех M, не содержащих этих точек.

Метод предельного перехода от многогранников к другим поверхностям был впервые применён Минковским для доказательства существования замкнутой выпуклой поверхности Φ с данной гауссовой кривизной $K(\boldsymbol{n})$, заданной как функция внешней нормали. Если M есть множество на сфере E, то $F(M) = \int_M \frac{d\omega}{K(\boldsymbol{n})}$ (где $d\omega$ — элемент площади на E) есть не что иное, как площадь того множества на поверхности Φ, сферическое изображение которого есть M. Следовательно, указанная теорема Минковского есть частный случай общей теоремы существования замкнутой выпуклой поверхности с заданной поверхностной функцией $F(M)$.

---

*) Это понятие сходимости, соответствующее понятию слабой сходимости функционалов, можно характеризовать простыми геометрическими свойствами. Например, если $\varphi_n(M) \geqslant 0$ для всех M (как это верно для наших функций F и ω), то φ_n слабо сходятся к φ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(E) = \varphi(E)$ и для всякого замкнутого M $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(M) \leqslant \varphi(M)$. Доказательство этой и других характеристик слабой сходимости функций множества дано в моей работе «Additive set functions in abstract spaces», Матем. сборник, т. 13 (55), вып. 2—3 (1943), см. резюме и §§ 15—17 этой работы. Доказательства теорем о слабой сходимости функций F и ω для сходящихся выпуклых поверхностей даны в моих работах «О поверхностной функции выпуклого тела», Матем. сборник, т. 6 (48) (1939), стр. 167 и «Применение теоремы об инвариантности области...», Изв. Акад. наук СССР, сер. мат., 1939, стр. 243; см. также мою книгу «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», гл. V, § 2.

§ 8. Основные понятия топологии

1. Наглядные основания. Топологию можно наглядно определить как ту часть общей геометрии, где при изучении фигуры принимается во внимание только взаимное прилегание её частей. В основе общего понятия «прилегания» лежит то наглядное представление, которое вызывает следующие утверждения: окружность прилегает к внутренности круга; одно полушарие прилегает к другому, так что сфера представляется как составленная из двух прилегающих полушарий; но если исключить экватор, то полушария уже не будут прилегать друг к другу: они оказываются как бы отрезанными одно от другого разрезом по экватору.

Попытаемся ещё немного проанализировать наше наглядное представление о прилегании. Всякая геометрическая фигура есть множество, или, как говорят в элементарной геометрии, «геометрическое место» точек, и в этом множестве имеется наглядно понимаемое прилегание его частей друг к другу. Основным является понятие о прилегании одной точки к множеству точек.

В нашем представлении точка прилегает к множеству, если она бесконечно близка к нему, как, например, вершина квадрата к его внутренности; тот факт, что точка принадлежит множеству, мы тоже будем рассматривать как прилегание.

Вдумываясь, далее, в понятие прилегания, мы замечаем, что два множества — две фигуры (или две части одной фигуры) — прилегают друг к другу в том и только в том случае, если хотя бы в одной из них есть точка, прилегающая к другой.

Рассматривая приведённые только что примеры, мы наглядно убеждаемся, что именно в этом смысле окружность прилегает к внутренности круга, а два полушария при исключённом экваторе не прилегают друг к другу (потому что всякая точка одного полушария удалена от точек другого не меньше, чем на расстояние её до экватора).

2. Общее топологическое пространство. Абстрактное обобщение этих наглядных представлений приводит к понятию общего топологического пространства. Именно, пусть имеется некоторое множество каких-либо элементов, которые мы назовём точками.

Множество называется общим топологическим пространством, если каждой его части, т. е. каждому содержащемуся в нём множеству M, относятся по какому-либо правилу точки, прилегающие к M, или, как говорят, точки прикосновения множества M. При этом и сами точки множества M считаются его точками прикосновения. Но мы присоединяем ещё естественное условие, что «с увеличением множества число точек прикосновения не убывает», т. е., говоря строго, что если M_1 содержится в M_2, то всякая точка прикосновения для M_1 будет таковой и для M_2.

Два множества в общем топологическом пространстве мы называем прилегающими друг к другу, если хотя бы одно из них содержит точки прикосновения другого.

Ясно, что эти определения повторяют в несколько иных словах то, что говорилось выше о прилегании фигур и точек.

Самым основным примером общего топологического пространства является n-мерное «числовое» или эвклидово пространство *). Его точками являются всевозможные последовательности по n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Точка $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ считается точкой прикосновения множества A, если в A имеются точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, сколь угодно близкие к a, т. е. при всяком $\varepsilon>0$ в A найдётся точка x такая, что $|x_1-a_1|<\varepsilon, \ldots, |x_n-a_n|<\varepsilon$. В этом случае либо точка a принадлежит множеству A, либо в A есть

*) Его называют эвклидовым, отвлекаясь, однако, от всех его свойств, кроме топологических.

последовательность точек x^i, сходящаяся к a, т. е. такая, что разности координат точек x^i и точки a стремятся к нулю.

Числовая прямая есть не что иное, как одномерное числовое пространство. Аналогично числовая плоскость (x, y) есть двумерное числовое пространство.

Если на числа x_i наложить условие, что все они заключены в данных пределах, например $0 < x_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, то такое пространство называется n-мерным (числовым) кубом, точнее внутренностью куба, в отличие от полного куба, который включает также грани и определяется неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$.

Трёхмерное эвклидово пространство также является топологическим пространством в силу следующего определения точек прикосновения: точка a есть точка прикосновения множества A, если в A имеются точки x, сколь угодно близкие к a.

Примером общего топологического пространства может служить также любая развёртка. При этом точки, подлежащие склеиванию друг с другом, считаются за одну. Если M — множество точек развёртки, то точка a развёртки считается точкой прикосновения для M, когда сколь угодно близко к a или к склеиваемой с ней точкой имеются точки множества M.

Всякое множество точек A в общем топологическом пространстве R может само рассматриваться как общее топологическое пространство в силу следующего определения: если множество M содержится в A, то точка a, принадлежащая A, считается точкой прикосновения множества M в A, если она является его точкой прикосновения во всём R. Говорят, что A есть *подпространство* пространства R.

В этом смысле всякая фигура A в эвклидовом пространстве является общим топологическим пространством. Точка a, принадлежащая A, считается точкой прикосновения множества M, содержащегося в A, если сколь угодно близко от неё имеются точки множества M.

Точно так же всякая часть n-мерного числового пространства оказывается общим топологическим пространством.

3. Замкнутые и открытые множества; граница. Речь будет итти о множествах в любом общем топологическом пространстве.

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения.

Множество называется *открытым*, если его дополнение (т. е. множество всех не принадлежащих ему точек) замкнуто. Это равносильно следующему определению: множество открыто, если ни одна его точка не является точкой прикосновения его дополнения; потому что тогда само дополнение содержит все свои точки прикосновения, т. е. замкнуто.

Точка называется *граничной* точкой множества M, если она является точкой прикосновения как для M, так и для его дополнения. *Граница* множества есть множество всех его граничных точек.

Точка множества называется *внутренней*, если она не лежит на его границе, т. е. не является точкой прикосновения дополнения. Из этого определения ясно, что открытое множество характеризуется тем, что все его точки — внутренние.

Примеры. Полупространство вместе с ограничивающей плоскостью есть замкнутое множество; без неё оно — открытое; указанная плоскость есть его граница.

Куб в n-мерном пространстве определяется неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Его внутренность образуют точки, для которых $0 < x_i < 1$. Граница его состоит из точек, для которых $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ и хотя бы в одном случае имеет место знак равенства.

Окрестностью точки называют, как правило, любое содержащее эту точку открытое множество. Окрестность тем самым так окружает точку, что последняя не будет точкой прикосновения для дополнительного множества. Это выясняет наглядный смысл слова «окрестность».

4. Связность. Множество называется *связным*, если оно не может быть разложено на две не прилегающие друг к другу части. В силу определения прилегания это означает, что множество не может быть разложено на такие две части, что ни одна из них не содержит точек прикосновения другой.

Если самое множество M рассматривать как пространство (подпространство всего данного пространства), то в нём естественно определяются *замкнутые и открытые множества относительно самого* M; коротко: замкнутые и открытые в M.

Имеет место теорема:

Множество M связно тогда и только тогда, когда оно не может быть разложено на две части, являющиеся замкнутыми (*или открытыми*) M.

Действительно, пусть M несвязно, т. е. допускает разложение на две части M_1 и M_2 так, что ни в одной из них нет точек прикосновения другой. Тогда M_1 и M_2 сами содержат все свои точки прикосновения в M и, значит, замкнуты в M. А так как они дополняют друг друга, то они одновременно оказываются открытыми в M.

Пусть теперь M разложено на части M' и M'', замкнутые в M. Это означает, что M' и M'' сами содержат свои точки прикосновения в M, т. е. не прилегают, и M тем самым несвязно. Так как M' и M'' дополняют друг друга до M, то, поскольку M' замкнуто, M'' открыто и по аналогичной причине M' также открыто. Следовательно, разложение на два замкнутых множества является всегда разложением на открытые множества. Совершенно так же доказывается обратное: что разложение на открытые множества оказывается всегда разложением на замкнутые.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Часть M_1 множества M называется его *связной компонентой*, если M_1 связно и не содержится ни в какой связной части множества M, кроме самого себя.

Всякое множество либо связно, либо распадается на связные компоненты, не имеющие общих точек.

Доказательство основано на следующей теореме:

Если связные множества M_ξ имеют хотя бы одну общую точку a, то эти множества в сумме образуют связное множество.

Докажем сначала эту последнюю теорему. Пусть связные множества M_ξ образуют в сумме множество M. Если бы M было несвязно, то оно распадалось бы на неприлегающие части M' и M''.

Так как M' и M'' образуют в сумме всё M, то для каждого множества M_ξ имеются только две возможности: либо оно целиком содержится в одном из множеств M', M'', либо оно имеет общие точки с обоими этими множествами.

Вторая возможность исключается. Действительно, если M_ξ состоит из двух частей M'_ξ и M''_ξ, входящих в M' и M'', то, поскольку M' и M'' не прилегают, M'_ξ и M''_ξ также не прилегают. В результате M_ξ оказывается несвязным, вопреки условию.

Но если вторая возможность исключена, то каждое M_ξ содержится целиком в M' или в M''. Тогда, поскольку все M_ξ имеют общую точку, M' и M'' также должны были бы иметь общую точку, т. е. прилегали бы друг к другу. Полученное противоречие доказывает, что разложение всего множества M на неприлегающие части M' и M'' невозможно, и M связно.

Докажем теперь высказанное выше утверждение о распадении на связные компоненты. Каждая точка представляет собой связное множество, поскольку она вовсе неразложима.

Возьмём какую-нибудь точку x данного множества M и образуем сумму всех связных множеств, содержащих x и содержащихся в M. Такие множества имеются, поскольку сама точка x представляет собой одно из них. Полученное множество — обозначим его $M(x)$ — будет связным в силу только что доказанной теоремы. По самому его построению оно не содержится уже ни в каком связном множестве, и, следовательно, является связной компонентой.

Если $M(y)$ — множество, определённое таким же образом для другой точки y, то оно также связно. Если оно имеет с $M(x)$ общие точки, то в силу той же теоремы сумма $M(x)+M(y)$ будет связным множеством. Оно содержит точку x, а потому должно содержаться в $M(x)$, так как по построению множество $M(x)$ содержит все связные множества, включающие точку x. То же верно в отношении $M(y)$. Поэтому, если множества $M(x)$ и $M(y)$ имеют общие точки, то они совпадают.

Определяя для каждой точки x множество $M(x)$, мы видим, что эти множества либо совпадают, либо не имеют общих точек. Таким образом, всё множество M распадается на неимеющие общих точек связные компоненты $M(x)$, что и требовалось доказать.

Отметим ещё два предложения.

1. *Если в множестве M для каждых двух точек существует содержащее их связное множество, то само M связно.*

2. *В связном открытом множестве эвклидова пространства* (*или n-мерного числового пространства*) *каждые две точки соединимы ломаной.*

Эти предложения не будут использованы, и мы оставляем их доказательства читателю.

5. Отображения. Пусть X и Y — два множества в одном или разных пространствах. Сопоставление каждой точке x из X некоторой точки y из Y называется *отображением* множества X в Y. Обозначая самое отображение через φ, пишут: $y=\varphi(x)$. Каждой части X' множества X сопоставляется при этом часть Y' множества Y: $Y'=\varphi(x')$. Здесь Y' называется *образом* X', а X' — *прообразом* Y'.

Функция $y=f(x)$ вещественной переменной x, определённая на отрезке X, есть не что иное, как отображение этого отрезка в числовую прямую. Аналогично функция n переменных есть отображение части n-мерного пространства, где она определена, в числовую прямую.

Отображение называется *непрерывным*, если оно не нарушает прилеганий (такое нарушение и есть разрыв в наглядном смысле). Иными словами, отображение φ непрерывно, если оно сохраняет точки прикосновения; т. е. если x есть точка прикосновения для X', то $\varphi(x)$ есть точка прикосновения для $\varphi(X')$.

В числовом пространстве точка x прилегает к X', если в X' имеются точки x' с координатами $x_1', \ldots, x_n'$, сколь угодно близкими к координатам точки x. Это равносильно тому, что в X' есть последовательность точек $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, сходящаяся к x в том смысле, что разности координат $x_i^{(k)} - x_i$ точек $x^{(k)}$ и точки x стремятся к нулю. Поэтому для отображения φ из одного числового пространства в другое непрерывность означает, что если $x^{(k)} \longrightarrow x$, то $\varphi(x^{(k)}) \rightarrow \varphi(x)$ в аналогии с обычным определением непрерывности функций.

Отображение φ называется *взаимно однозначным*, если не только каждой точке x сопоставляется единственная точка $y=\varphi(x)$, но разным x сопоставляются разные y. Иными словами, каждая y соответствует только одной x. В таком случае обратное отображение φ^{-1}, сопоставляющее «y-ам x-ы», будет однозначным.

Если как прямое отображение φ, так и обратное φ^{-1} непрерывны, то самое отображение φ называется *взаимно непрерывным*.

Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение называется *топологическим* (или *гомеоморфизмом*). Если множество X допускает такое отображение на множество Y, то X называется *гомеоморфным* Y. А так как в силу взаимной однозначности и взаимной непрерывности оба множества играют здесь одинаковую роль, то можно говорить, что они гомеоморфны друг другу.

Взаимная однозначность отображения означает, что при таком отображении точки не расщепляются и не сливаются. Взаимная непрерывность означает, что никакие прилегания не исчезают и не появляются. Поэтому с точки зрения одних прилеганий (отвлекаясь от иных свойств элементов и множеств) два гомеоморфных множества имеют одинаковое строение. Топологически они совершенно эквивалентны. Все топологические выводы, т. е. выводы, основанные на прилегании, верные для одного из них, верны также для другого. Это совершенно аналогично тому, что две равные фигуры (т. е. допускающие отображение, не меняющее расстояний между их точками) геометрически одинаковы. Как геометрические свойства, основанные на понятии расстояния, одинаковы у таких фигур, так и топологические свойства, основанные на понятии прилегания, одинаковы у двух гомеоморфных множеств.

6. Многообразие. Под n-мерным многообразием мы понимаем в этой книге такое топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную внутренности n-мерного куба*). Иными словами, это есть такое пространство, где вокруг каждой точки имеется окрестность, в которой можно ввести координаты $x_1, \ldots, x_n$, изменяющиеся в некоторых пределах, скажем $a-\varepsilon < x_i < a+\varepsilon$ $(i=1, 2, \ldots, n)$; при этом связь точек и совокупностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относимых им координат взаимно однозначна и взаимно непрерывна.

Всякое открытое множество n-мерного числового пространства является n-мерным многообразием. Действительно, в таком пространстве уже введены координаты. Открытое множество характеризуется тем, что никакая его точка a не прилегает к его дополнению. Это означает, что все точки с координатами, близкими к координатам точки a, также содержатся в данном множестве. То-есть вместе с точкой $a(a_1, \ldots, a_n)$ оно содержит все точки x с такими координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что $|a_i - x_i| < \varepsilon$, т. е. $a-\varepsilon < x_i < a+\varepsilon$ $(i=1, \ldots, n)$. Это, согласно определению, и означает, что такое множество есть n-мерное многообразие.

Примером двумерного многообразия может служить любая развёртка без границы. Каждая её точка имеет окрестность, гомеоморфную квадрату, или, что равносильно, кругу. Для точек внутри многоугольников развёртки это ясно; далее, окрестность точки внутри ребра складывается из двух «полуокрестностей», лежащих на многоугольниках, склеиваемых друг с другом по данному ребру; наконец, окрестность вершины слагается из угловых секторов, сходящихся в ней согласно «закону склеивания» многоугольников.

Путём склеивания, т. е. отождествления, можно строить трёхмерные многообразия. Возьмём, например, куб и отождествим симметричные точки его противоположных граней; в результате получим некоторое трёхмерное многообразие. Такой приём применяется при построении n-мерных многообразий: они склеиваются из «развёрток», образованных n-мерными многогранниками. Топологическое строение многообразия определяется тогда законом склеивания развёртки. Сравните это с теоремой Эйлера, выражающей характерное свойство закона склеивания сферы из развёртки.

В нашей книге многообразия будут определяться не таким построением, но в согласии с общим определением путём введения координат в окрестности каждого элемента — точки многообразия. Например, все замкнутые выпуклые многогранники с e вершинами образуют $3e$-мерное многообразие. Каждая вершина определяется тремя координатами, а все e вершин $3e$ координатами. Замкнутый выпуклый многогранник определяется своими вершинами, а потому теми же $3e$ координатами.

---

*) Обычно в понятие многообразия включают ещё требования его связности и возможности покрыть его не более чем счётным числом окрестностей, гомеоморфных внутренности куба (а также требование, чтобы его можно было разбить на симплексы). Эти требования мы отбрасываем.

Если дан многогранник P_0, то при достаточно малых смещениях его вершин ни одна из них не попадёт в выпуклую оболочку остальных. Поэтому на смещенные вершины будет натягиваться многогранник P также с e вершинами. Координаты вершин можно, следовательно, менять в окрестности значений, относящихся к многограннику P_0, и таким образом «окрестность» этого многогранника отображается на $3e$-мерный куб.

Прикосновение в таком многообразии многогранников определяется естественным образом. Многогранник P_0 «прикасается» к множеству многогранников P, если среди этих последних имеются такие, вершины которых сколь угодно близки к вершинам P_0.

Аналогичным образом определённые многообразия будут фигурировать в доказательствах теорем существования в главах IV, VII, IX.

§ 9. Теорема об инвариантности области

1. Мы докажем теорему, на которой основана лемма об отображении, а именно:

При топологическом отображении n-мерного многообразия R_1 в n-мерное многообразие R_2 всякое открытое множество многообразия R_1 переходит в открытое множество многообразия R_2 *).

Открытое множество характеризуется тем, что всякая его точка — внутренняя, т. е. может быть окружена окрестностью, гомеоморфной n-мерному шару и лежащей в рассматриваемом множестве. В качестве такой окрестности всегда можно взять выпуклый n-мерный многогранник с наименьшим возможным числом вершин. Такой многогранник называется n-мерным симплексом. Он имеет $n+1$ вершину. Для $n=0, 1, 2, 3$ симплексами являются, соответственно, точка, отрезок, треугольник и тетраэдр. Каждая $(n-1)$-мерная грань n-мерного симплекса, очевидно, есть $(n-1)$-мерный симплекс.

Совершенно очевидно, что достаточно доказать следующее:

При топологическом отображении φ n-мерного симплекса T в n-мерное эвклидово пространство E всякая внутренняя точка p симплекса T переходит во внутреннюю точку множества $\Phi=\varphi(T)$

Доказательство будет состоять в том, что мы охарактеризуем внутренние точки симплекса таким свойством, которое очевидным образом сохраняется при топологических отображениях.

Прежде всего введём понятие замкнутого покрытия замкнутого множества: *конечную совокупность замкнутых множеств $A_1, A_2, \ldots, A_s$ назовём замкнутым покрытием множества Φ, если эти множества в сумме дают множество Φ.*

Число k назовём кратностью покрытия, если существует точка множества Φ, принадлежащая одновременно k множествам A_i, и вместе с тем ни одна точка из Φ не принадлежит одновременно большему числу мно-

---

*) Сформулированная теорема может показаться тривиальной, так как, при топологическом отображении одного пространства на другое, открытое множество переходит в открытое по определению топологического отображения. Однако из сказанного следует лишь то, что образ открытого множества будет открытым относительно образа пространства R_1 в R_2; например, при тождественном отображении прямой в плоскость образ прямой, очевидно, не будет открытым множеством относительно плоскости, хотя относительно самого себя он, конечно, будет открытым. Утверждение, которое мы будем доказывать, состоит в том, что в условиях теоремы образ всякого открытого множества есть множество, открытое относительно всего пространства R_2. Нетрудно убедиться в том, что это равносильно следующему утверждению, более наглядному по форме: топологический образ многообразия R_1 в многообразии R_2 не имеет границы.

жеств A_i. Если диаметры *) всех множеств A_i меньше числа $\varepsilon > 0$, то будем говорить об «*ε-покрытии*».

Пользуясь этими понятиями, мы дадим топологически инвариантную характеристику внутренних точек замкнутого множества, лежащего в n-мерном эвклидовом пространстве:

Для того чтобы точка p замкнутого множества Φ в n-мерном эвклидовом пространстве была внутренней, необходимо и достаточно, чтобы существовало замкнутое покрытие $\alpha = \{A_1, \ldots, A_s\}$ множества Φ кратности $n+1$ такое, что 1) *p — единственная точка из Φ, принадлежащая $n+1$ множеству A_i;* 2) *всякое покрытие α' множества Φ, отличающееся от α лишь в достаточно малой окрестности $U(p)$ точки p* **), *имеет кратность $\geqslant n+1$ (здесь под $U(p)$ понимается окрестность точки p относительно множества Φ, т. е. пересечение окрестности точки p в n-мерном эвклидовом пространстве с множеством Φ).*

Это утверждение равносильно доказываемой теореме. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что все условия, характеризующие здесь внутреннюю точку n-мерного симплекса, сохраняются при топологическом отображении. Непосредственно очевидно, что понятия кратности покрытия и «достаточно малой» окрестности $U(p)$ топологически инвариантны. Остаётся проверить, что замкнутое покрытие симплекса T при топологическом отображении переходит в замкнутое покрытие его образа $\Phi = \varphi(T)$, и обратно. Так как элементы замкнутого покрытия симплекса, как и сам симплекс, суть замкнутые и ограниченные множества эвклидова пространства, то всё сводится к доказательству утверждения: топологический образ замкнутого ограниченного множества n-мерного эвклидова пространства в n-мерном эвклидовом пространстве является замкнутым и ограниченным множеством. Доказательство совсем просто: ограниченность образа непосредственно следует из теоремы Вейерштрасса о том, что непрерывная функция, заданная на замкнутом ограниченном множестве, ограничена сверху и снизу; замкнутость вытекает из теоремы Больцано-Вейерштрасса. (Пусть M — точка сгущения ***) образа; сходящейся к ней последовательности точек соответствует бесконечная последовательность точек в прообразе, имеющая по теореме Больцано-Вейерштрасса точку сгущения; в силу непрерывности топологического отображения эта точка сгущения отображается в рассматриваемую точку M и потому последняя принадлежит образу; тем самым образ содержит все свои точки сгущения, т. е. замкнут.)

2. Возвращаясь к сформулированному свойству внутренних точек, докажем сначала, что всякая точка множества Φ, не являющаяся внутренней этим свойством не обладает. Для этого понадобится следующая

Лемма 1. *При сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ существует замкнутое ε-покрытие границы $\dot{T}$ n-мерного симплекса T, имеющее кратность $\leqslant n$.*

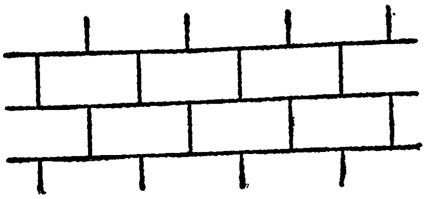
Сначала укажем ε-покрытие (ε произвольно мало) n-мерного пространства E, имеющее кратность $n+1$. Для $n=1$ нужное покрытие строится путём разбиения прямой на равные отрезки. Для $n > 1$ искомое покрытие

*) Диаметром множества называется точная верхняя граница расстояний между его точками. Под расстоянием между двумя точками понимается, как обычно, корень квадратный из суммы квадратов разностей их координат.

**) Пусть покрытие α состоит из множеств $A_1, \ldots, A_s$, а покрытие α' — из множеств $A'_1, \ldots, A'_t$, при этом в общем случае $s \neq t$. Обозначим через $\overline{A}_i$ (соответственно $\overline{A}'_i$) ту часть множества A_i (соответственно $\overline{A}'_i$), которая не имеет общих точек с $U(p)$. Мы говорим, что покрытие α' отличается от α лишь в $U(p)$, если всякое $\overline{A}_i$ совпадает с некоторым $\overline{A}'_j$, и обратно.

***) Точка m называется точкой сгущения множества M, если каждая её окрестность содержит бесконечное множество точек из M, отличных от m.

строится по индукции: n-мерное пространство разбивается $(n-1)$-мерными плоскостями на достаточно тонкие параллельные слои. Одну из этих плоскостей разобьём на равные $(n-1)$-мерные кубы уже установленным способом и это разбиение спроектируем ортогонально на все остальные $(n-1)$-мерные плоскости. Тогда каждый слой разобьётся на n-мерные параллелепипеды. Сдвигая соседние слои параллельно, добьёмся, чтобы каждая вершина параллелепипеда попала внутрь $(n-1)$-мерной грани параллелепипеда из соседнего слоя (на черт. 72 изображён случай $n=2$). Тогда, очевидно, кратность покрытия пространства такими параллелепипедами на 1 больше кратности покрытия $(n-1)$-мерных плоскостей и потому равна $n+1$.



Черт. 72.

Теперь пусть в E имеется произвольный n-мерный симплекс T. Построим только что указанное ε-покрытие пространства E. Из построения ясно, что точки пространства E, принадлежащие одновременно $n+1$ кубу покрытия, расположены так, что наименьшее расстояние между двумя такими точками больше некоторого числа $\delta < 0$.

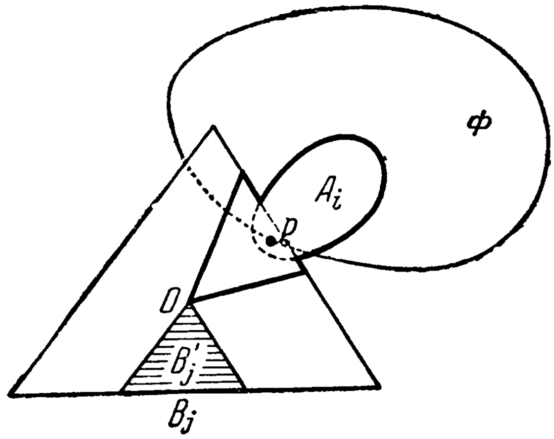
Пусть на границе $\tilde{T}$ симплекса T имеются такие точки. Выберем в пространстве E направление, не параллельное ни одной из $(n-1)$-мерных граней симплекса T, и произведём в этом направлении столь малый параллельный сдвиг симплекса T, чтобы при этом ни одна точка пространства E, принадлежащая $n+1$ кубу покрытия и не лежавшая на $\tilde{T}$, не попала на $\tilde{T}$. (Точки, не лежащие на $\tilde{T}$ и принадлежащие $n+1$ кубу покрытия, не могут быть сколь угодно близки к $\tilde{T}$, так как иначе они имели бы точку сгущения и тем самым среди них нашлись бы точки, сколь угодно близкие друг к другу.) Так как, сверх того, направление сдвига выбрано так, что всякая точка, лежавшая на $\tilde{T}$, перестаёт принадлежать $\tilde{T}$, то в результате сдвига на $\tilde{T}$ не останется точек, принадлежащих $n+1$ кубу покрытия пространства E. Но тогда пересечение этих кубов с $\tilde{T}$, будучи замкнутыми множествами (так как пересечение любого числа замкнутых множеств само замкнуто) диаметра $<\varepsilon$, образуют требуемое покрытие границы $\tilde{T}$. Лемма доказана.

Пусть p не является внутренней точкой множества Φ. Рассмотрим замкнутое покрытие $\alpha = \{A_1, \ldots, A_s\}$ множества Φ, имеющее кратность $n+1$. Допустим, что p — единственная точка из Φ, принадлежащая $n+1$ множеству A_i, и покажем, что можно построить другое замкнутое покрытие α', имеющее кратность $\leqslant n$ и совпадающее с покрытием α всюду, за исключением произвольно малой окрестности $U(p)$ точки p (окрестность $U(p)$ берётся относительно множества Φ).

Построим n-мерный симплекс T, содержащий точку p внутри и такой, что его общая часть с Φ содержится в $U(p)$. Так как p — единственная точка множества Φ, принадлежащая $n+1$ множеству A_i, то ни одна точка границы $\tilde{T}$ симплекса T не принадлежит более чем n множествам A_i. Отсюда следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ всякое множество M диаметра $<\varepsilon$, содержащееся в $\tilde{T}$, имеет общие точки не более чем с n множествами A_i. В самом деле, если это не так, то выберем последовательность положительных чисел ε_j $(j=1, 2, \ldots)$, стремящуюся к нулю, и для каждого ε_j найдём на $\tilde{T}$ множество M_j диаметра $<\varepsilon_j$, имеющее общие точки с $n+1$ множеством $A_{i1}, \ldots, A_{j_{n+1}}$. Так как различных комбинаций по $n+1$ множеству из конечного числа множеств A_i — лишь конечное число, то среди этих множеств найдётся $n+1$ множеств $A^1, \ldots A^{n+1}$ таких, что существуют сколь угодно большие номера j, для которых все множества $A^1, \ldots, A^{n+1}$ имеют общие точки с множествами M_j и, следовательно, для каждого такого числа j

существует точка b_j, принадлежащая $\tilde{T}$ и удалённая от каждого из множеств $A^1, \ldots, A^{n+1}$ не более чем на ε_j *). Так как точки b_j расположены все в ограниченной части пространства (именно, — на $\tilde{T}$), то по теореме Больцано-Вейерштрасса множество точек b_j имеет точку сгущения b на $\tilde{T}$. В сколь угодно малой окрестности точки b находятся точки b_j со сколь угодно большими номерами и потому сколь угодно близкие к каждому из множеств $A^1, \ldots, A^{n+1}$. Значит, точка b есть точка прикосновения каждого из множеств $A^1, \ldots, A^{n+1}$ и в силу их замкнутости принадлежит им всем одновременно, что исключено по предположению.

Итак, выберем такое $\varepsilon > 0$, чтобы множества диаметров $< \varepsilon$, лежащие на $\tilde{T}$, не могли пересекаться одновременно более чем с n множествами A_i. По лемме 1 построим $\frac{\varepsilon}{2}$-покрытие $\beta = \{B_1, \ldots, B_m\}$ границы $\tilde{T}$ симплекса T. Так как p не является внутренней точкой множества Φ, то внутри симплекса T найдётся точка O, не принадлежащая множеству Φ. Спроектируем множества $B_j (j = 1, \ldots, m)$ из точки O, т. е. построим множества B'_j, каждое из которых состоит из соответствующего множества B_j и прямолинейных отрезков (вместе с их концами), соединяющих точки можества B_j с точкой O.



Черт. 73.

Построим теперь замкнутое покрытие α_β множества Φ и симплекса T. А именно, сначала каждое множество A_i заменим его частью, не содержащей внутренних точек симплекса T (если A_i лежит целиком внутри T, то просто выбросим его); при этом A_i заменится, очевидно, некоторым замкнутым множеством A''_i. Часть покрытия внутри симплекса T заменим покрытием симплекса T «пирамидами» B'_j (черт. 73). Затем пирамиды B'_j «приклеим» к множествам A_i по такому правилу: если B'_j имеет общие точки с некоторыми множествами A''_i, то B'_j приклеиваем к одному из этих множеств и только к одному; если B'_j не имеет общих точек ни с каким множеством A''_j, то оставляем его без изменения. После этого покрытие α_β определим так: его элементами служат множества, полученные из множеств A''_i присоединением к каждому из них всех приклеенных к нему множеств B'_j (если к множеству A''_i ничего не приклеено, то оно без изменения входит в состав покрытия α_β), а также множества B'_j, ни к чему не приклеенные (черт. 73).

Утверждается, что всякая точка, отличная от O, принадлежит не более чем n множествам покрытия α_β. Действительно, каждая точка, лежащая вне T, может принадлежать $n+1$ множеству из α_β лишь в том случае, если она принадлежит $n+1$ соответствующему множеству из α, что исключено, так как точка p лежит внутри T. Если бы такая точка b нашлась внутри T, то её проекция из точки O на $\tilde{T}$ принадлежала бы одновременно $n+1$ множеству B_j, что также невозможно. Остаётся испытать точки, лежащие на $\tilde{T}$

*) Расстоянием точки до множества называется точная нижняя граница её расстояний до точек этого множества.

Пусть a — одна из таких точек. Так как каждое множество B_j имеет диаметр $< \frac{\varepsilon}{2}$, то объединение всех множеств B_j, содержащих точку a (их по построению не более n), имеет диаметр $< \varepsilon$ и потому имеет общие точки не более чем с n множествами A''_i. Таким образом, как число пирамид B'_j, содержащих точку a, так и число множеств A''_i, к которым они могут быть приклеены при образовании покрытия α_3, меньше n. А так как каждая пирамида B'_j приклеивается не более чем к одному множеству A''_i, то число множеств покрытия α_3, содержащих точку a, тоже не больше n.

А теперь, заменив каждое множество покрытия α_3 его общей частью с множеством Φ, получим покрытие α множества Φ, отличающееся от исходного покрытия α лишь внутри $U(p)$ и имеющее кратность $\leqslant n$ (так как точка O лежит вне Φ и при переходе от α_3 к α' устраняется из рассмотрения).

Таким образом, мы выяснили, что указанный нами признак внутренних точек является достаточным, так как для невнутренних точек он заведомо не выполняется. Остаётся доказать, что этот признак необходим, т. е. выполняется для всякой внутренней точки множества Φ.

3. Итак, пусть p — внутренняя точка. Возьмём симплекс T, содержащийся в Φ и содержащий внутри себя точку p. Через точку p проведём $(n-1)$-мерные плоскости, параллельные $(n-1)$-мерным граням симплекса T.

Каждая такая плоскость разбивает пространство, а тем самым и множество Φ на две части. Одна из этих частей содержит лишь одну вершину симплекса T, другая — все остальные. Части, содержащие по одной вершине симплекса, мы обозначим через $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Эти множества, очевидно, образуют замкнутое покрытие α множества Φ и при этом p — единственная точка из Φ, принадлежащая $n+1$ множеству покрытия (черт. 74). Покажем, что если окрестность $U(p)$ точки p настолько мала, что не пересекается с границей симплекса T, то, изменяя покрытие α в окрестности $U(p)$, невозможно получить покрытие меньшей кратности.

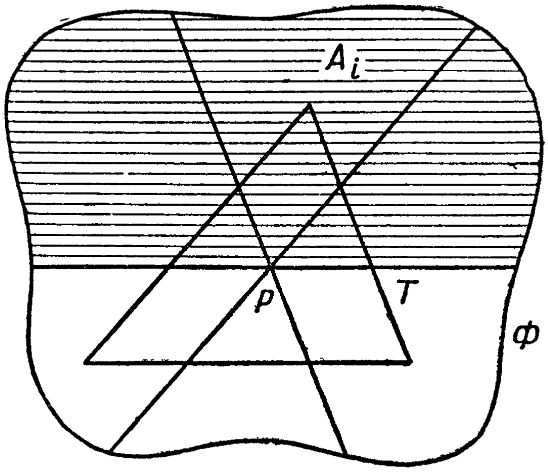
Пусть в окрестности $U(p)$ покрытие α изменилось произвольным образом. Такое изменение в общем случае сводится к тому, что множества A_i заменяются другими, которые совпадают с первоначальными вне $U(p)$, и, кроме того, могут появляться новые множества, целиком лежащие в $U(p)$. Каждое из этих «новых» множеств присоединим к одному из деформированных множеств A_i и получившиеся множества обозначим через $\tilde{A}_i$. Мы покажем, что существует точка, принадлежащая одновременно всем множествам $\tilde{A}_i$. Для этого мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма Шпернера. *Пусть K — произвольная триангуляция n-мерного симплекса T*) с вершинами $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$. Пусть каждой вершине e'_k триангуляции K' поставлена в соответствие вершина $S(e'_k) = e_{i_k}$ симплекса T, принадлежащая той его грани наименьшего числа измерений, на которой лежит e'_k (сам симплекс считается своей n-мерной гранью и потому внутренней точке e'_k можно сопоставить любую вершину симплекса). Тогда существует такой n-мерный симплекс T_i триангуляции K, что его вершины отображаются в различные (и, следовательно, во все) вершины симплекса T.*

Симплекс T_i, все вершины которого отображаются в различные вершины симплекса T, назовём «нормальным». Лемма будет доказана, если мы устано-

*) Триангуляцией симплекса T мы называем такое разбиение T на симплексы T_i, при котором общая часть двух симплексов T_i и T_j является гранью каждого из них (гранью любого числа измерений). Вершины симплексов T_i называются вершинами триангуляции.

вим, что число нормальных симплексов нечётно. Это доказывается индукцией по n. Для $n=0$ утверждение тривиально. Пусть оно верно для $n-1$. Выделим у симплекса T грань $|e_1 \ldots e_n|$ с вершинами $e_1, \ldots, e_n$. $(n-1)$-мерную грань симплекса T_i, вершины которой отображаются в $e_1, \ldots, e_n$, назовём отмеченной. Очевидно, что если симплекс T_i имеет отмеченные грани, не будучи нормальным, то таких граней — две. Поэтому если бы число нормальных симплексов было чётным, то общее число отмеченных граней у всех симплексов T_i также было бы чётным. Но так как всякая отмеченная грань, лежащая внутри T, принадлежит двум симплексам, то общее число таких граней само чётно. Следовательно, должно быть чётным число отмеченных граней, лежащих на $(n-1)$-мерных гранях симплекса T. Но по определению отображения S такие грани могут лежать только на грани с вершинами $e_1 \ldots, \ldots, e_n$. А этого не может быть по предположению индукции, так как отмеченные грани, лежащие на грани $|e_1, \ldots, e_n|$, играют роль нормальных симплексов в том отображении, которое испытывает триангуляция грани $|e_1 \ldots e_n|$ в результате отображения S. Лемма доказана.



Черт. 74.

Теперь докажем, что множества $\tilde{A}_i$ имеют общую точку. Для этого возьмём произвольную триангуляцию K нашего симплекса T. Определим какое-нибудь отображение вершин триангуляции K в вершины симплекса T с условием, что и вершина T и отображаемая в неё вершина триангуляции принадлежат одному и тому же множеству $\tilde{A}_i$. Так как по построению множество $\tilde{A}_i$, содержащее данную вершину, не имеет общих точек с противоположной гранью, то отображение S удовлетворяет условию леммы Шпернера и потому найдётся симплекс, вершины которого, отображаясь в различные вершины симплекса T, принадлежат всем множествам $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_{n+1}$ (так как каждая вершина T принадлежит лишь одному из множеств $\tilde{A}_i$). Так как триангуляция K может быть произвольно мелкой, то из замкнутости множеств $\tilde{A}_i$ легко следует, что они имеют общую точку. Но при переходе к множествам $\tilde{A}_i$ мы могли лишь уменьшить кратность покрытия. Поэтому исходное покрытие, полученное из α произвольным изменением в окрестности $U(p)$, имело кратность $\geqslant n+1$. Доказательство теоремы тем самым завершено.

ГЛАВА III

ЕДИНСТВЕННОСТЬ МНОГОГРАННИКА С ДАННОЙ РАЗВЁРТКОЙ

§ 1. Несколько лемм о многогранных углах

1. Теоремы единственности выпуклого многогранника с данной развёрткой доказываются на основании леммы Коши (§ 1 главы II), но для того, чтобы воспользоваться этой леммой, нужно сначала доказать некоторые леммы о выпуклых многогранных углах.

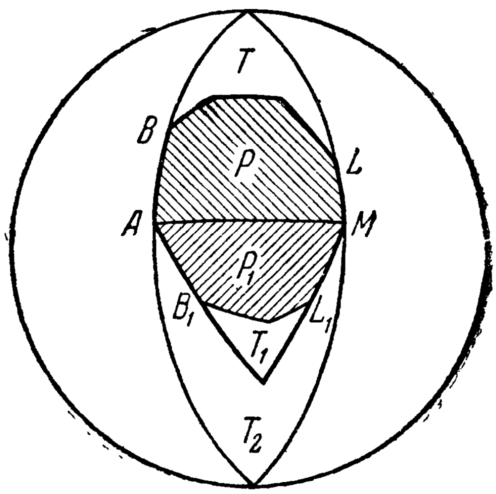
Если вокруг вершины многогранного угла V описать единичную сферу, то он вырежет на этой сфере многоугольник V', стороны и углы которого равны соответственно плоским и двугранным углам многогранного угла V. Если многогранный угол V — выпуклый, то сферический многоугольник V' — также выпуклый, т. е. расположен по одну сторону от каждого большого круга, содержащего одну из его сторон. Обратно, если на сфере дан выпуклый многоугольник, то, проектируя его из центра сферы, получим выпуклый многогранный угол.

Поэтому вместо многогранных углов мы будем рассматривать выпуклые сферические многоугольники. При этом мы будем допускать существование углов, равных π, не считая, однако, две стороны, образующие такой угол, за одну сторону. Этому соответствует наличие у многогранного угла двугранных углов, равных π. Однако сферические многоугольники, имеющие только два угла, отличных от π и тем самым сводящихся к двуугольникам, исключаются из рассмотрения всюду, кроме леммы 1. Этому соответствует исключение многогранных углов, сводящихся к двугранным углам.

Дальше в этом параграфе сферический многоугольник мы будем называть часто просто многоугольником. (Это тем более позволительно, что все полученные результаты верны и для плоских многоугольников.)

2. Лемма 1. *Если два выпуклых сферических многоугольника P и P_1 прилегают друг к другу по стороне AM и суммы их углов при вершинах A и M не превосходят π, то они образуют вместе также выпуклый многоугольник $P+P_1$.*

Пусть AB и ML — стороны многоугольника P, смежные с AM (черт. 75). Каждый из трёх больших кругов AM, AB, ML определяет на шаре некоторое полушарие, в котором лежит многоугольник P. Общая часть этих полушарий представляет собой сферический треугольник T, содержащий многоугольник P. Точно так же многоугольник P_1 содержится в треугольнике T_1, ограниченном стороною AM и продолжением сторон AB_1 и ML_1. Так как суммы углов треугольников T и T_1 при вершинах A и M не превосходят π, то треугольник T_1, в свою очередь, содержится в треугольнике T_2, ограниченном стороною AM и продолжениями сторон AB и ML. Треугольники T и T_2 образуют вместе двуугольник $T+T_2$, содержащий в себе многоугольник $P+P_1$.



Черт. 75.

Проведём теперь большой круг, содержащий какую-нибудь сторону многоугольника P, отличную от AM. Так как многоугольник P — выпуклый, то он лежит по одну сторону от этого большого круга. Этот большой круг имеет общую точку хотя бы с одной из сторон треугольника T (отличной от AM). Он идёт или вдоль одной из них, или пересекает их обе. Поэтому он не может заходить внутрь треугольника T_2. Действительно, иначе он пересекал бы каждую из сторон треугольника T_2 (отличную от AM), и мы получили бы большой круг, который имеет хотя бы с одной из сторон двуугольника $T+T_2$ две общие точки; а это невозможно, потому что большой круг может пересекать большую полуокружность (сторону двуугольника $T+T_2$) только в одной точке.

Следовательно, треугольник T_2 и тем более многоугольник P_1 расположен по одну сторону от такого большого круга, и именно по ту же сторону, по какую лежит многоугольник P. По тем же соображениям многоугольник P лежит по одну сторону от большого круга, содержащего любую сторону многоугольника P_1, отличную от AM. Следовательно, многоугольник $P+P_1$ лежит по одну сторону от всякого большого круга, содержащего одну из его сторон, а это и означает, что он — выпуклый.

Из доказанной леммы вытекает следующая теорема:

Теорема 1. *Если все углы сферического многоугольника не превосходят* π, *то многоугольник — выпуклый.*

Доказательство ведётся индукцией по числу углов. Для треугольника утверждение непосредственно очевидно. Допустим, что оно верно для многоугольников с числом углов меньшим n ($n > 3$), и докажем его для n-угольника.

Разобьём данный n-угольник P диагональю на два многоугольника P_1 и P_2 *). Если у P все углы были не больше π, то это же верно для

*) Возможность разбить многоугольник с углами, меньшими π, диагональю доказывается просто. Можно, например, воспользоваться тем рассуждением, посредством которого это было доказано в гл. I, n°3 § 8 для многоугольника в развёртке. Мы молчаливо предполагаем многоугольник P простым, ограниченным одной ломаной, что для нас достаточно. Кольцеобразный многоугольник может не разбиваться одной диагональю, но его можно разбить несколькими диагоналями и применить следующее далее рассуждение, основанное на лемме 1.

многоугольников P_1 и P_2. Вместе с тем число углов у каждого из них меньше n, а потому согласно предположению они выпуклые. Но многоугольник P составлен из них так, что суммы углов при их общих вершинах не превосходят π, так как эти суммы являются углами самого P. Поэтому согласно лемме 1 многоугольник P — выпуклый, что и требовалось доказать.

3. Теорема 2. *Пусть P и P' — два выпуклых многоугольника с одним и тем же числом вершин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $A_1', A_2', \ldots, A_n'$* (черт. 76). *Пусть, далее, выполнены два условия:*

1) *все их стороны, кроме A_nA_1 и $A_n'A_1'$, соответственно равны, т. е.*

$$A_1A_2 = A_1'A_2', \ldots, A_{n-1}A_n = A_{n-1}'A_n'; \tag{1}$$

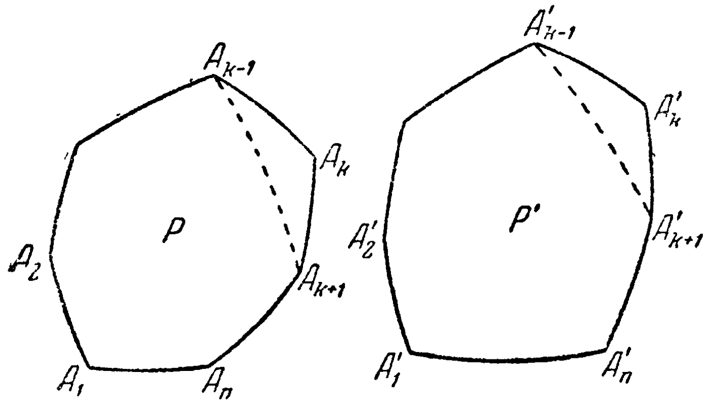
2) *углы между этими сторонами у первого многоугольника не больше чем у второго, т. е.*

$$\angle A_2 \leqslant \angle A_2', \ldots, \angle A_{n-1} \leqslant \angle A_{n-1}', \tag{2}$$

причём хотя бы в одном случае имеет место отношение «меньше».

Тогда «исключительная» сторона первого многоугольника меньше чем у второго, т. е.

$$A_nA_1 < A_n'A_1'. \tag{3}$$



Черт. 76.

В несколько иной, быть может, более наглядной формулировке эта теорема гласит:

Если выпуклый многоугольник P' получается из выпуклого многоугольника P путём деформации, при которой все стороны, кроме одной «исключительной», не меняют своих длин, а углы между этими сторонами увеличиваются (или по крайней мере ни один из них не уменьшается и хотя бы один увеличивается), то «исключительная» сторона удлиняется, так что у многоугольника P' она больше, чем у P.

Доказательство будем вести индукцией по числу вершин многоугольников.

Для треугольников теорема сводится к тому, что если у двух треугольников две стороны одного равны двум сторонам другого ($A_1A_2 = A_1'A_2'$ и $A_2A_3 = A_2'A_3'$), а углы, заключённые между ними, не равны ($\angle A_2 < \angle A_2'$), то третья сторона там меньше, где угол меньше ($A_3A_1 < A_3'A_1'$). Эта известная теорема доказывается во всех элементарных учебниках для плоских треугольников; для сферических же треугольников она доказывается дословно так же.

Таким образом, наша теорема верна для треугольников, и теперь, предположив её верной для $(n-1)$-угольников, будем доказывать её для n-угольников ($n > 3$).

Итак, пусть n-угольники P и P' удовлетворяют условиям теоремы. Имеются две возможности:

1. Все углы $A_2, \ldots, A_{n-1}$ строго меньше соответствующих углов $A'_2, \ldots, A'_{n-1}$.

2. Среди указанных углов имеются равные, например, $\angle A_k = \angle A'_k$.

Докажем сначала теорему во втором случае. Для этого проведём диагонали $A_{k-1}A_{k+1}$ и $A'_{k-1}A'_{k+1}$ и отсечём от наших многоугольников по треугольнику: $T = A_{k-1}A_kA_{k+1}$ и $T' = A'_{k-1}A'_kA'_{k+1}$. Эти треугольники равны (так как их углы A_k и A'_k равны по предположению, а заключающие их стороны равны по условию теоремы). Отсюда следует, что многоугольники Q и Q', оставшиеся после отсечения этих треугольников, будут обладать теми же свойствами, что и исходные многоугольники P и P'. Действительно, у многоугольников Q и Q' стороны $A_{k-1}A_{k+1}$ и $A'_{k-1}A'_{k+1}$ равны по равенству треугольников T и T'. Углы при вершинах A_{k-1} и A_{k+1} у многоугольника Q не больше, чем углы при соответственных вершинах многоугольника Q', потому что эти углы получаются из углов многоугольников P и P' вычитанием равных углов треугольников T и T'. Все же прочие углы и стороны у многоугольников Q и Q' — те же, что у P и P', а значит, находятся в тех же отношениях.

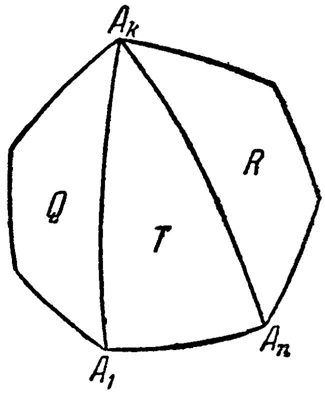
Итак, многоугольники Q и Q' удовлетворяют тем же условиям. Но у них на одну вершину меньше, так что, по предположению, теорема для них верна. Следовательно,

$$A_nA_1 < A'_nA'_1,$$

что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим тот случай, когда все углы $A_2, \ldots, A_{n-1}$ многоугольника P строго меньше соответственных углов многоугольника P'.

Возьмём какую-либо вершину A_k многоугольника P, не лежащую на продолжении стороны A_1A_n (так как мы не исключаем наличия углов, равных π, то могло бы быть, что вершина A_2 или A_{n-1} лежит на продолжении стороны A_1A_n). Построим треугольник $T = A_kA_1A_n$ (черт. 77).



Черт. 77.

Многоугольник P разобьётся, вообще говоря, на три части: треугольник T и многоугольники Q, R, смежные с ним по сторонам A_kA_1, A_kA_n. (Не исключается, что один из многоугольников Q и R вырождается в отрезок.)

Будем непрерывно изменять треугольник T так, чтобы его угол A_k увеличивался, а длины сторон A_kA_1, A_kA_n оставались неизменными. Тогда по упомянутой уже теореме о треугольниках сторона A_1A_n будет удлиняться, так что после деформации будет

$$A_1A_n < A''_1A''_n. \tag{3'}$$

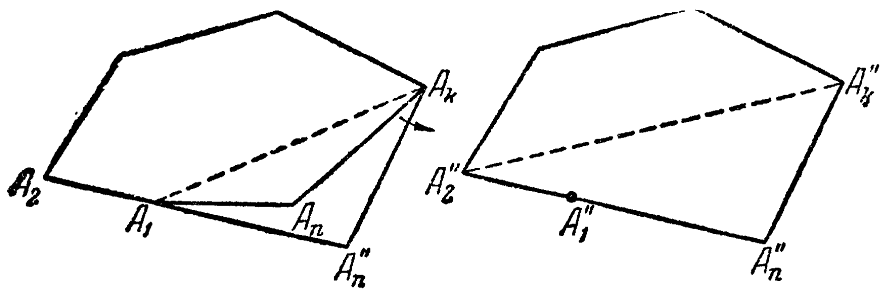
Вместе с раздвижением сторон A_kA_1, A_kA_n будем перемещать прилегающие к ним многоугольники Q и R. В результате весь многоугольник $P=Q+T+R$ будет деформироваться так, что только его угол A_k будет увеличиваться. Мы можем, очевидно, увеличить угол A_k до любой величины $\leqslant\pi$ и, в частности, сделать его равным углу A'_k многоугольника P'. Если при этом многоугольник P'', полученный деформацией из многоугольника P, будет выпуклым, то к нему приложимы все те же рассуждения. Но теперь у него один угол A''_k равен углу A'_k, т. е. мы имеем уже рассмотренный случай наличия равных углов. Поэтому на основании доказанного в этом случае можно утверждать, что

$$A''_1A''_n < A'_1A'_n. \tag{4}$$

Это вместе с (3′) даёт

$$A_1A_n < A_1A'_n,$$

что и требовалось доказать.



Черт. 78.

Всё это верно, однако, только при том условии, что многоугольник P'' остаётся выпуклым. А между тем может случиться, что при рассмотренной деформации многоугольника его выпуклость нарушится раньше, чем угол A_k достигнет желаемой величины. Выясним, как такое нарушение выпуклости может произойти *).

По теореме 1 многоугольник с углами, не превосходящими π, — выпуклый. Поэтому нарушение выпуклости может быть вызвано только тем, что некоторые углы, увеличиваясь, становятся бо́льшими π. Но при рассматриваемой деформации меняются только углы A_k, A_1, A_n. Угол A_k не будет становиться больше π, так как он увеличивается лишь до размеров угла A'_k в выпуклом многоугольнике P'. Но угол A_1 или A_n может также увеличиваться и стать в один момент равным π, а далее оказаться уже бо́льшим π **). (То, что это на самом деле возможно, видно из черт. 78, где для простоты изображены плоские многоугольники; для сферических многоугольников положение аналогично.)

Если угол A_1 в некоторый момент стал равным π, то в этот момент мы прекратим нашу деформацию многоугольника P. (Может слу-

*) Любопытно отметить, что Коши, которому принадлежит доказываемая теорема, просмотрел указанную возможность и тем самым не дал по существу доказательства теоремы. Этот пробел был восполнен значительно позже другими.

**) Если в треугольнике $A_kA_1A_n$ угол A_k увеличивается при неизменности длин сторон A_kA_1, A_kA_n, то угол A_1 (соотв. A_n) убывает или возрастает в зависимости от того, будет ли угол A_n (соотв. A_1) в треугольнике острым или тупым. Это непосредственно очевидно из черт. 78.

читься, что угол A_1 у самого исходного многоугольника P равен π. Тогда мы сразу применяем следующее далее построение.)

Мы имеем теперь многоугольник P'', у которого угол A_1'' равен π и потому $A_1''A_2''$ и $A_1''A_n''$ образуют одну сторону.

Построим треугольник $A_k''A_2''A_n''$ и будем теперь увеличивать угол A_k'' в этом треугольнике так же, как, это делалось выше для треугольника $A_k''A_1''A_n''$. Тогда сторона $A_2''A_n''$ будет удлиняться. На ней мы будем откладывать неизменную сторону A_2A_1, так что сама сторона $A_1''A_n''$ будет всё время удлиняться.

При рассматриваемой деформации угол A_k увеличивается, а углы A_2 и A_n могут или увеличиваться, или уменьшаться. Поэтому представляется несколько возможностей.

1. Угол A_k можно довести до величины угла A_k' без нарушения выпуклости многоугольника и оставляя угол A_2 меньшим, чем A_2'.

Тогда мы снова приходим к случаю, когда имеются равные углы.

2. Угол A_2, увеличиваясь, станет равным A_2' раньше, чем A_k достигнет величины A_k'.

Тогда опять получаем случай, когда имеются равные углы.

3. Произойдёт нарушение выпуклости: угол A_n обратится в π и будет становиться больше π.

Тогда в момент, когда $\angle A_n = \pi$, мы строим треугольник $A_kA_2A_{n-1}$ и для него повторяем то же рассуждение. Но теперь уже нарушение выпуклости не может произойти, так как любой из трёх рассматриваемых углов A_k, A_2, A_{n-1} достаточно довести до величины соответствующего угла в выпуклом многоугольнике P'.

Таким образом, так или иначе, мы сможем построить выпуклый многоугольник P''', у которого хотя бы один из углов A_i''' будет равен соответствующему углу A_i'. Тогда, как уже доказано, можно заключить, что

$$A_1'''A_n''' < A_1'A_n',$$

а так как при переходе от P к P''' сторона A_1A_n всё время удлинялась, то $A_1A_n < A_1'''A_n'''$ и, следовательно,

$$A_1A_n < A_1'A_n'.$$

Таким образом, доказательство нашей теоремы завершено.

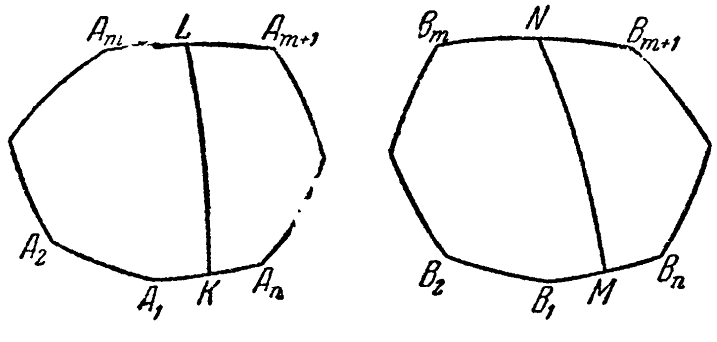
(Мы фактически доказали, что многоугольник P можно непрерывно деформировать так, что выпуклость не нарушается, углы $A_2, \ldots, A_{n-1}$ не убывают и хотя бы один из них достигает нужной величины. Повторением таких деформаций многоугольник P можно превратить в P'. При этом условия теоремы никогда не будут нарушаться, а сторона A_1A_n будет постепенно удлиняться.)

4. Лемма 2. *Если у двух выпуклых сферических многоугольников стороны соответственно равны, а среди соответственных*

углов имеются неравные, то при обходе вокруг этих многоугольников разности соответствующих углов меняют знак не менее четырёх раз, т. е. если $A_1A_2=B_1B_2, \ldots, A_nA_1=B_nB_1$, то либо все разности $\delta_i=\angle A_i-\angle B_i$ равны нулю, либо в ряду их $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \delta_1$ есть по крайней мере четыре перемены знака.

Если не все разности δ_i равны нулю, то они должны менять знак. Действительно, если, например, $\angle A_2 \leqslant \angle B_2, \ldots, \angle A_{n+1} \leqslant \angle B_{n-1}$ и хотя бы в одном случае имеется точное неравенство, то по теореме 2 должно быть $A_1A_n < B_1B_n$ вопреки условию.

Если перемены знака имеются, то их чётное число, потому что при обходе мы возвращаемся к той разности, с которой начали обход. Следовательно, достаточно показать, что не может быть только двух перемен знака.



Черт. 79.

Допустим, однако, что имеется ровно две перемены знака, и пусть, например, углы $A_1, \ldots, A_m$ больше углов $B_1, \ldots, B_m$, а углы $A_{m+1}, \ldots, A_n$ меньше углов $B_{m+1}, \ldots, B_n$ (не исключая, конечно, что среди этих углов могут быть равные).

Разделим стороны A_1A_n, A_mA_{m+1}, B_1B_n, B_mB_{m+1} пополам точками K, L, M, N и проведём KL и MN (черт. 79). Сравнивая многоугольники $A_1 \ldots A_m LK$ и $B_1 \ldots B_m NM$, мы видим, что все их стороны, кроме LK и NM, равны по условию, а углы $A_1, \ldots, A_m$ больше углов $B_1, \ldots, B_m$. Поэтому согласно теореме 2 должно быть $LK > NM$. Но если так же сравнить многоугольники $A_{m+1} \ldots A_n KL$ и $B_{m+1} \ldots B_n MN$, то по той же причине должно быть $LK < NM$. Полученное противоречие показывает, что не может быть только двух перемен знака и, следовательно, их должно быть не менее четырёх.

5. Лемму 2 легко пересказать для многогранных углов. При этом мы присоединим к многогранным углам также «вырождающиеся», т. е. сводящиеся к дважды покрытым плоским углам, меньшим π.

Лемма 2а. *Если у двух выпуклых многогранных углов, не сводящихся к двугранным углам, и может быть вырождающихся, плоские углы соответственно равны, а среди соответственных двугранных углов имеются неравные, то при обходе вокруг вершин данных многогранных углов разности соответственных двугранных углов меняют знак не менее четырёх раз.* (Как оговорено в начале параграфа, допускаются двугранные углы, равные π. Речь идёт о плоских углах между соседними рёбрами, включая рёбра этих двугранных углов.)

Действительно, если оба многогранных угла не вырождаются, то, описывая вокруг их вершин равные сферы, получим на этих сферах многоугольники, удовлетворяющие условиям леммы 2, так что в этом случае лемма 2а есть простой пересказ леммы 2.

Пусть хотя бы один из данных многогранных углов вырождается. Обозначим его V_1, другой — обозначим V_2. Пусть p_1, q_1 — те рёбра угла V_1, двугранные углы при которых равны нулю. Если при ребре p_2 угла V_2, соответствующем ребру p_1, двугранный угол также равен нулю, то он равен нулю и при ребре q_2. Тогда углы V_1 и V_2 оказываются равными.

Допустим поэтому, что угол при ребре p_2 не равен нулю. Тогда и при q_2 он не равен нулю. Следовательно, углы при рёбрах p_2, q_2 больше, чем при p_1, q_1. Вместе с тем суммы плоских углов многогранного угла V_2 между рёбрами p_2, q_2 равны с обеих сторон, так как они равны на угле V_1. Поэтому на угле V_2 с обеих сторон между рёбрами p_2, q_2 имеются рёбра, углы при которых меньше π. Но так как угол V_1 вырождается, то двугранные углы при его соответственных рёбрах равны π. Таким образом, на угле V_2 с обеих сторон между рёбрами p_2, q_2 имеются рёбра, двугранные углы при которых меньше, чем при соответствующих рёбрах угла V_1. А так как углы при самих рёбрах p_2, q_2 больше, чем при p_1, q_1, то получаем как раз четыре перемены знака. Лемма доказана.

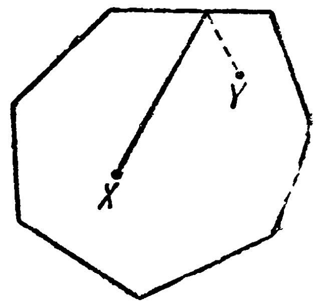
§ 2. Равенство двугранных углов при равенстве плоских углов

1. Здесь к выпуклым многогранникам мы причисляем также дважды покрытые выпуклые многоугольники, т. е. «многогранники», составленные из двух наложенных друг на друга равных многоугольников *).

Кроме того, мы будем допускать разбиение граней многогранника на конечное число многоугольников, каждый из которых будет считаться «гранью». В соответствии с этим у многогранника могут быть два сорта рёбер и вершин: «настоящие» и «ненастоящие». Каждое ребро является общей стороной двух «граней». Ненастоящие рёбра — те, двугранные углы при которых равны π, т. е. сводятся к плоскости. Ненастоящие вершины те, многогранные углы при которых сводятся к двугранным, или, в частности, к плоскости, что будет, если вершина лежит внутри истинной грани многогранника. Такое расширение понятий грани, ребра и вершины оказывается удобным и используется дальше без особых упоминаний.

Мы говорим, что два многогранника имеют одинаковое строение, если между их элементами: гранями, рёбрами, вершинами можно установить

*) Точки, лежащие внутри этих многоугольников, хотя и совпадают, но считаются как бы различными; их удобно считать лежащими с разных сторон того «дважды покрытого» многоугольника, который образуют два наложенных друг на друга многоугольника. Расстояние между точками «на разных сторонах» дважды покрытого многоугольника измеряется по линии, «переходящей» через край многоугольника (черт. 80).



Черт. 80.

Естественная развёртка такого многогранника состоит из двух равных многоугольников, склеиваемых по всем соответственным сторонам.

взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение принадлежности. Например, если ребро a (вершина A) на многограннике P принадлежит грани Q (ребру q), то соответственное ребро a_1 (вершина A_1) на многограннике P_1 принадлежит соответственной грани Q_1 (ребру q_1).

2. Теорема 1. *Если у двух замкнутых выпуклых многогранников одинакового строения соответственные углы на соответственных гранях равны, то двугранные углы при соответственных рёбрах также равны.*

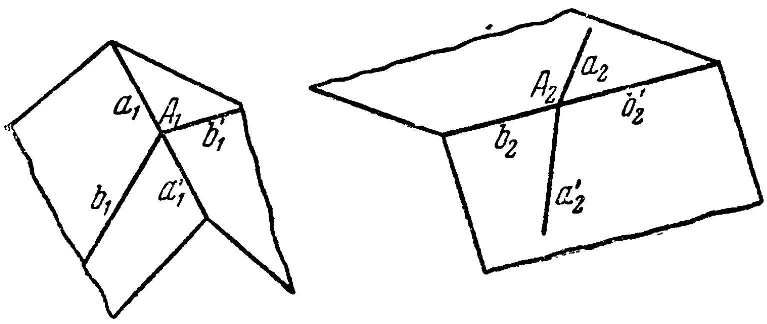
Пусть P_1 и P_2 — два многогранника, удовлетворяющих условиям теоремы. Сопоставим каждому ребру многогранника P_1 знак $+$ или $-$ в зависимости от того, больше или меньше двугранный угол при этом ребре, чем двугранный угол при соответственном ребре многогранника P_2. Рёбра с равными двугранными углами остаются неотмеченными.

Рассмотрим перемены знаков, получающиеся при обходе вокруг одной вершины.

Здесь следует различать два случая в зависимости от того, будет ли данная вершина настоящей или нет.

Пусть A_1, A_2 — соответственные вершины многогранников P_1, P_2. Настоящая вершина характеризуется, как нам известно, тем, что сумма сходящихся в ней плоских углов меньше 2π. А так как по условию соответственные плоские углы на многогранниках P_1 и P_2 равны, то вершины A_1 и A_2 одновременно либо обе настоящие, либо обе ненастоящие.

Если вершины A_1 и A_2 — настоящие, то мы можем воспользоваться леммой 2а § 1, согласно которой при условии равенства плоских углов разности двугранных углов либо все равны нулю, либо меняют знак не менее четырёх раз.

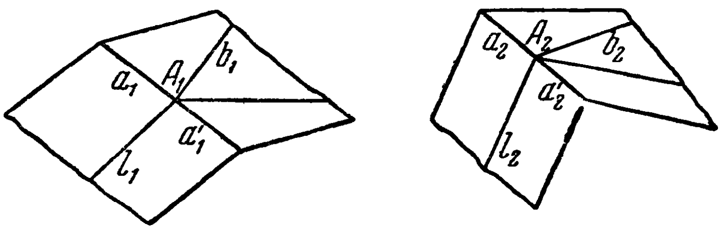


Черт. 81.

Если же вершины A_1 и A_2 — ненастоящие, то мы будем различать два случая: 1) К обеим вершинам подходят настоящие рёбра, но настоящему ребру, подходящему к A_1, соответствует ненастоящее ребро, подходящее к A_2. 2) Второй случай включает все прочие возможности: либо хотя бы при одной из вершин настоящих рёбер нет, либо они соответствуют друг другу. Мы покажем, что в первом случае число перемен знаков вокруг вершины A_1 равно четырём, а во втором случае вершины A_1 и A_2 можно вовсе исключить.

1) Пусть имеет место первый случай. Пусть a_1, a_1' — настоящие рёбра, сходящиеся в вершине A_1, и b_2, b_2' — настоящие рёбра, сходящиеся в вершине A_2 (черт. 81). Так как многогранный угол при ненастоящей вершине сводится к двугранному, то два сходящихся в ней настоящих ребра являются продолжением друг друга. Поэтому если

настоящему ребру a_1' многогранника P_1 соответствует ненастоящее ребро a_2 многогранника P_2, то ребру a_1' соответствует также ненастоящее ребро a_2'. А тогда настоящим рёбрам b_2, b_2' многогранника P_2 соответствуют ненастоящие рёбра b_1, b_1' многогранника P_1. При настоящих рёбрах двугранные углы меньше π, а при ненастоящих—равны π. Поэтому знаки разностей углов при рёбрах a_1 и a_2, b_1 и b_2, a_1' и a_2', b_1' и b_2' будут последовательно —, $+$, —, $+$, что даст как раз четыре перемены знака. (Других отмеченных рёбер нет, так как все они, как при вершине A_1, так и при A_2,— ненастоящие и тем самым углы при них равны.)



Черт. 82.

2) Во втором случае можно различать три возможности:

2а) ни при одной из вершин A_1 и A_2 нет настоящих рёбер;

2б) они имеются только при одной из этих вершин;

2в) они имеются при обеих и соответствуют друг другу (черт. 82).

2а) Когда все рёбра при вершинах A_1, A_2 ненастоящие, то все двугранные углы вокруг вершин A_1 и A_2 равны π. Поэтому все рёбра вокруг вершины A_1 будут неотмеченными, так что вершины A_1, A_2 и все сходящиеся в них рёбра можно исключить.

2б) и 2в) Пусть, например, при вершине A_1 есть настоящее ребро a_1 и, следовательно,—также настоящее ребро a_1', являющееся продолжением a_1. Пусть a_2, a_2'—соответствующие рёбра при вершине A_2. Тогда если к вершине A_2 подходят настоящие рёбра, то они и суть a_2, a_2' (случай 2в). Остальные рёбра $b_1, \ldots, l_1$, подходящие к A_1,— ненастоящие и им соответствуют ненастоящие рёбра $b_2, \ldots, l_2$. Поэтому рёбра $b_1, \ldots, l_1$ оказываются неотмеченными и их можно исключить. Рёбра a_2 и a_2' заведомо служат продолжением друг друга, потому что плоские углы между ними—такие же, как между a_1 и a_1', т. е. равные π. Двугранные углы при рёбрах a_2 и a_2' равны, и потому рёбра a_1, a_1' имеют один и тот же знак. Следовательно, мы можем вовсе исключить вершины A_1 и A_2, сопоставив друг другу рёбра a_1+a_1' и a_2+a_2'; при этом ребру a_1+a_1' будет отнесён, конечно, тот же знак, какой стоял на рёбрах a_1 и a_1'.

Итак, все ненастоящие вершины, в которых имеет место второй случай, можно исключить вовсе. Тогда из всего доказанного вытекает следующее: если на многограннике P_1 вообще имеются отмеченные рёбра, то вокруг всякой вершины, к которой они подходят, имеется не менее четырёх перемен знака. Но согласно лемме Коши (§ 1, гл. II) это невозможно. Поэтому отмеченных рёбер нет вовсе. А это означает, что соответственные двугранные углы многогранников P_1 и P_2 равны, и теорема доказана.

3. Теорема 2. *Пусть P_1 — бесконечный выпуклый многогранник, ни из какой вершины которого не исходит более одного бесконечного ребра, даже если исключить все или некоторые ненастоящие вершины (объединяя при этом в одно каждое ребро, разделённое такой несобственной вершиной)* *). *Тогда если многогранник P_2 имеет то же строение, что P_1, и соответственные углы на соответственных гранях многогранников P_1 и P_2 равны, то двугранные углы при их соотв тственных рёбрах также равны.*

Прежде чем приступить к доказательству, сделаем некоторые замечания. Если все бесконечные рёбра многогранника P_1 параллельны, то из одной вершины заведомо может исходить только одно бесконечное ребро. Поэтому для таких пар многогранников теорема 2 утверждает, что равенство углов на гранях всегда влечёт за собой равенство двугранных углов. Многогранник с параллельными бесконечными рёбрами характеризуется тем, что его полная кривизна равна 2π, потому что только при параллельности бесконечных рёбер сферическое изображение бесконечного многогранника покрывает целую полусферу. Отсюда следует, что в теореме 2 содержится следующая

Теорема 3. *Если у двух бесконечных выпуклых многогранников одинакового строения, имеющих полную кривизну 2π, соответственные углы на соответственных гранях равны, то двугранные углы при их соответственных рёбрах также равны.*

Если же бесконечный многогранник имеет полную кривизну $< 2\pi$, то у него имеются непараллельные бесконечные рёбра и из одной вершины может исходить несколько бесконечных рёбер. В последнем случае теорема 2 неприменима, и нужны дополнительные условия, которые будут рассмотрены в § 4. То, что здесь из равенства плоских углов не следует равенство двугранных углов, показывает пример многогранного угла, который можно деформировать без изменения его плоских углов.

Теперь докажем теорему 2.

Пусть P_1 и P_2 — многогранники, удовлетворяющие условиям теоремы 2. Присоединим к каждому из них по одной несобственной вершине и будем считать, что в этих вершинах сходятся их бесконечные рёбра. Тогда получим абстрактные многогранники $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ одинакового строения и гомеоморфные сфере. На многограннике $\overline{P}_1$ всякие две вершины соединяются не более чем одним ребром. Действительно, для собственных вершин это ясно. Если же ребро AB

*) Поскольку мы допускаем ненастоящие вершины, разбивающие рёбра, эта оговорка необходима. Например, возьмём многогранный угол P; он несомненно допускает деформации, не меняющие плоских углов, но меняющие двугранные углы. На каждом ребре угла P возьмём по точке и, приняв эти точки за (ненастоящие) вершины A_i, соединим их (ненастоящими) рёбрами. После этого, из каждой вершины A_i будет исходить по одному бесконечному ребру, а из настоящей вершины O угла V будут исходить лишь конечные рёбра OA_i. Только исключая ненастоящие вершины A_i, мы получим, что из вершины O исходит более одного бесконечного ребра.

соединяет собственную вершину A с несобственной вершиной B, то оно есть попросту бесконечное ребро многогранника P_1. А так как по условию из одной вершины A на многограннике P_1 может исходить только одно бесконечное ребро, то и в этом случае ребро AB — единственное, соединяющее вершины A и B.

Но если многогранник гомеоморфен сфере и каждые две его вершины соединяются не более чем одним ребром, то к сети его рёбер применима лемма Коши. Расставим на рёбрах многогранника P_1 знаки разностей двугранных углов P_1 и P_2. Тогда, рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1, убедимся, что, во-первых, вокруг каждой настоящей вершины будет не менее четырёх перемен знака, если только к вершине подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Во-вторых, для ненастоящих вершин может быть два случая: или вокруг такой вершины имеется ровно четыре перемены знака, или такую вершину можно вовсе исключить. Таким образом, вокруг каждой из оставшихся отмеченных вершин будет не менее четырёх перемен знака. Согласно условию теоремы исключение ненастоящих вершин не нарушает того, что из одной вершины многогранника P_1 исходит максимум одно бесконечное ребро. Поэтому и после такого исключения к оставшейся сети на многограннике $\bar{P}_1$ полученном из P_1 присоединением несобственной вершины, лемма Коши будет применима. На многограннике $\bar{P}_1$ вокруг каждой из оставшихся (отмеченных) вершин будет не менее четырёх перемен знака; единственное исключение может составить только несобственная вершина: число перемен знаков вокруг неё могло бы даже равняться нулю. Однако, как было отмечено в § 1 главы II, лемма Коши допускает уточнение: её результат верен также при наличии одной вершины с числом перемен знаков, меньшим четырёх. Поэтому, применяя лемму Коши с этим дополнением, замечаем, что полученная расстановка знаков невозможна, т. е. все рёбра должны быть неотмеченными и тем самым все разности собственных двугранных углов многогранников P_1 и P_2 равны нулю.

4. Совершенно аналогично теореме 2 имеет место

Теорема 4. *Пусть P_1 — конечный выпуклый многогранник, ограниченный одной замкнутой ломаной и такой, что никакая его внутренняя, т. е. не лежащая на границе, вершина не соединяется с границей более чем одним ребром. Тогда, если многогранник P_2 имеет то же строение, что P_1, и углы на соответственных гранях при соответственных внутренних вершинах многогранников P_1 и P_2 равны, то равны также двугранные углы при их соответственных рёбрах.*

Действительно, присоединим к многограннику P_1 несобственную вершину, отождествив с ней всю границу многогранника P_1; к этой вершине будут подходить все рёбра, идущие изнутри к границе многогранника. В результате получим абстрактный многогранник, гомеоморфный сфере. Тогда буквальное повторение рассуждений, применённых в доказательстве теоремы 2, приводит к доказательству теоремы 4 *).

Заметим, что *теорема* 4 *включает в себя как теорему* 1, *так и теорему* 2. Если многогранники P_1 и P_2 — замкнутые и их соответственные углы на гранях равны, то, срезая углы вокруг одной вершины, получим многогранники P_1', P_2' с границами, удовлетворяющие условиям теоремы 4. Если же многогранники P_1 и P_2 — бесконечные, то, отрезав от них бесконечные куски бесконечных граней, не задевая вершин, получим опять-таки многогранники P_1', P_2', удовлетворяющие условиям теоремы 4. Для многогранников, ограниченных несколькими замкнутыми ломаными, пришлось бы вводить несколько несобственных вершин, а тогда уточнённая лемма Коши не приводит ни к какому результату. Здесь нужны ещё дополнительные условия, но вопрос о том, какие именно, остаётся совершенно открытым.

§ 3. Единственность многогранника с данной развёрткой

1. В этом параграфе, так же как в предыдущем, к выпуклым многогранникам причисляются также дважды покрытые выпуклые многоугольники. Если точки X, Y лежат с разных сторон такого вырождающегося многогранника P, то расстояние между ними измеряется длиной самой короткой ломаной, проходящей от X до края P и далее к Y (см. черт. 80). Таким образом, если точки X и Y совпадают, но считаются лежащими с разных сторон, то расстояние между ними не равно нулю. Доказательству равенства многогранников с одинаковыми развёртками предпошлём некоторые леммы. В отличие от условия, принятого в предыдущем параграфе, в этих леммах под гранями многогранника понимаются только его истинные грани. Вырожденный многогранник состоит только из двух совпадающих граней.

Лемма 1. *Если линия L на выпуклом многограннике P является кратчайшей (т. е. самой короткой из всех линий, соединяющих данные точки), то она представляет собой ломаную, имеющую не более одного отрезка на каждой грани* **).

Действительно, пусть точки X, Y кратчайшей L лежат на грани Q. Тогда по выпуклости грани Q на ней лежит прямолинейный отрезок XY. Этот отрезок заведомо даёт кратчайшее соединение точек X и Y, и если бы участок $\overset{\frown}{XY}$ линии L не совпадал с отрезком XY, то, заменяя

---

*) В выводах о числе перемен знака играет роль только выпуклость многогранных углов, а потому достаточно требовать, чтобы у многогранников P_1, P_2 были выпуклыми все многогранные углы; сами же многогранники могут быть не выпуклыми. Такие многогранники можно назвать локально выпуклыми. Полный многогранник, являющийся локально выпуклым, — заведомо выпуклый, но если есть граница, то он может быть и не выпуклым в целом.

**) Подразумевается, что речь идёт о полном многограннике, или по крайней мере о таком, все грани которого выпуклые. Иначе утверждение леммы может оказаться неверным, как можно убедиться на простых примерах.

его этим отрезком, мы сократили бы линию L вопреки тому, что она — кратчайшая. Отсюда ясно, что вся часть линии L, лежащая на Q, сводится к одному отрезку.

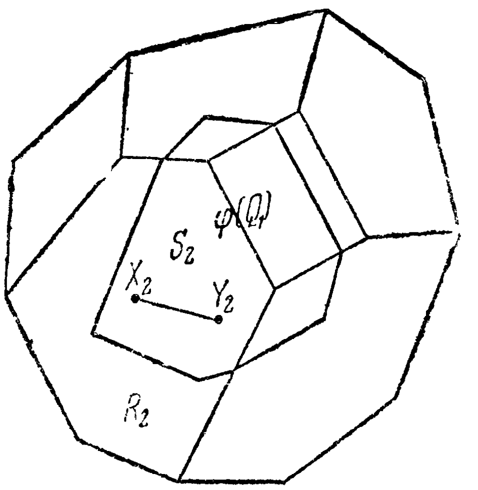
Лемма 2. *Если бесконечная в одну сторону линия L на бесконечном выпуклом многограннике P является кратчайшей на всяком своём отрезке, то, начиная с некоторой точки, она представляет собой полупрямую, лежащую на бесконечной грани многогранника P.*

Действительно, по лемме 1 сколь угодно длинный участок линии L может иметь на каждой грани максимум один отрезок. Так как число граней конечно, то, начиная с некоторой точки, линия L должна остаться в пределах одной грани Q, а так как она — кратчайшая на каждом отрезке и бесконечна, то на Q она оказывается полупрямой.

Лемма 3. *Если многогранники P_1 и P_2 склеены из одной и той же развёртки R, то существует изометрическое, т. е. сохраняющее длины, отображение одного из них на другой.*

Действительно, каждой точке X развёртки R отвечают точки X_1, X_2 многогранников P_1, P_2, так что каждой точке X_1 на P_1 отвечает точка X_2 на P_2. Это соответствие будет изометрическим, потому что всякие две соответствующие друг другу линии L_1 и L_2 на P_1 и P_2 отвечают одной и той же линии L на развёртке R и, следовательно, имеют одну и ту же длину. В силу леммы 3 вопрос о равенстве многогранников, склеенных из одной развёртки, сводится к вопросу о равенстве изометричных многогранников.

Лемма 4. *Пусть дано изометрическое отображение φ выпуклого многогранника P_1 на выпуклый многогранник P_2 и обратное отображение φ^{-1} P_2 на P_1. Образы граней многогранника P_1, налегая на грани многогранника P_2, разбивают их на «новые» грани, и обратно, образы граней многогранника P_2 разбивают P_1 также на «новые» грани. Утверждается, что в результате многогранники P_1 и P_2 оказываются одинаково составленными из равных новых граней.*



Черт. 83.

Действительно, пусть Q_1 — грань многогранника P_1 и $\varphi(Q_1)$ — её образ на многограннике P_2. Пусть $\varphi(Q_1)$ хотя бы отчасти налегает на грань R_2 многогранника P_2, так что имеется их общая часть $S_2 = R_2\varphi(Q_1)$. Покажем, что S_2 есть выпуклый многоугольник (черт. 83).

Пусть X_2, Y_2 — точки из S_2, а X_1, Y_1 — те точки на грани Q_1, которые переходят при отображении φ соответственно в X_2 и Y_2. По выпуклости грани Q_1 отрезок X_1Y_1 принадлежит ей, а потому его образ $\varphi(X_1Y_1)$ содержится в $\varphi(Q_1)$. Так как отрезок X_1Y_1 есть кратчайшая на P_1, то в силу изометричности отображения φ линия $\varphi(X_1Y_1)$ будет кратчайшей на P_2 между точками X_2, Y_2. Но эти точки лежат на одной грани R_2; следовательно, кратчайшая между ними на P_2 представляет собой прямолинейный отрезок X_2Y_2. Таким образом, отрезок X_2Y_2 содержится одновременно в $\varphi(Q_1)$ и в R_2, а тем самым, и в S_2, чем доказана выпуклость многоугольника S_2.

Фигура $S_2 = R_2\varphi(Q_1)$ вырезается из грани R_2 образами рёбер, ограничивающих грань Q_1. Так как рёбра многогранника являются на нём кратчайшими линиями, то по изометричности отображения φ их образы также будут кратчайшими. Образы бесконечных рёбер будут бесконечными, кратчайшими на всяком участке. Поэтому на основании лемм 1 и 2 часть образа каждого ребра, лежащая на грани R_2, есть отрезок или полупрямая (если ребро бесконечно). Следовательно, фигура S_2 вырезается из R_2 конечным числом отрезков и, может быть, ещё полупрямых и тем самым представляет собой многоугольник, конечный или бесконечный. Так как граней у многогранников P_1 и P_2 — конечное число, то число всех пересечений граней многогранника P_2 с образами граней многогранника P_1 конечно. По доказанному каждое такое пересечение есть выпуклый многоугольник, и тем самым многогранник P_2 оказывается подразделённым на конечное число выпуклых новых граней. Рассматривая обратное отображение φ^{-1} многогранника P_2 на P_1, точно так же получим, что многогранник P_1 разбивается на конечное число выпуклых новых граней. Покажем, что отображение φ переводит новые грани многогранника P_1 в новые грани многогранника P_2. Пусть S_1 — новая грань на многограннике P_1; она есть пересечение некоторой его грани Q_1 с образом некоторой грани R_2 многогранника P_2 при обратном отображении φ^{-1}:

$$S_1 = Q_1\varphi^{-1}(R_2).$$

Но тогда $\varphi(S_1) = \varphi(Q_1)R_2$, т. е. S_1 переходит в новую грань S_2 на многограннике P_2, являющуюся пересечением его грани R_2 с $\varphi(Q_1)$.

Итак, отображение φ переводит новые грани на P_1 в новые грани на P_2, а так как это отображение — изометрическое, то тем самым P_1 и P_2 оказываются одинаково составленными из равных граней.

Вследствие леммы 4 вопрос о равенстве изометричных многогранников сводится к вопросу о равенстве многогранников, одинаково составленных из равных «новых» граней.

2. Теорема 1. *Если имеется изометрическое отображение φ одного замкнутого выпуклого многогранника на другой, то это отображение можно осуществить движением или движением и отражением,* т. е. с помощью такого движения или движения с отражением совмещаются точки, соответствующие друг другу в силу отображения φ *).

---

*) Эта теорема является несколько более острой по форме, чем простое утверждение о равенстве многогранников P_1 и P_2, потому что, если P_1 и P_2 равны, то они совмещаются путём движения или движения и отражения, но априори ещё не ясно, что при этом будут совмещаться именно те их элементы, которые соответствуют друг другу при данном отображении φ.

(Согласно лемме 3 в этой теореме уже содержится теорема о равенстве замкнутых выпуклых многогранников с одинаковыми развёртками.)

Пусть имеется изометрическое отображение φ замкнутого выпуклого многогранника P_1 на замкнутый выпуклый многогранник P_2. Тогда согласно лемме 4 P_1 и P_2 оказываются одинаково составленными из равных новых граней, соответствующих друг другу при отображении φ. Так как эти новые грани равны, то, в частности, их углы соответственно равны, а тогда по теореме 1 § 2 оказываются равными также двугранные углы при соответственных («новых») рёбрах. Отсюда уже легко заключить (см. ниже лемму 5), что многогранники равны и их соответственные элементы (новые грани, рёбра и вершины) совмещаются путём движения или движения и отражения. Но соответственные элементы их — те, которые сопоставляются отображением φ, потому что оно как раз переводит новые грани на P_1 в новые грани на P_2. Следовательно, отображение φ можно осуществить движением или движением и отражением. Исчерпывающее обоснование последнего вывода содержится в следующей лемме:

Лемма 5. *Если имеется такое изометрическое отображение выпуклого многогранника P_1 на выпуклый многогранник P_2, что при этом отображении „новые" грани переходят в „новые" грани и двугранные углы при соответственных (новых) рёбрах равны, то φ можно осуществить движением или движением и отражением.*

Пусть Q_1 — какая-либо новая грань многогранника P_1, а Q_2 — соответствующая ей грань на P_2. Так как отображение φ — изометрическое, то Q_1 и Q_2 суть равные многоугольники, и путём движения Q_1 можно наложить на Q_2 так, чтобы каждая точка Q_1 совпала именно с той точкой на Q_2, которая соответствует ей при отображении φ *). В результате рёбра грани Q_1 совпадут с соответственными рёбрами грани Q_2. Если при этом многогранники P_1 и P_2 окажутся по разные стороны от плоскости их общей грани $Q_1 = Q_2$, то отразим P_1 в этой плоскости. Тогда, так как двугранные углы при соответственных рёбрах равны, то все грани многогранника P_1, смежные с Q_1, налягут на соответственные грани многогранника P_2 и даже совпадут с ними.

Действительно, у этих граней совпадают соответственные рёбра и вершины, общие с гранью $Q_1 = Q_2$, и они лежат по одну сторону от этих рёбер. А тогда и все прочие соответственные элементы этих граней должны совпадать в силу изометричности отображения φ. Теперь, переходя от этих граней к смежным и т. д., убедимся, что все элементы многогранника P_1 совпадают с соответственными элементами многогранника P_2, так что отображение φ оказывается осуществлённым путём движения или движения и отражения.

3. Теорема 2. *Если имеется изометрическое отображение бесконечного выпуклого многогранника P_1 с полной кривизной,*

*) Эта оговорка — не лишняя, если грань Q_1 допускает движения, совмещающие её самоё с собой.

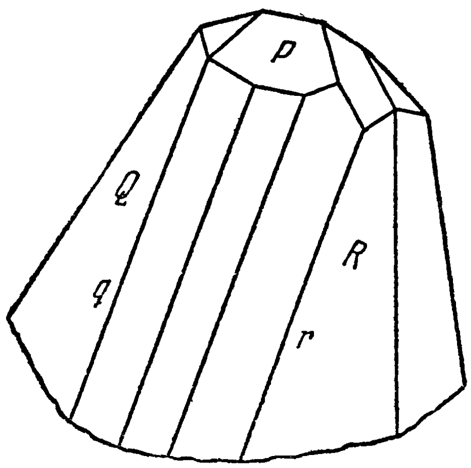
равной 2π, на выпуклый многогранник P_2, то это отображение можно осуществить движением или движением и отражением.

Так как полная кривизна при изометрическом отображении не меняется, то у многогранника P_2 она также равна 2π. Применяя лемму 4, получаем, что многогранники P_1 и P_2 одинаково составлены из равных новых граней. Следовательно, углы на этих гранях соответственно равны, а тогда по теореме 3 § 2 равны также двугранные углы при соответственных рёбрах. Поэтому, применяя лемму 5, получаем, что данное отображение P_1 на P_2 осуществляется движением или движением и отражением.

Заметим, что, как очевидно, в теоремах 1 и 2 речь может идти об отображении многогранника самого на себя, так что, например, замкнутый выпуклый многогранник, допускающий нетождественное изометрическое отображение самого на себя, необходимо оказывается симметричным.

§ 4. Бесконечные многогранники с кривизной, меньшей 2π

1. Так как кривизна полностью определяется плоскими углами, то из равенства плоских углов двух многогранников следует равенство их знаков, так что если у одного из них она $< 2\pi$, то и у другого также. Для равенства двугранных углов одного равенства плоских углов в этом случае ещё недостаточно, как это видно на примере изгибания многогранного угла. В качестве дополнительного условия можно было бы потребовать равенства двугранных углов при соответственных бесконечных рёбрах. Однако это условие оказывается слишком сильным, и можно требовать несколько меньшего. Для выяснения более слабого условия сделаем некоторые замечания. Так же как в § 2, будем считать, что истинные грани многогранника разбиты на конечное число многоугольников, которые и считаются «гранями». В соответствии с этим среди вершин и рёбер могут быть и «ненастоящие».



Черт. 84.

Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник. Разобьём его бесконечные рёбра на классы, относя в один класс каждые два параллельных ребра q и r, если они принадлежат одной грани или между ними есть последовательность параллельных рёбер, из которых любые два соседних принадлежат попарно одной грани (черт. 84). Если же такой последовательности нет, то рёбра q и r будем считать входящими в различные классы, хотя бы эти рёбра и были параллельны друг другу. Можно показать, что этот случай возможен только для ненастоящих рёбер, лежащих на параллельных гранях. Однако это замечание не имеет для дальнейшего никакого значения.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — двугранные углы при всех рёбрах $p_1, \ldots, p_n$ одного класса. Этому классу в качестве его «двугранного угла» отнесём число

$$\alpha = \pi - \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i). \tag{1}$$

Здесь $\pi - \alpha_i$ есть, очевидно, не что иное, как угол между нормалями к граням, сходящимся в ребре p_i, а $\pi - \alpha$ — угол между нормалями к граням, прилегающим извне к крайним рёбрам данного класса (грани Q, R черт. 84). Сам же угол α есть угол между самими этими гранями. Равенство $\pi - \alpha = \sum (\pi - \alpha_i)$ следует из того, что все рёбра p_i параллельны и, следовательно, все указанные нормали компланарны.

Если многогранник P бесконечно подобно сжимать к какой-либо точке, то он перейдёт в свой предельный угол V. При этом параллельные рёбра сольются и рёбра одного класса дадут на V одно ребро p. В этом ребре сойдутся грани угла V, соответствующие граням многогранника, прилегающим извне к крайним рёбрам данного класса. Двугранный угол между ними будет тот же α. Следовательно, «двугранный угол» класса рёбер есть не что иное, как соответствующий двугранный угол предельного угла V. Угол V может вырождаться в плоский угол, если многогранник P имеет параллельные грани. Тогда V следует считать дважды покрытым, и различать рёбра на одной и на другой его стороне. (Мы не вдаёмся в строгое обоснование этого замечания, потому что в дальнейшем достаточно иметь в виду формальное понятие двугранного угла класса бесконечных рёбер.)

Если бесконечные многогранники P_1 и P_2 имеют одинаковое строение и соответственно равные плоские углы, то бесконечным рёбрам многогранника P_1, входящим в один класс, отвечают на P_2 также бесконечные рёбра одного класса, и обратно. Классы рёбер, а вместе с ними рёбра предельных углов V_1 и V_2, оказываются, таким образом, во взаимно однозначном соответствии.

Дополнительное условие, обеспечивающее равенство двугранных углов при равенстве плоских углов, можно формулировать так:

*Двугранные углы при соответственных классах рёбер, т. е. при соответственных рёбрах предельных углов, должны быть равны**).

*) Углы на гранях предельного угла V определяются плоскими углами многогранника P: они равны углам между бесконечными рёбрами соответствующих граней многогранника. Поэтому из равенства плоских углов многогранников P_1 и P_2 следует равенство плоских углов на гранях их предельных углов V_1 и V_2. Тогда равенство двугранных углов у V_1 и V_2 приводит к равенству самих V_1 и V_2. Вместе с тем, поскольку плоские углы у V_1 и V_2 — одни и те же, то их двугранные углы не все независимы. Для равенства всех двугранных углов достаточно требовать равенства их всех, кроме трёх соседних. (Это легко проверить, имея в виду выпуклость углов V_1 и V_2.) Таким образом, поставленное условие можно ослабить; в частности, для трёхгранных предельных углов оно вообще оказывается лишним. Поэтому, если у многогранников P_1 и P_2 имеются только три класса рёбер, то для равенства всех двугранных углов достаточно одного равенства всех плоских углов.

Если на многогранниках нет параллельных бесконечных рёбер, то это условие сводится, конечно, к простому равенству двугранных углов при всех соответственных бесконечных рёбрах.

2. Докажем теперь, что введённое условие действительно достаточно:

Теорема 1. *Если у двух бесконечных выпуклых многогранников одинакового строения соответственные плоские углы равны и двугранные углы при соответственных классах бесконечных рёбер также равны, то и все соответственные двугранные углы этих многогранников равны.*

Пусть многогранники P_1 и P_2 удовлетворяют условиям теоремы. Присоединим к этим многогранникам несобственные вершины, считая рёбра одного класса сходящимися в одной несобственной вершине. Эти вершины будем считать соседними, если они соответствуют классам рёбер, оказывающимся соседними при обходе вокруг бесконечной части многогранника. Соседние несобственные вершины соединим несобственными рёбрами. Отметим рёбра знаками $+$ или $-$ в зависимости от знака разности двугранных углов; рёбра с равными двугранными углами, а также несобственные рёбра оставим неотмеченными. Вершины, к которым подходят отмеченные рёбра, будем называть отмеченными.

Так же как в доказательстве теоремы 1 § 2, можно различать собственные вершины двух родов: настоящие и ненастоящие. Повторяя рассуждения, приведшие к доказательству упомянутой теоремы, можно исключить все ненастоящие вершины, при которых нет четырёх перемен знаков, а также все «неотмеченные» вершины. После этого вокруг каждой из оставшихся собственных вершин будет не менее четырёх перемен знаков. Несобственные вершины, оставшиеся неотмеченными, также можно исключить.

Покажем, что при «полуобходе» вокруг отмеченной несобственной вершины от одного несобственного ребра к другому имеется не менее одной перемены знака. Действительно, пусть $\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}$ — двугранные углы при тех рёбрах, которые сходятся в такой вершине A_1 на многограннике P_1, а $\alpha_1^{(2)}, \ldots, \alpha_n^{(2)}$ — соответственные двугранные углы многогранника P_2. По формуле (1) двугранные углы при классах этих рёбер будут

$$\alpha^{(1)} = \pi - \sum (\pi - \alpha_i^{(1)}), \qquad \alpha^{(2)} = \pi - \sum (\pi - \alpha_i^{(2)}).$$

Но по условию теоремы они равны $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$. Отсюда

$$\sum \alpha_i^{(1)} = \sum \alpha_i^{(2)}, \quad \text{или} \quad \sum (\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)}) = 0.$$

Следовательно, разности $\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)}$ либо все равны нулю, либо меняют знак не менее одного раза.

Возьмём теперь второй экземпляр P_1' многогранника P_1. На его рёбрах поставим знаки, обратные знакам соответствующих рёбер многогранника P_1. Отождествив соответственные несобственные рёбра и вершины многогранников P_1 и P_1', получим абстрактный «многогранник» $P_1 + P_1'$, гомеоморфный сфере. На нём вокруг всякой отмеченной собственной вершины имеется не менее четырёх перемен знака, потому что так обстоит дело на многограннике P_1. Далее, при всякой несобственной отмеченной вершине многогранника P_1 есть хотя бы одна перемена знака, а на P_1' знаки рёбер обратные. Поэтому при обходе вокруг несобственной вершины на «многограннике» $P_1 + P_1'$ имеется также не менее четырёх перемен знака: по одной при прохождении по P_1 и P_1' и две при переходе от P_1 к P_1' и обратно.

Итак, вокруг всякой отмеченной вершины имеется не менее четырёх перемен знака. Но согласно лемме Коши это невозможно, так что отмеченных вершин не должно быть вовсе. Нужно лишь проверить, что многогранник $P_1 + P_1'$ действительно удовлетворяет условиям применимости этой леммы. Таких условий два: многогранник гомеоморфен сфере и никакие две его вершины A, B не соединены двумя рёбрами. Первое условие выполнено. Второе условие, очевидно, выполнено, если вершины A, B обе собственные или обе несобственные. Если же A собственная, а B несобственная, то ребро AB есть бесконечное ребро многогранника P_1 (или P_1'), и в вершине B могут сходиться только рёбра того же класса. Однако все они параллельны, а потому из одной вершины A в одну и ту же несобственную вершину не могут исходить два разных ребра.

Следовательно, лемма Коши применима и теорема доказана.

3. Обратимся теперь к условию равенства изометричных бесконечных многогранников с кривизной $< 2\pi$. Оно совершенно аналогично условию теоремы 1. (Заметим, что, как будет показано в § 2 главы V, всякий бесконечный многогранник с кривизной $< 2\pi$ допускает непрерывное изгибание, так что дополнительное условие для равенства таких изометричных многогранников всегда необходимо.)

Пусть P_1 — бесконечный выпуклый многогранник и φ — его изометрическое отображение на выпуклый многогранник P_2. Если отобразить P_1 на P_2 и обратно, то образы (настоящих) граней многогранника P_1 разобьют (настоящие) грани многогранника P_2, и обратно. В результате согласно лемме 4 § 3 многогранники P_1 и P_2 окажутся одинаково составленными из равных новых граней. В частности, их бесконечные (новые) грани, а следовательно, и бесконечные (новые) *) рёбра окажутся поставленными в попарное соответствие. Из равенства соответственных граней ясно, что граням с параллельными рёбрами будут отвечать грани с параллельными же рёбрами. Тем самым каждому классу параллельных друг другу рёбер на P_1 будет отвечать

*) Конечно, среди новых граней могут быть и старые, если они не разбиваются на части. Однако среди бесконечных рёбер всегда имеются, если не сами старые, то их бесконечные части.

класс параллельных друг другу рёбер на P_2. Напомним, что двугранным углом при классе таких рёбер мы называем угол между гранями, прилегающими извне к крайним рёбрам класса (как грани Q и P черт. 84).

Дополнительное условие, о котором идёт речь, состоит в следующем: *двугранные углы при соответствующих классах бесконечных* (*новых*) *рёбер многогранников* P_1 *и* P_2 *должны быть равны.*

В частности, если на многогранниках P_1 и P_2 вовсе нет параллельных рёбер, то условие сводится к тому, что изометрическое отображение должно переводить бесконечные рёбра многогранника P_1 в бесконечные рёбра многогранника P_2 и двугранные углы при соответственных бесконечных рёбрах должны быть равны.

Дальше мы дадим указанному условию другую, более наглядную форму, а сейчас докажем его достаточность:

Теорема 2. *Если имеется такое изометрическое отображение одного бесконечного выпуклого многогранника на другой, что двугранные углы при соответственных классах бесконечных* (*новых*) *рёбер оказываются равными, то это отображение можно осуществить движением или движением и отражением.*

По лемме 4 § 3 изометрическое отображение одного многогранника на другой приводит к тому, что многогранники оказываются одинаково составленными из равных новых граней. В частности, углы на новых гранях соответственно равны, а тогда ввиду равенства двугранных углов при соответственных классах новых рёбер можно воспользоваться теоремой 1, в силу которой все двугранные углы при соответственных рёбрах оказываются равными. Поэтому на основании леммы 5 § 3 заключаем, что данное изометрическое отображение можно осуществить движением или движением и отражением.

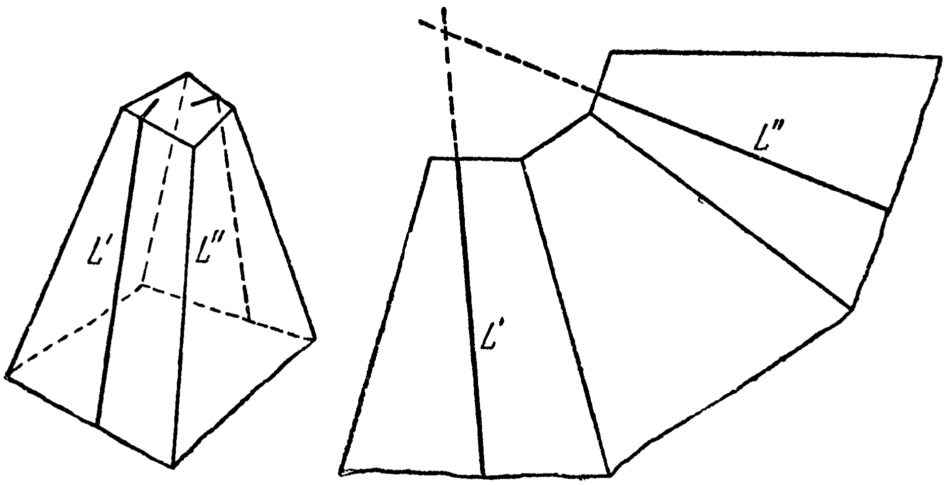
4. Теперь придадим условию теоремы 2 другую форму, для чего рассмотрим предельные углы $V(P_1)$ и $V(P_2)$ изометричных многогранников P_1 и P_2. Каждому классу рёбер многогранника P_i отвечает параллельное ребро p угла $V(P_i)$, в которое переходят все рёбра данного класса при бесконечном подобном сжатии многогранника в предельный угол. Грани, прилегающие извне к крайним рёбрам данного класса, переходят при этом в грани предельного угла, сходящиеся в ребре p, так что двугранные углы между теми и другими гранями соответственно равны. Поэтому условие теоремы 2 означает, что *двугранные углы при соответственных рёбрах предельных углов* $V(P_1)$ *и* $V(P_2)$ *должны быть равны.*

Нужно, конечно, иметь в виду, что новому ребру многогранника P_i, проходящему по его бесконечной грани, отвечает не настоящее ребро угла $V(P_i)$, а его образующая, проходящая по его соответствующей грани. Однако при условии равенства двугранных углов каждому настоящему ребру угла $V(P_1)$ отвечает настоящее ребро угла $V(P_2)$, и обратно. При ненастоящих же рёбрах двугранные углы всегда равны π. Поэтому *достаточно рассматривать только настоящие рёбра предельных углов* $V(P_1)$ и $V(P_2)$.

В настоящем ребре угла $V(P_i)$ сходятся его грани, соответствующие граням многогранника P_i, у которых бесконечные рёбра не параллельны. Поэтому *условие о равенстве двугранных углов при таких рёбрах сводится просто к тому, что грани многогранников P_i с непараллельными бесконечными рёбрами должны соответствовать друг другу и образовывать равные двугранные углы.* Соответствие граней устанавливается данным изометрическим отображением φ: бесконечная грань Q_2 с непараллельными рёбрами на P_2 отвечает грани Q_1 на P_1, если образ грани Q_1 покрывает, хотя бы и не целиком, грань Q_2. Неполное покрытие грани Q_2 образом грани Q_1 может происходить от того, что часть Q_2 может априори соответствовать грани Q_1', прилегающей к Q_1 и имеющей параллельные бесконечные рёбра. Впрочем, поскольку в силу теоремы 2 многогранники оказываются просто равными, на самом деле такое частичное покрытие не может иметь места.

5. Придадим условию теоремы 2 ещё новую форму, в которой оно будет фигурировать дальше, в главе IV. Для этого сначала введём некоторые определения.

Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник. Будем называть лучом на P бесконечную в одну сторону линию, лежащую на много-



Черт. 85.

граннике P и являющуюся кратчайшей на всяком своём конечном отрезке. Эти линии уже рассматривались в § 3 и там в лемме 2 было доказано, что каждая такая линия, начиная с некоторой точки, сводится к полупрямой, лежащей на одной из бесконечных граней многогранника P. Пусть L' и L'' — два луча на многограннике P. Зададим на P направление обхода. Будем разворачивать бесконечные грани многогранника на плоскость, последовательно прикладывая их друг к другу, в порядке обхода многогранника, начиная от грани, на которой лежит луч L' (или по крайней мере его бесконечная часть). Тогда лучи L' и L'' дадут на плоскости две полупрямые (черт. 85). Угол между этими полупрямыми, отсчитываемый от L' к L'' в указанном направлении обхода, мы назовём углом между лучами L' и L'' (точнее это будет угол от L' до L'' в данном направлении обхода; при другом же направлении обхода угол будет другим).

Очевидно, понятия луча и угла между лучами принадлежат внутренней геометрии многогранника. Поэтому при изометрическом отображении одного многогранника на другой лучи переходят в лучи и углы между лучами сохраняются.

Докажем теперь следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник, $V(P)$ — его предельный угол.*

1) *При бесконечном подобном сжатии многогранника P в угол $V(P)$ каждый луч L на многограннике P переходит в образующую угла* $V(P)$ (т. е. в полупрямую, лежащую на угле $V(P)$ и исходящую из его вершины). Эту образующую мы называем *предельной образующей* луча L.

2) *Как всякому лучу отвечает предельная образующая, так и, обратно, всякая образующая является предельной для какого-либо луча* (*и для всех параллельных друг другу лучей*).

3) *Угол между лучами равен углу между их предельными образующими.*

Доказательство. Луч L, начиная с некоторой точки, представляет полупрямую, лежащую на одной бесконечной грани многогранника P. При бесконечном подобном сжатии к вершине угла $V(P)$ любая конечная часть многогранника сходится к вершине угла $V(P)$, а всякая полупрямая сходится к параллельной ей полупрямой, исходящей из вершины. Поэтому и луч L сходится к такой полупрямой, чем доказано первое утверждение леммы.

Каждой грани угла $V(P)$ отвечает параллельная ей бесконечная грань многогранника P, и всякой полупрямой, лежащей на одной грани, можно сопоставить параллельную полупрямую на другой. Поэтому каждой образующей v угла $V(P)$ можно сопоставить параллельную полупрямую L на многограннике P. Очевидно, что v будет предельной образующей для L. Этим доказано второе утверждение леммы — об обратном соответствии образующих и лучей.

Пусть, наконец, L' и L'' — два луча на многограннике P. Если развернуть бесконечные грани многогранника P на плоскость и сжимать их к одной точке, то каждая грань перейдёт в угол, соответствующий грани предельного угла. Вместе с тем лучи L' и L'' перейдут в их предельные образующие, но угол между ними, очевидно, не изменится. Таким образом, углы между лучами равны углам между их предельными образующими, причём эти углы измеряются на самом угле V (или, что то же самое, — в его развёртке) при том условии, что обход, указанный на многограннике, переносится на предельный угол V. Лемма 1 доказана.

Отсюда легко выводится следующее предложение:

Лемма 2. *Всякому изометрическому отображению одного бесконечного многогранника P_1 на другой, P_2, отвечает вполне опре-*

делённое изометрическое отображение предельного угла $V(P_1)$ на предельный угол $V(P_2)$.

Действительно, при изометрическом отображении лучи переходят в лучи и углы между лучами сохраняются. Вместе с тем по лемме 1 лучам на многогранниках P_1 и P_2 отвечают их предельные образующие на углах $V(P_1)$ и $V(P_2)$. При этом углы между образующими равны углам между соответствующими лучами. Таким образом, если мы сопоставим друг другу те образующие углов $V(P_1)$ и $V(P_2)$, которые отвечают соответственным по изометрии лучам на самих многогранниках, то такое соответствие образующих будет сохранять углы между ними. Отсюда очевидно, что указанное соответствие образующих даёт изометрическое отображение одного предельного угла на другой. Лемма 2 доказана.

Опираясь на последний результат, теорему 2 можно формулировать существенно по-новому:

Теорема 3. *Для того чтобы изометрическое отображение одного бесконечного выпуклого многогранника P_1 на другой P_2 можно было осуществить движением или движением и отражением, необходимо и достаточно, чтобы вызванное отображением φ изометрическое отображение предельного угла $V(P_1)$ на $V(P_2)$ осуществлялось движением или движением и отражением.*

Необходимость условия очевидна, потому что предельный угол $V(P_1)$ можно твёрдо связать с многогранником P_1, и тогда при движении, совмещающем P_1 с P_2, угол $V(P_1)$ станет предельным углом для P_2.

Для доказательства достаточности заметим, что каждому бесконечному ребру многогранника P_i отвечает параллельное ребро его предельного угла $V(P_i)$. Из определения изометрического соответствия углов $V(P_1)$ и $V(P_2)$ ясно, что их соответственные рёбра или вообще образующие отвечают соответственным (может быть, новым) рёбрам многогранников P_1 и P_2. Так как углы $V(P_1)$ и $V(P_2)$ совмещаются движением, то их двугранные углы при соответственных рёбрах равны. Как уже отмечалось, эти двугранные углы равны двугранным углам при классах рёбер многогранников P_1 и P_2. Поэтому условие теоремы 2 оказывается выполненным, и отображение φ можно осуществить движением или движением и отражением *). Наглядно говоря, можно поместить вершины углов $V(P_1)$ и $V(P_2)$ в соответственных вершинах многогранников и перенести P_1 так, чтобы $V(P_1)$ совпал с $V(P_2)$; тогда и сам многогранник P_1 совпадёт с многогранником P_2.

Стоит заметить, что теореме 3 нельзя придать следующую простую форму: два изометричных многогранника P_1 и P_2 равны, если равны

*) Если совмещение углов $V(P_1)$ и $V(P_2)$ происходит без отражения, то так же происходит и совмещение многогранников P_1 и P_2, потому что отражение многогранника вызывает отражение его предельного угла. Единственное исключение могут представлять многогранники, предельные углы которых вырождаются в плоские. Отражение такого угла в его плоскости не только совмещает его с самим собой, но и вовсе не переставляет его рёбер.

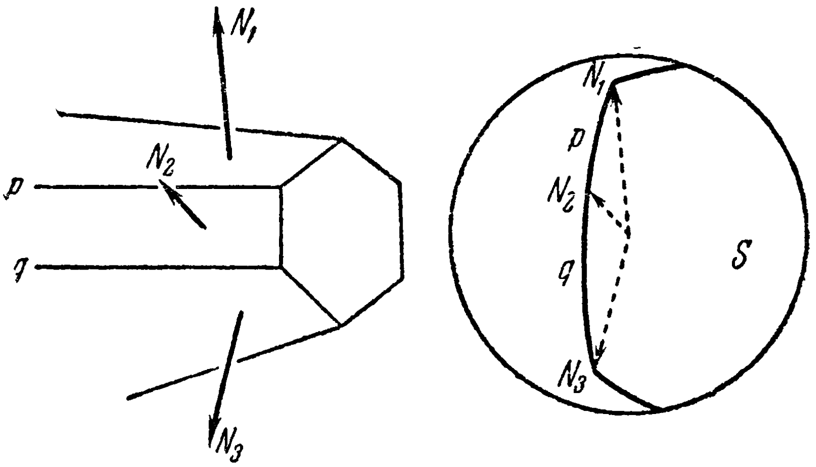
их предельные углы. Такое утверждение будет попросту неверным.

Действительно, в § 2 главы V будет доказано, что любой бесконечный выпуклый многогранник можно непрерывно изгибать так, что его предельный угол будет только поворачиваться, но вовсе не будет деформироваться. При таком изгибании получаем многогранники, изометричные исходному и имеющие те же предельные углы, но не равные ему. Единственное исключение представляют многогранники, сводящиеся к многогранным углам, потому что они совпадают со своими предельными углами.

Из этого замечания ясно, что наши постоянные оговорки о том, что речь идёт об элементах многогранников и предельных углов, соответствующих друг другу именно в силу данного изометрического отображения, ни в какой мере не являются лишними.

6. В заключение укажем коротко ещё один вид условия теоремы 2, основанный на рассмотрении сферических изображений изометричных многогранников.

Сферическое изображение бесконечного выпуклого многогранника есть выпуклый сферический многоугольник. Граница этого многоугольника S образована сферическими изображениями бесконечных рёбер. Сферические изображения параллельных рёбер представляют собой дуги одного и того же большого круга и потому образуют одну сторону многоугольника S (черт. 86). Вершины многоугольника S являются сферическими изображениями граней с непараллельными рёбрами. Всё это становится совершенно ясным, если вспомнить, что сферическое изображение многогранника совпадает со сферическим изображением его предельного угла. Длина стороны многоугольника S измеряет угол между нормалями к смежным граням предельного угла, т. е. угол между нормалями к соответствующим граням многогранника. Но угол между нормалями равен дополнению двугранного угла до π. Поэтому стороны многоугольника S определяют также двугранные углы между гранями.



Черт. 86.

Изометрическое отображение φ многогранника P_1 на P_2 естественно порождает соответствие ψ сферических изображений этих многогранников: сферическому изображению точки X_1 многогранника P_1 ставится в соответствие сферическое изображение точки $\varphi(X_1)$ многогранника P_2. Так как сферическое изображение точки может не быть одной точкой, то это соответствие может быть неоднозначным в обе стороны. Однако оно сохраняет площади, поскольку площадь сферического изображения при изометрическом преобразовании многогранника не меняется.

Так как длины сторон многоугольников S_1 и S_2, представляющих сферические изображения многогранников P_1 и P_2, определяются двугранными углами между гранями с непараллельными бесконечными рёбрами, то условие теоремы 2 сводится к тому, что *многоугольники* S_1 *и* S_2 *должны иметь со-*

ответственно равные стороны. При этом соответствие сторон определено изометрическим отображением P_1 на P_2 так, как это только что указано.

Сферическое изображение S многогранного угла V полностью определяет этот угол (рёбра угла V перпендикулярны к граням угла S', проектирующего S из центра сферы, и обратно: рёбра угла S' перпендикулярны к граням угла V). Поэтому равенство предельных углов эквивалентно равенству сферических изображений многогранников, и теореме 3 можно придать следующий вид:

Теорема 4. *Пусть дано изометрическое отображение φ одного бесконечного выпуклого многогранника P_1 на другой P_2. Оно определяет преобразование ψ границы сферического изображения S_1 многогранника P_1 в границу сферического изображения S_2 многогранника P_2. Отображение φ осуществляется движением тогда и только тогда, когда отображение ψ осуществляется движением.*

§ 5. Многогранники, имеющие границу

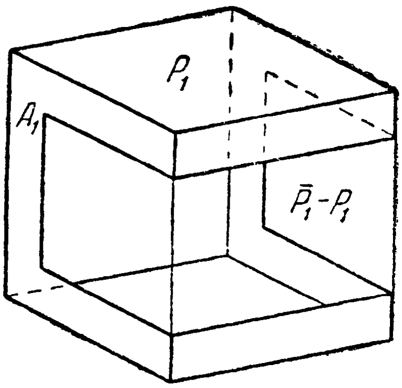
1. Прежде всего отметим некоторые интересные следствия, которые можно извлечь из теорем §§ 3 и 4, для выпуклых многогранников, имеющих границу. Каждый такой многогранник по самому определению есть часть замкнутого или бесконечного выпуклого многогранника. Поэтому, в частности, его полная кривизна не может быть больше 4π, а если он бесконечный, то она не может превосходить и 2π. Однако полную кривизну 4π может иметь и не только замкнутый выпуклый многогранник. Действительно, полная кривизна есть сумма кривизн вершин, а потому, вырезая из замкнутого выпуклого многогранника любую его часть, не содержащую вершин ни внутри, ни на границе, получим выпуклый многогранник с той же полной кривизной 4π. Нужно только, чтобы оставшаяся часть многогранника была связной, иначе она не считается многогранником по самому его определению. Оказывается, что как бы велика ни была вырезанная часть многогранника, не содержащая вершин, оставшаяся часть многогранника всё-таки будет неизгибаемой с сохранением выпуклости! А именно, имеет место

Теорема 1. *Если полная кривизна выпуклого многогранника P_1 равна 4π, то всякое его изометрическое отображение φ на выпуклый же многогранник P_2 осуществляется движением или движением и отражением.*

Доказательство. Построив выпуклую оболочку многогранника P_1 и взяв её поверхность, получим замкнутый выпуклый многогранник $\overline{P}_1$. К многограннику P_1 добавляется фигура $\overline{P}_1 - P_1$, могущая состоять из отдельных кусков. Так как полная кривизна многогранника P_1 равна 4π, то добавленная к нему часть $\overline{P}_1 - P_1$ уже не может содержать вершин и, следовательно, каждый её связный кусок можно развернуть на плоскость. Для доказательства (см. n° 3 § 8 гл. I) достаточно последовательно разворачивать на плоскость части граней, попавшие в каждую связную часть фигуры $\overline{P}_1 - P_1$ (черт. 87).

Так как многогранник P_2 изометричен P_1, то он имеет такую же полную кривизну 4π, а потому к нему применимы те же рассуждения. Мы дополняем его до замкнутого многогранника $\overline{P}_2$, причём каждая связная часть фигуры $\overline{P}_2 - P_2$ может быть развёрнута на плоскость.

Изометрическое отображение φ многогранника P_1 на P_2 устанавливает определённое изометрическое соответствие их границ. А это определяет изометрическое соответствие границ фигур $\overline{P}_1 - P_1$ и $\overline{P}_2 - P_2$, т. е. соответственные их отрезки имеют равные длины.



Черт. 87.

Покажем, что и углы на границах этих фигур соответственно равны, если, конечно, измерять углы не в пространстве, а на многогранниках, или, что то же самое, в развёрнутых фигурах $\overline{P}_1 - P_1$, $\overline{P}_2 - P_2$.

Рассмотрим какую-либо пару соответственных точек A_1, A_2 на границах многогранников P_1 и P_2. На многогранниках $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ ни одна из этих точек не может быть вершиной, потому что иначе при переходе от P_1 к $\overline{P}_1$ (или от P_2 к $\overline{P}_2$) к кривизне P_1 добавлялась бы кривизна вершины A_1, и полная кривизна многогранника $\overline{P}_1$ оказывалась бы больше 4π. Но если точка на многограннике не есть вершина, то полный угол вокруг неё равен 2π. Полные углы вокруг точек A_1 и A_2 на многогранниках $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ слагаются из углов на многогранниках P_1 и P_2 и углов на дополнениях $\overline{P}_1 - P_1$ и $\overline{P}_2 - P_2$. Углы на многогранниках P_1 и P_2 равны по изометрии. Следовательно, равны также углы на $\overline{P}_1 - P_1$ и $\overline{P}_2 - P_2$.

Итак, фигуры $\overline{P}_1 - P_1$ и $\overline{P}_2 - P_2$ состоят из кусков, разворачиваемых на плоскость и имеющих соответственно равные стороны и равные углы. Поэтому они изометричны, а так как P_1 и P_2 тоже изометричны, то и замкнутые многогранники $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ изометричны. По теореме 1 § 3 их изометрия осуществляется движением или движением и отражением, причём совпадают их элементы, соответствие которых установлено изометрией между P_1 и P_2 и вместе с ней между $\overline{P}_1 - P_1$ и $\overline{P}_2 - P_2$. Следовательно, и изометрия между P_1 и P_2 оказывается осуществлённой движением или движением и отражением.

Совершенно так же, используя теорему 2 § 3, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если полная кривизна бесконечного многогранника, имеющего границу, равна 2π, то всякое его изометрическое отображение на выпуклый же многогранник можно осуществить движением или движением и отражением.*

Наконец, из теоремы о равенстве изометричных замкнутых выпуклых многогранников вытекает ещё такой результат:

Теорема 3. *Назовём многогранной шапкой выпуклый многогранник, имеющий плоский край и такой, что его ортогональная проекция на плоскость края однозначна* (т. е. всякая прямая, перпендикулярная к этой плоскости, пересекает многогранник лишь в одной точке или только касается его). Оказывается, что *изометричные многогранные шапки равны; изометрическое отображение одной из них на другую осуществляется движением или движением и отражением.*

Для доказательства приложим к краям данных шапок шапки, им симметричные. Тогда получатся замкнутые выпуклые многогранники, и если шапки были изометричны, то и эти многогранники будут изометричными. Применяя теперь теорему 1 § 3 о замкнутых многогранниках, получаем теорему 3.

2. Теперь установим некоторое общее условие равенства изометричных многогранников, имеющих границу, не зависящее от их полной кривизны.

Теорема 4. *Если у двух выпуклых многогранников, ограниченных каждый одной замкнутой ломаной и имеющих одинаковое строение, соответственные углы на соответственных гранях равны и, кроме того, равны также углы между граничными рёбрами при всех соответственных граничных вершинах, то соответственные двугранные углы этих многогранников также оказываются равными.*

Здесь так же, как в теоремах § 2, допускается существование ненастоящих вершин и рёбер, так что и «грани» могут быть лишь кусками истинных граней.

Из этой теоремы совершенно так же, как и раньше, используя лемму 4 § 3, можно вывести:

Теорема 5. *Если имеется изометрическое отображение выпуклого многогранника, ограниченного одной замкнутой ломаной, на другой выпуклый многогранник и если это отображение сохраняет углы между граничными рёбрами при всех граничных вершинах, то такое отображение можно осуществить движением или движением и отражением.*

Достаточно доказать теорему 4.

Пусть P_1 и P_2 — два многогранника, удовлетворяющие условиям этой теоремы. Расставляем на рёбрах многогранника P_1 знаки согласно неоднократно применявшемуся условию. Граничные рёбра остаются, конечно, неотмеченными.

Так же как в доказательстве теоремы 1 § 2, исключаем ненастоящие вершины, где нет перемен знаков, а также все вообще неотмеченные вершины. При каждой из оставшихся внутренних вершин будет не менее четырёх перемен знака.

Пусть A_1 и A_2 — соответственные граничные вершины многогранников P_1 и P_2. Натянем на сходящиеся в них граничные рёбра a_1,

b_1 и a_2, b_2 плоские углы. В силу выпуклости многогранников мы получим при вершинах A_1 и A_2 выпуклые многогранные углы. Соответственные плоские углы их равны в силу условий теоремы. Сравнивая их двугранные углы, расставим вокруг вершины A_1 плюсы и минусы согласно нашему правилу. Тогда по лемме 2а § 1 вокруг этой вершины A_1 должно быть не менее четырёх перемен знака, если только вершина A_1 — отмеченная. Однако, расставляя знаки на многограннике P_1, мы вовсе не отмечали граничных рёбер a_1, b_1. Исключение знаков этих рёбер уменьшает число перемен знака не более чем на два. Поэтому при «полуобходе» вершины A_1 на многограннике P_1 от ребра a_1 к ребру b_1 должна иметься хотя бы одна перемена знака.

Возьмём теперь второй экземпляр P'_1 многогранника P_1. Расставим на его рёбрах знаки, обратные знакам соответствующих рёбер многогранника P_1. Отождествив соответственные граничные рёбра и вершины многогранников P_1 и P'_1, получим абстрактный «многогранник» $P_1 + P'_1$, гомеоморфный сфере. Вокруг каждой из отмеченных вершин этого многогранника будет не менее четырёх перемен знака.

Итак, на рёбрах многогранника $P_1 + P'_1$ расставлены знаки $+$ и $-$ так, что вокруг всех отмеченных вершин число перемен знаков не меньше четырёх. Но согласно лемме Коши это невозможно. Следовательно, на многограннике P_1 вовсе не должно быть отмеченных рёбер, и теорема 4 доказана *).

В теоремах 4 и 5 предполагается, что многогранники ограничены каждый одной замкнутой ломаной, т. е. гомеоморфны кругу. Если это не так, то наше рассуждение неприменимо. В связи с этим можно поставить задачу: обобщить теоремы 4 и 5 на выпуклые многогранники другой топологической структуры.

3. Как было отмечено ещё в n° 6 § 1 главы I, рассмотрение бесконечных выпуклых многогранников эквивалентно рассмотрению конечных многогранников с границей, обладающих тем свойством,

*) Эта теорема может быть несколько обобщена в двух отношениях. Во-первых, вместо многогранников, выпуклых в целом, можно иметь в виду многогранники только локально выпуклые, т. е. такие, что их многогранные углы выпуклы как при внутренних, так и при граничных вершинах (если углы при граничных вершинах ещё дополнить плоскими углами между граничными рёбрами). Во-вторых, достаточно требовать, чтобы условие о равенстве углов между граничными рёбрами выполнялось для всех граничных вершин, *кроме, может быть, трёх*. Такое усиление результата легко получается применением леммы Коши в её уточнённой формулировке. Оно имеет определённый смысл. Именно, пользуясь теоремой Эйлера, легко подсчитать, что если E, E', K суть числа всех вершин, граничных вершин и всех рёбер, то $3E-3=K+E'$. Но многогранник с точностью до движения определяется $3E-6$ переменными ($3E$ координат вершин минус 6 параметров, определяющих положение в пространстве). Развёртка же задаётся K рёбрами. А так как $3E-6=K+E'-3$, то для задания многогранника нужно ещё не E', а $E'-3$ параметра, т. е. нужно задавать углы не при всех E' граничных вершинах, а лишь при $E'-3$ из них.

что их крайние грани допускают безграничные продолжения без появления у них новых пересечений. Необходимые и достаточные условия этого были указаны там же. В связи с этим теоремы о бесконечных многогранниках, доказанные в §§ 2—4, автоматически переносятся на соответствующие многогранники с границей.

Кроме того, и для бесконечных выпуклых многогранников, но уже не полных, а ограниченных каждый одной бесконечной ломаной с конечным числом сторон, имеют место теоремы, аналогичные полученным здесь теоремам 3—5. Однако если бесконечные рёбра не параллельны, то необходимо ещё ввести условие о двугранных углах между бесконечными гранями, совершенно так же, как в теоремах 1 и 2 § 4. Формулировки и доказательства теорем для бесконечных многогранников с границей мы оставляем читателю.

§ 6. Обобщения

1. Обобщение теорем, доказанных в этой главе, возможно в ряде направлений:

1) Исследование изометрических отображений выпуклых многогранников не обязательно на многогранники, но на любые выпуклые поверхности.

2) Исследование изометрических отображений одних выпуклых поверхностей на другие.

3) Перенесение полученных теорем в неэвклидовы пространства: Лобачевского и сферическое.

4) Обобщения на пространства, более чем трёхмерные.

Во всех этих случаях мы сохраняем требование выпуклости. Сняв его, мы получили бы уже вовсе необозримое поле задач. Хотелось бы, однако, упомянуть одну из них, которая представляется нам самой интересной из всех задач об изгибании:

Существуют ли замкнутые многогранники, допускающие непрерывные изгибания без переламывания граней или никакой замкнутый многогранник не допускает таких непрерывных изгибаний? (Все известные примеры изгибаемых многогранников не реальны: эти многогранники имеют самопересечения и, следовательно, будучи изготовлены, не будут всё же изгибаться.)

Дальше, в n° n° 2—5, мы последовательно рассмотрим обобщения теорем этой главы в четырёх указанных здесь направлениях.

2. Вопрос об изометрических отображениях замкнутых и бесконечных выпуклых многогранников на любые выпуклые поверхности был впервые полностью решён С. П. Оловянишниковым*). Из его работ можно вывести следующие результаты:

1. *Если дано изометрическое отображение конечного выпуклого многогранника P с полной кривизной 4π на выпуклую поверхность F, то это отображение сводится к движению или движению и отражению, так что F сама неизбежно есть многогранник, равный P.*

2. *Если дано изометрическое отображение бесконечного выпуклого многогранника P с полной кривизной 2π на выпуклую поверхность F, то это отображение сводится к движению или движению и отражению, так что F неизбежно оказывается многогранником, равным P.*

3. *Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник с кривизной $< 2\pi$, $V(p)$ — его предельный угол, F — бесконечная выпуклая поверхность, а $V(F)$ —*

---

*) С. П. Оловянишников, Обобщение теоремы Коши о выпуклых многогранниках, Матем. сборник, т. 18 (60):3 (1946), и «Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей», там же.

её предельный конус (т. е. результат бесконечного сжатия F к одной точке). Изометрическое отображение φ P на F индуцирует изометрическое отображение ψ $V(P)$ на $V(F)$. Отображение φ сводится к движению или движению и отражению тогда и только тогда, когда к нему сводится отображение ψ.

4. Теорема 3 § 5 о многогранных шапках также обобщается:

Выпуклая поверхность, имеющая плоский край и изометричная многогранной шапке, сама есть равная ей многогранная шапка.

Доказательства этих теорем состоят из двух частей: во-первых, доказывается, что поверхность F, изометричная многограннику P, сама есть многогранник, если выполнены поставленные условия, после этого остаётся сослаться на уже доказанные теоремы об отображении многогранника на многогранник. Первая часть доказательства основана на том, что при изометрическом отображении грани многогранника переходят в некоторые развёртывающиеся поверхности так, что опорные плоскости к ним неизбежно проходят через точки, соответствующие вершинам многогранника *). После этого уже сравнительно легко доказать, что при соответствующих условиях поверхность F оказывается многогранником.

3. Вопрос о неизгибаемости замкнутых выпуклых поверхностей имеет большую историю. Ещё в 1838 г. Миндинг высказал предположение о неизгибаемости сферы. В 1854 г. Джелет опубликовал ошибочное доказательство этой гипотезы, и только в 1899 г. она была доказана независимо Либманом и Минковским в той форме, что достаточно регулярная (у Минковского — дважды непрерывно дифференцируемая) поверхность, изометричная сфере, сама есть равная ей сфера. Другое доказательство дал Гильберт в 1901 г. Затем вопросом о неизгибаемости замкнутых выпуклых поверхностей занимались Либман, Вейль, Бляшке, но лишь для бесконечно малых изгибаний. Наконец, в 1927 г. С. Э. Кон-Фоссен доказал, что вообще всякие две изометричные аналитические замкнутые выпуклые поверхности со всюду положительной кривизной равны. Позже ему удалось ослабить требование аналитичности до трёхкратной непрерывной дифференцируемости. Метод Кон-Фоссена представляет аналог метода Коши. В 1946 г. Герглотц дал новое очень простое доказательство той же теоремы, сняв, между прочим, условие, что кривизна всюду существенно положительна **).

Все эти результаты имеют один общий недостаток. Требуется, чтобы как данная поверхность, так и ей изометричная были достаточно регулярными с точки зрения их пространственной формы, а не только в смысле внутренней метрики. Поэтому ни один из них не позволяет утверждать даже того, что всякая выпуклая поверхность, изометричная сфере, сама будет сферой независимо от предвзятых требований её регулярности.

Общие результаты, свободные от этого недостатка и притом относящиеся не только к замкнутым выпуклым поверхностям, были получены А. В. Погореловым в 1948 г. Будем говорить, что поверхность имеет ограниченную удельную кривизну, если отношение избытка суммы углов

---

*) Иначе площадь сферического изображения поверхности, в которую переходят грани с исключёнными вершинами, была бы, как легко видеть, положительной. Между тем при всяком изометрическом отображении одной выпуклой поверхности на другую площадь сферического изображения сохраняется. Этот общий результат получен в моей книге «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», гл. V. Оловянишников обходится без него, прямо доказывая указанное утверждение об опорных плоскостях. Вывод этот довольно труден.

**) См. С. Э. К о н - Ф о с с е н, Изгибание поверхностей в целом, Успехи матем. наук, вып. 1 (1936), и Н. В. Е ф и м о в, Качественные вопросы теории деформаций поверхностей, Успехи матем. наук, т. III, вып. 2 (24) (1948). Эти статьи дают полный отчёт по данному вопросу.

геодезического треугольника над π, т. е. $\alpha+\beta+\gamma-\pi$, к площади этого треугольника ограничено сверху одним и тем же числом для всех треугольников. Важно иметь в виду, что это условие имеет уже чисто внутренний характер и притом является очень общим. Результаты Погорелова сводятся к тому, что *для выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны имеют место те же теоремы* 1—4, *какие в предыдущем пункте были формулированы для многогранников*; для их формулировки нужно лишь на место «выпуклого многогранника» подставить «выпуклую поверхность ограниченной кривизны» *). Доказательства Погорелова основаны на сочетании ряда тонких соображений, существенно отличных от методов Кон-Фоссена и других. Но если заранее ограничиться регулярными поверхностями, эти доказательства значительно упрощаются.

Вопрос об изометрических отображениях общих выпуклых поверхностей, не многогранников и не имеющих ограниченной кривизны, до сих пор остаётся открытым. Однако имеются основания предполагать, что все теоремы 1—4 о многогранниках верны и для любых выпуклых поверхностей.

4. Обращаясь к неэвклидову пространству, можно заметить, что леммы § 1 вовсе не используют аксиомы о параллельных, потому что они говорят о сферических многоугольниках. Лемма Коши по своему топологическому характеру вовсе не связана с тем или иным видом геометрии в данном пространстве. Поэтому теоремы 1 § 2 и 1 § 3 о замкнутых выпуклых многогранниках переносятся в неэвклидово пространство (Лобачевского и сферическое) совершенно дословно вместе с их доказательствами, кроме одного дополнения, необходимого в случае сферического пространства. Дело в том, что лемма Коши существенно использует отсутствие у многогранника двуугольных граней. В пространстве Лобачевского, так же как в эвклидовом, двуугольников не бывает, и потому это замечание не существенно. В сферическом же пространстве двуугольники существуют: это — обыкновенные двуугольники, ограничиваемые на сфере двумя большими полукругами. В связи с этим многогранники в сферическом пространстве могут иметь двуугольные грани. Однако, как можно доказать, выпуклый многогранник в сферическом пространстве не имеет двуугольных граней, кроме того случая, когда он сплошь состоит из двуугольников. Тогда он имеет только две вершины, в которых и сходятся все его двуугольные грани, прилегая друг к другу по сторонам. (Предельным случаем такого двухвершинника будет сфера — «плоскость» сферического пространства.) Легко непосредственно убедиться в том, что такие двухвершинники (кроме крайнего случая «плоскости») изгибаемы, так что для них теоремы 1 § 2 и 1 § 3 не выполняются.

Теоремы § 5 о конечных незамкнутых многогранниках также дословно переносятся в неэвклидовы пространства (Лобачевского и сферическое), если исключить многогранники, дополняемые до двухвершинников.

В случае теорем о бесконечных многогранниках дело обстоит иначе, потому что в них существенную роль играет понятие параллельности. Однако и их можно перенести в пространство Лобачевского, если понимать параллельность в смысле Лобачевского, именно два бесконечных ребра мы считаем параллельными, если они лежат в одной плоскости и асимптотически сближаются. Приняв это определение, можно перенести в пространство Лобачевского теоремы 2 § 2 и 2 § 3 о многогранниках с параллельными бесконечными рёбрами и теоремы 1 и 2 § 4 о многогранниках с непараллельными бесконечными рёбрами. Все рассуждения, приводящие к их доказательству, останутся в силе. Точно так же теорема 3 § 2 переносится в пространство Лобачевского без изменений.

---

*) См. А. В. Погорелов, Однозначная определённость выпуклых поверхностей, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 29 (1949).

В этих теоремах речь идёт о многогранниках, гомеоморфных плоскости. Однако оказывается, что бесконечный выпуклый многогранник в пространстве Лобачевского, имеющий вершины (и тем самым не сводящийся к бесконечной призме), может и не быть гомеоморфным плоскости. Можно показать, что он может быть гомеоморфен любой конечно-связной области на плоскости, т. е. области с любым конечным числом «дыр» *). Поэтому круг всех возможных теорем о бесконечных выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского крайне расширяется в сравнении с тем, что имеется в пространстве Эвклида. Детальное исследование бесконечных выпуклых многогранников в пространстве Лобачевского сулит, повидимому, немало интересного.

В качестве задачи о многогранниках, гомеоморфных плоскости, можно предложить вопрос об их предельном угле. Так как подобное сжатие в пространстве Лобачевского невозможно, то предельный угол $V(P, O)$ многогранника P при вершине O нужно определить как границу телесного угла, заполненного лучами, исходящими из O и содержащимися в теле, ограниченном многогранником P. Зависит ли этот угол от точки O? В каком отношении к бесконечным граням и рёбрам многогранника находятся его грани и рёбра?

5. Обобщение теорем, доказанных в этой главе, на многогранники более чем трёхмерные не имеет смысла, потому что уже *в четырёхмерном пространстве даже один выпуклый многогранный угол V не допускает изгибаний.* Для доказательства опишем вокруг вершины такого угла трёхмерную сферу. На ней этот угол вырезает выпуклый многогранник P. Это будет замкнутый многогранник в трёхмерном сферическом пространстве. Но как было отмечено выше, теорема о неизгибаемости замкнутого выпуклого многогранника верна также в сферическом пространстве. Поэтому и угол V оказывается неизгибаемым. Тем более, то же верно в пространстве большего числа измерений. Отсюда следует, что в более чем трёхмерном пространстве никакой выпуклый многогранник не допускает нетривиальных изометрических отображений.

Вопрос о равенстве двугранных углов при условии равенства углов на двумерных гранях оказывается тривиальным по совершенно аналогичным соображениям.

---

*) Воспользуемся известной моделью пространства Лобачевского как внутренности эвклидового шара $Ш$, где прямыми считаются хорды шара $Ш$, а плоскостями — большие круги в этом шаре. Тогда, поскольку прямые Лобачевского и Эвклида здесь совпадают, тело, содержащееся в шаре $Ш$ и выпуклое в эвклидовом смысле, будет выпуклым в смысле геометрии Лобачевского, и обратно. Граница шара $Ш$ состоит из бесконечно удалённых точек пространства Лобачевского. Возьмём выпуклый многогранник, лежащий в шаре $Ш$ так, что его вершины $A_1, \ldots, A_n$ лежат на поверхности шара, а вершины $B_1, \ldots, B_n$ — внутри. Этот многогранник будет бесконечным выпуклым многогранником в смысле геометрии Лобачевского: его бесконечные рёбра сходятся в бесконечно удалённых точках A_i. Он, очевидно, гомеоморфен сфере с исключёнными n точками $A_1, \ldots, A_n$, и тем самым гомеоморфен плоской области с $n-1$ «дырой».

ГЛАВА IV

СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОГОГРАННИКА С ДАННОЙ РАЗВЁРТКОЙ

Первые три параграфа этой главы посвящены доказательству существования замкнутого выпуклого многогранника с данной развёрткой; это доказательство проводится методом, основанным на лемме об отображении (§ 2 гл. II). В § 1 определяется и исследуется многообразие $\boldsymbol{M}$ развёрток данного строения. В § 2 рассматривается многообразие $\boldsymbol{P}$ многогранников, которые могут быть склеены из развёрток данного строения. Доказательство завершается в § 3, где лемма об отображении применяется к отображению многообразия $\boldsymbol{P}$ в $\boldsymbol{M}$.

Последние два параграфа (§§ 4 и 5) посвящены бесконечным многогранникам. Обобщения результатов всей главы в духе последнего параграфа главы III излагаются в § 3 главы V.

§ 1. Многообразие развёрток

1. Мы будем рассматривать развёртки, гомеоморфные сфере и имеющие вокруг каждой вершины сумму углов $\leqslant 2\pi$. Нашей окончательной целью является доказать, что из всякой такой развёртки можно склеить замкнутый выпуклый многогранник. Эта цель будет достигнута в § 3. Здесь же мы получим вспомогательные результаты, касающиеся развёрток.

Так как всякий конечный многоугольник можно разбить на треугольники, то можно ограничиться развёртками, составленными из одних треугольников. Накакие развёртки, кроме гомеоморфных сфере и составленных из треугольников, в §§ 1—3 рассматриваться не будут, и потому они будут называться просто развёртками.

Развёртка с суммой углов при вершинах $\leqslant 2\pi$ будет называться *развёрткой положительной кривизны*. Если же в каждой вершине развёртки сумма углов строго меньше 2π, то мы будем говорить, что развёртка не имеет лишних вершин или что развёртка имеет *строго* положительную кривизну.

Как было указано ещё в § 6 главы I, развёртка имеет свою метрику. В ней можно проводить кратчайшие линии между любыми двумя точками (гл. I, § 8, теорема 1). Такая кратчайшая состоит из отрезков, лежащих на многоугольниках развёртки, причём переход от одного отрезка к следующему происходит через отождествлённые точки границ многоугольников. Мы воспользуемся некоторыми простыми теоремами относительно кратчайших линий и кривизны в развёртках. Доказательства этих теорем даны в § 8 главы I.

Удобно представлять себе развёртку отображённой на какую-нибудь сферу S, так что метрика её и, в частности, кратчайшие оказываются перенесёнными на сферу S.

Если две развёртки могут быть отображены друг на друга так, что расстояния между соответственными парами их точек равны, то мы говорим, что развёртки изометричны*). Если из развёртки можно склеить замкнутый выпуклый многогранник, то мы будем ради краткости говорить, что развёртка *реализуема*. Очевидно, что если данная развёртка реализуема, то всякая изометричная ей развёртка реализуема тем же самым многогранником. Поэтому вместо одной развёртки всегда можно рассматривать развёртку, ей изометричную.

2. Лемма 1. *Развёртка не может иметь менее трёх вершин, суммы углов при которых* $<2\pi$. *Если развёртка имеет только три такие вершины, а во всех остальных её вершинах (если они вообще имеются) суммы углов* $=2\pi$, *то она реализуема дважды покрытым треугольником.*

Действительно, полная кривизна развёртки, гомеоморфной сфере, равна 4π (см. гл. I, § 8, теорему 3), а кривизна одной вершины $<2\pi$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

Пусть теперь развёртка R имеет только три вершины A, B, C с суммами углов $<2\pi$, во всех же остальных её вершинах суммы углов равны 2π. Отобразив развёртку на сферу S, соединим вершины A, B, C кратчайшими. Сфера разобьётся на два треугольника, не содержащие внутри себя точек, суммы углов вокруг которых $\neq 2\pi$. Поэтому эти треугольники можно развернуть на плоскость (гл. I, § 8, теорема 4). Налагая их затем друг на друга так, чтобы соответственные их стороны совпали, получим дважды покрытый треугольник, реализующий развёртку R.

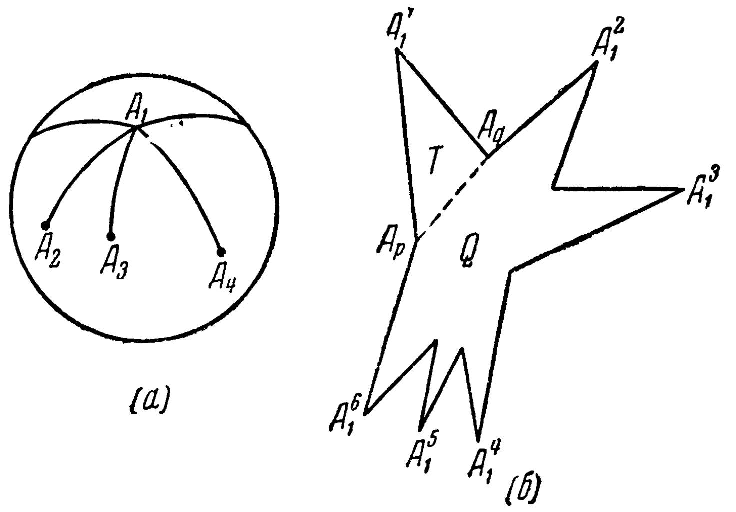
Лемма 2. *Всякая развёртка положительной кривизны изометрична развёртке, удовлетворяющей следующим условиям:* 1) *она составлена из одних треугольников,* 2) *не имеет «лишних» вершин, т. е. вершин, суммы углов при которых равны* 2π, 3) *ни у какого её треугольника никакие две вершины не склеиваются друг с другом, т. е. не соответствуют одной вершине развёртки.*

Доказательство. Пусть R — данная развёртка и $A_1, \ldots, A_e$ — её не лишние вершины. По лемме 1 $e \geqslant 3$. Отобразим развёртку R на сферу S. Соединив вершину A_1 кратчайшими с прочими вершинами $A_2, \ldots, A_e$, разрежем сферу S — или, что то же самое, развёртку

*) Легко убедиться в том, что если две развёртки изометричны, то от одной из них к другой можно перейти конечным числом операций разрезывания и склеивания.

R — по этим кратчайшим (см. черт. 88, *а*, который имеет условный «топологический» характер).

Так как кратчайшие, исходящие из одной точки, не могут пересекаться, то в результате такого разрезывания получим (геодезический) многоугольник Q, гомеоморфный кругу. Он не содержит вершин внутри, а потому согласно теореме 5 § 8 главы I его можно разбить диагоналями на треугольники, каждый из которых развёртывается на плоскость.



Черт. 88.

Однако мы хотим доказать, что многоугольник Q можно разбить диагоналями на треугольники так, что в полученной развёртке ни у какого треугольника две вершины не будут склеиваться друг с другом, т. е. не будут соответствовать одной вершине развёртки.

У многоугольника Q имеются вершины двух типов: $e-1$ вершин отвечают вершинам A_2, A_3, ..., A_e развёртки и другие $e-1$ вершин отвечают одной вершине A_1 (черт. 88, *б*). Эти вершины «второго рода» $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_1^{e-1}$ расположены на периметре многоугольника Q через одну. Так как одной и той же вершине развёртки отвечают только вершины второго рода, то нам нужно доказать следующее:

многоугольник Q можно разбить диагоналями на треугольники так, что в каждом из них максимум одна вершина будет вершиной «второго рода».

Для доказательства заметим, что сумма углов при вершинах «второго рода» есть не что иное, как полный угол вокруг вершины A_1, и следовательно, по условию она меньше 2π. Поэтому самое большее при одной из вершин второго рода угол может быть больше или равен π.

Пусть при вершине A_1^1 угол меньше π. Пусть с ней смежны вершины A_p, A_q. Проведём отрезок A_pA_q и рассмотрим треугольник $T=A_1^1A_pA_q$ (черт. 88, *б*). Так как угол многоугольника Q при вершине A_1^1 меньше π, то он будет также углом треугольника T, так что общая часть TQ треугольника T и многоугольника Q представляет некоторый многоугольник; в частности, он может совпадать с треугольником T. В последнем случае, отсекая его от Q, получим многоугольник $Q-T$, у которого на одну вершину второго рода меньше. В противном случае проведём в многоугольнике TQ кратчайшую из ломаных, соединяющих вершины A_p и A_q (черт. 89); эта ломаная $\widehat{A_pA_q}$, очевидно, короче ломаной, образованной сторонами $A_pA_1^1$ и $A_qA_1^1$:

$$\widehat{A_pA_q} < A_pA_1^1 + A_1^1 A_q. \qquad (1)$$

Если бы на линии $\widehat{A_pA_q}$ лежала какая-либо вершина «второго рода» A_1^j, то мы имели бы

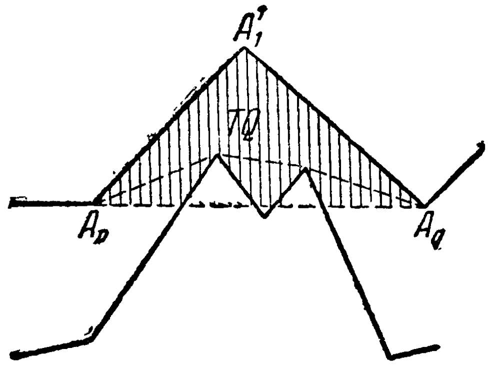
$$A_pA_1^j + A_1^jA_q < A_pA_1^1 + A_1^1A_q,$$

и следовательно, хотя бы один из отрезков $\widehat{A_pA_1^j}$, $\widehat{A_1^jA_q}$ этой линии был бы короче соответствующего отрезка $A_pA_1^1$ или $A_1^1 A_q$; например,

$$\widehat{A_pA_1^j} < A_pA_1^1. \qquad (2)$$

Однако по первоначальному построению сторона $A_pA_1^1$ является кратчайшей в данной развёртке между вершинами A_p и A_1. Линия же $\widehat{A_pA_1^j}$ тоже соединяет вершину A_p с A_1. Она не может быть короче кратчайшей, а потому неравенство (2), а вместе с ним (1), невозможно. Следовательно, и допущение, что на линии $\widehat{A_pA_q}$ лежит какая-либо вершина второго рода, неверно.

Этим доказано, что многоугольник, отсекаемый от Q линией $\widehat{A_pA_q}$, содержит только одну вершину второго рода A_1^1. После его отсечения остаётся часть многоугольника Q, состоящая из нескольких многоугольников с меньшим числом вершин второго рода. К каждому из этих многоугольников применимы все предыдущие рассуждения: мы можем отсечь от них многоугольники с одной вершиной второго рода каждый и т. д., пока не разобьём всё на многоугольники, каждый из которых будет содержать только одну или ни одной вершины второго рода. После этого остаётся разбить каждый из этих многоугольников на треугольники, и мы придём к нужному результату.



Черт. 89.

Доказанные леммы 1 и 2 показывают, что *достаточно ограничиться рассмотрением развёрток, состоящих из треугольников и удовлетворяющих следующим условиям:* 1) *число вершин* $e > 3$, 2) *нет лишних вершин,* 3) *ни у какого треугольника вершины не склеиваются друг с другом.* В дальнейшем эти условия подразумеваются выполненными без особых оговорок.

3. Если в понятии развёртки отвлечься от метрических соотношений и рассматривать её чисто комбинаторно, т. е. иметь в виду только данные в ней отождествления сторон и вершин треугольников, то развёртка превращается в то, что мы будем называть *комплексом*. Следовательно, «комплекс» есть совокупность конечного числа абстрактных треугольников с указанным отождествлением их сторон и вершин, удовлетворяющим условиям, содержащимся в самом определении развёртки.

Это есть некоторое обобщение понятия комплекса, принятого в комбинаторной топологии. Именно, мы не требуем того, чтобы у двух треугольников отождествлялось только по одной стороне или по одной вершине. Но согласно условию, поставленному в конце предыдущего пункта, склеивание треугольника самого с собой не допускается.

Так как наша развёртка гомеоморфна сфере, то если треугольники мыслить как произвольные топологические образы обычных треугольников, комплекс оказывается гомеоморфным сфере. Поэтому можно коротко сказать, что комплекс есть совокупность топологических треугольников с такими отождествлениями их сторон и вершин, в силу которых эта совокупность оказывается гомеоморфной сфере.

Если треугольники данного комплекса K заданы как плоские треугольники и отождествления сторон происходят с сохранением длин, то мы и получаем развёртку. Мы будем говорить в этом случае, что комплекс K превращается в развёртку строения K.

Пусть K — данный комплекс, а f, k, e — числа его треугольников, рёбер и вершин. Так как плоские треугольники однозначно определяются длинами их сторон, то для того, чтобы превратить комплекс K в определённую развёртку, достаточно приписать его рёбрам определённые длины. Следовательно, развёртка строения K определяется заданием k параметров — длин рёбер $r_1, \ldots, r_k$.

Если воспользоваться k-мерным пространством, то множество всех развёрток строения K изобразится в нём в виде некоторой области M^0. Единственные условия, которым должны удовлетворять длины рёбер, это — «неравенства треугольника»: сумма длин каждых двух сторон треугольника должна быть больше длины третьей его стороны*):

$$r_i + r_j > r_l.$$

Эти неравенства — линейные, и потому каждое из них определяет некоторое полупространство. Пересечение этих полупространств и образует область M^0. (Кстати видно, что она является внутренностью выпуклого многогранного угла с вершиной в начале.) Эта область заведомо не пуста: достаточно приписать всем рёбрам одну и ту же длину, чтобы все неравенства треугольника удовлетворялись. Следовательно, для любого комплекса K существует развёртка строения K из равносторонних треугольников.

---

*) Положительность длин уже следует из этих неравенств: $r_i + r_j > r_l$, $r_i + r_l > r_j$, и следовательно, $2r_i + r_j + r_l > r_j + r_l$, откуда $r_i > 0$.

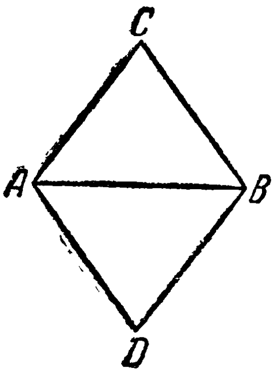
Совокупность развёрток строго положительной кривизны изображается множеством M, являющимся частью области M^0.

Сумма $\sum_j \varphi_{ij}$ углов, сходящихся в вершине (i — номер вершины, j — номер угла при этой вершине), есть непрерывная функция длин рёбер. M определяется неравенствами

$$\sum_j \varphi_{ij} < 2\pi \quad (i = 1, 2, \ldots, e)$$

и, следовательно, представляет собой открытое множество. *Это и есть многообразие развёрток строго положительной кривизны, которое мы будем дальше рассматривать.*

Могло бы оказаться, что M пусто; но тогда нам не о чем говорить, так как мы хотим доказать, что если имеются развёртки положительной кривизны строения K, то из каждой из них можно склеить выпуклый многогранник. Поэтому *мы будем предполагать, что M не пусто* *).



Черт. 90.

4. Лемма 3. *Если число вершин комплекса K больше трёх, то многообразие M составляет только часть области M^0 и, следовательно, имеет в M^0 границу.*

Докажем сначала, что в комплексе с числом вершин, большем трёх, есть хотя бы одна вершина, в которой сходится не менее трёх треугольников. Для этого достаточно показать, что если в каждой вершине комплекса сходится не более двух треугольников, то комплекс имеет всего три вершины.

Пусть ABC — треугольник такого комплекса. Пусть к его стороне AB подклеивается треугольник ABD (черт. 90). Тогда в вершинах A и B уже сошлись два треугольника, и если никакие другие к ним прилегать не могут, то, очевидно, стороны AC и BC склеиваются с AD и BD. (Могло бы быть, что BC склеивается с AC, а BD — с AD. Но тогда у треугольника ABC отождествлялись бы вершины A и B, что исключено по условию, принятому в n° 2.) Остаются только три вершины, и ничего больше к комплексу прибавить нельзя, так как свободных сторон не осталось. Таким образом, наше утверждение доказано.

---

*) То, что M пусто, означает, что комплекс K нельзя превратить в развёртку с суммами углов при всех вершинах $< 2\pi$. Легко построить примеры таких комплексов, допуская у нескольких треугольников склеивание вершин в одну точку. Однако такие «самосклеивания» у нас исключены по условию, принятому в конце n° 2. Для комплекса же без самосклеиваний представляется вероятным, что он всегда может быть превращён в развёртку строго положительной кривизны, так что на самом деле при нашем условии множество M не может быть пустым. Однако мы не знаем, как это доказать в общем виде. Для случая, когда в комплексе K каждые два треугольника склеиваются максимум по одной стороне или вершине, это доказано.

Пусть теперь комплекс K имеет более трёх вершин. Тогда, как мы сейчас показали, в нём найдётся вершина A, в которой сходится не менее трёх треугольников.

Припишем сначала всем рёбрам комплекса K равные длины, т. е. возьмём развёртку из правильных треугольников. Затем будем уменьшать в одно и то же число раз длины всех рёбер, сходящихся в A, оставляя длины остальных рёбер неизменными. Тогда углы, подходящие к A, будут возрастать и могут быть сделаны сколь угодно близкими к π. А так как их не менее трёх, то сумма их будет становиться $\geqslant 2\pi$. Таким образом, мы получим развёртки, не входящие в многообразие $\boldsymbol{M}$, и лемма доказана.

Граница многообразия $\boldsymbol{M}$ *состоит из точек, соответствующих развёрткам, у которых сумма углов при каждой вершине меньше или равна* 2π *и хотя бы при одной вершине равна* 2π.

Действительно, как было указано, многообразие $\boldsymbol{M}$ определяется e неравенствами

$$\sum_j \varphi_{ij} < 2\pi \quad (i = 1, 2, \ldots, e), \tag{3}$$

где φ_{ij} обозначает j-й угол при i-й вершине. Угол φ_{ij} есть непрерывная функция длин рёбер. Поэтому на границе многообразия $\boldsymbol{M}$ ни одно из этих неравенств не может обращаться и хотя бы одно из них должно переходить в равенство.

Отсюда следует также, что *граница многообразия* $\boldsymbol{M}$ *состоит из кусков* e *поверхностей* $F_1, F_2, \ldots, F_e$, *представляемых уравнениями*

$$\sum_j \varphi_{ij} = 2\pi \quad (i = 1, 2, \ldots, e), \tag{4}$$

где углы φ_{ij} нужно рассматривать как функции длин рёбер, т. е. координат в нашем k-мерном пространстве *).

Теперь мы докажем последнюю лемму, которая будет играть решающую роль в § 3 при доказательстве нашей теоремы о реализуемости развёрток положительной кривизны.

Лемма 4. *На границе каждой связной компоненты многообразия* $\boldsymbol{M}$ *есть такая точка, в некоторой окрестности которой нет точек других связных компонент многообразия* $\boldsymbol{M}$ **).

---

*) Множества F_i, определяемые уравнениями (4), мы называем поверхностями условно. На самом деле некоторые из них могут быть пустыми. Именно, если в i-й вершине сходятся лишь два треугольника и, следовательно, только два угла, их сумма, конечно, всегда меньше 2π. (Во всех других случаях уравнение (4) определяет действительно $(k-1)$-мерную поверхность в нашем k-мерном пространстве, но это нам не нужно и не будет поэтому доказываться.)

**) На самом деле почти все точки границы заведомо должны обладать этим свойством. Это легко усмотреть из аналитичности функции $\Sigma\varphi_{ij}$. Но мы обходимся элементарными средствами и получаем достаточный для нас результат. Заметим ещё, что мы не знаем, не будет ли многообразие $\boldsymbol{M}$ всегда связным. Если бы удалось просто доказать его связность, то всё доказательство упростилось бы.

Доказательство. Пусть M' — какая-либо связная компонента многообразия M. Пусть X_0 — точка на её границе, принадлежащая наименьшему числу поверхностей $F_1, \ldots, F_l$ — скажем, поверхностям $F_1, \ldots, F_l$. Покажем, что эта точка удовлетворяет требованиям леммы *).

Точка X_0 представляет развёртку R_0, у которой суммы углов при вершинах $A_1, \ldots, A_e$ равны 2π, а при всех остальных вершинах A_i — меньше 2π. Очевидно, можно указать такое столь малое $\varepsilon > 0$, что при любом изменении длин рёбер развёртки R_0, меньшем ε, ни при одной из вершин $A_i (i > l)$ сумма углов не становится равной 2π. Мы ограничимся только такими изменениями длин рёбер. Это означает, что мы ограничиваемся столь малой окрестностью W точки X_0, что в этой окрестности нет точек других поверхностей F_i, кроме $F_1, \ldots, F_l$.

Рассмотрим треугольники развёртки R_0, подходящие к её вершине A_1. Пусть r — ребро одного из них, противолежащее вершине A_1. Так как угол треугольника есть возрастающая функция противолежащей стороны, то сумма углов при вершине A_1, т. е. $\sum\varphi_{1j}$, также будет возрастающей функцией длины ребра r. (Ребро r может быть противолежащим вершине A_1 ещё в другом треугольнике, но тогда вывод о сумме углов тем более верен. Прилежащим к A_1 ребро r не может быть, так как тогда у первого взятого треугольника две вершины попадали бы в A_1 вопреки условию, наложенному на рассматриваемые развёртки.)

Укорачивая ребро r, получим развёртку R_1 с суммой углов при вершине A_1, меньшей 2π, а удлиняя ребро r, получим развёртку R_2 с суммой углов при A_1, большей 2π.

Развёрткам R_1 и R_2 отвечают точки X_1 и X_2. Можно взять окрестности U_1 и U_2 этих точек так, что $\sum\varphi_{1j} < 2\pi$ во всякой точке из U_1 и $\sum\varphi_{1j} > 2\pi$ во всякой точке из U_2. Окрестности U_1 и U_2 можно, конечно, взять равными и параллельными так, чтобы при параллельном перемещении, переводящем точку X_1 в X_2, окрестность U_1 совпадала с U_2. (На черт. 91,*a* U_1 и U_2 для простоты изображены квадратами.)

Ребру r отвечает ось координаты r в нашем k-мерном пространстве, где координатами служат длины рёбер. Изменение одного лишь ребра r изображается смещением вдоль оси r.

По равенству и параллельности окрестностей U_1, U_2 их соответственные точки Y_1, Y_2 соединяются отрезками, параллельными оси r. Все такие отрезки заполняют некоторую окрестность V точки X_0, имеющую характер призмы.

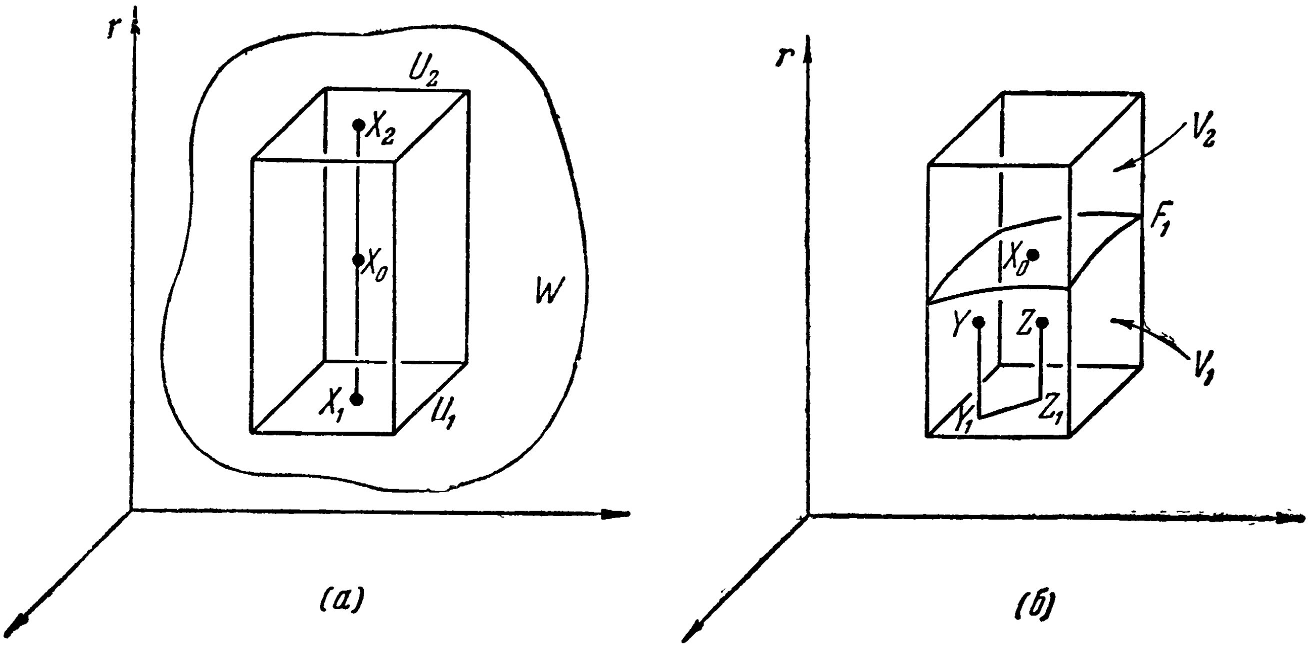
Докажем, что как раз в этой окрестности и нет точек других связных компонент многообразия M, кроме M'.

---

*) На самом деле это наименьшее число поверхностей равно единице, причём почти все точки границы лежат каждая на одной поверхности F_i. Но мы этого не доказываем, так как можем обойтись и без этого.

В точках $Y_1 Y_2$ сумма $\sum \varphi_{1j}$, соответственно, меньше и больше 2π и при переходе от Y_1 к Y_2 она монотонно возрастает. Поэтому на отрезке Y_1 Y_2 есть и притом единственная точка Y, в которой $\sum \varphi_{1j} = 2\pi$. Это означает, что всякий такой отрезок $Y_1 Y_2$ с концами в окрестностях U_1 и U_2 пересекается поверхностью F_1 в одной точке. Таким образом, и вся «призма» V разбивается поверхностью F_1 на две части V_1 и V_2.

В области V_2 выполняется неравенство $\sum \varphi_{1j} > 2\pi$, и потому ни одна её точка не может принадлежать многообразию M. Но точка X_0 лежит на границе связной компоненты M' многообразия M. Поэтому вблизи X_0 и, следовательно, в области V_1 имеются точки из M'. Мы докажем сейчас, что вся область V_1 содержится в M'.



Черт. 91.

Допустим противное, и пусть Y — точка из V_1, не принадлежащая M' (черт. 91,б). Пусть, далее, Z — какая-либо точка из V_1, принадлежащая M'. По построению «призмы» V точки Y и Z лежат на отрезках, идущих из некоторых точек Y_1, Z_1 области U_1. Поэтому, если провести отрезок $Y_1 Z_1$, то мы получим непрерывную ломаную $L = YY_1 + Y_1 Z_1 + Z_1 Z$, соединяющую точки Y и Z и не выходящую из V_1.

Так как точка Z лежит в компоненте M', а точка Y — вне M', то ломаная L должна пересекать границу компоненты M'.

Точка пересечения, как точка границы, должна лежать на некоторых поверхностях F_i. Так как она лежит в области V_1, то поверхности F_1 она принадлежать не может. Кроме того, мы заранее ограничились областью W, где нет точек других поверхностей F_i, кроме $F_1, \ldots, F_l$. Следовательно, точка пересечения может лежать лишь на поверхностях $F_2, \ldots, F_l$. Однако по определению точки X_0 никакая точка границы компоненты M' уже не принадлежит менее чем e поверхностям F_i.

Получается противоречие, и это доказывает, что область V_1 действительно целиком содержится в компоненте $\boldsymbol{M}'$.

Но вместе с тем в области V_2 вовсе нет точек многообразия $\boldsymbol{M}$, так что «призма» V и оказывается такой окрестностью точки X_0, где нет точек других компонент многообразия $\boldsymbol{M}$, кроме $\boldsymbol{M}'$. Лемма доказана.

§ 2. Многообразие многогранников

1. В соответствии с тем, что мы рассматриваем многообразие развёрток данного строения K, мы будем рассматривать выпуклые многогранники, которые можно склеить из развёрток такого строения. Конечно, нам пока не известно, существует ли хотя бы один такой многогранник, даже если существуют развёртки положительной кривизны строения K. Тем не менее в этом параграфе мы будем рассуждать так, как если бы такие многогранники существовали; в следующем же параграфе мы докажем, что они действительно всегда существуют.

Итак, мы будем рассматривать выпуклые многогранники, которые можно склеить из развёрток положительной кривизны данного строения K. Согласно определению (n° 3 § 8 гл. I) многогранник P называется склеенным из развёртки R, если он допускает такое разбиение на (не обязательно плоские) треугольники, что 1) комплекс этих треугольников имеет то же строение, что и комплекс K, и 2) каждый треугольник разбиения можно развернуть на плоскость, причём его стороны окажутся соответственно равными сторонам соответствующего треугольника развёртки R. Там же в n° 3 § 8 гл. I указано, что склеивание есть не что иное, как изометрическое отображение развёртки на многогранник. Таким образом, при склеивании многогранника P из развёртки R устанавливается определённое её отображение на многогранник P и тем самым — также отображение на него комплекса K. *Многогранник P с заданным отображением на него некоторой развёртки R и тем самым комплекса K мы называем K-триангулированным многогранником.* Комплекс треугольников, получающихся при этом на многограннике P, мы называем его K-триангуляцией. Говоря наглядно, K-триангулированный многогранник есть многогранник с нарисованной на нём K-триангуляцией.

Мы рассматриваем только развёртки строго положительной кривизны; у них суммы углов во всех вершинах $< 2\pi$, а потому вершины K-триангуляции неизбежно являются вершинами многогранника.

Два K-триангулированных многогранника мы считаем равными, если существует движение или движение с отражением, приводящее в совпадение эти многогранники вместе с их K-триангуляциями, т. е. так, что отображения комплекса K на эти многогранники тоже совпадают *).

*) Если данная развёртка R допускает разные отображения на данный многогранник, то каждому отображению соответствует свой K-триангулированный многогранник. Например, любой данный правильный тетраэдр можно превращать в разные K-триангулированные тетраэдры, меняя соответствие

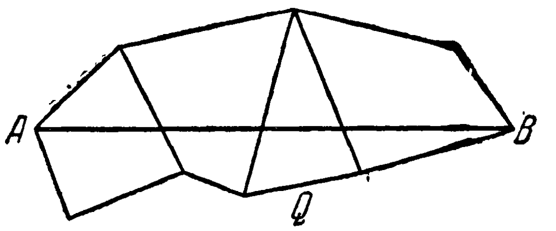
Таким образом, все K-триангулированные многогранники распадаются на классы равных друг другу. Нашей задачей является превратить множество этих классов в многообразие путём подходящего определения окрестностей. Это будет «*многообразие K-триангулированных многогранников*» $\boldsymbol{P}$.

2. Следующую лемму мы докажем в предположении, что триангуляция может иметь вершины, не являющиеся вершинами многогранника. Однако это усиление понадобится нам лишь в § 3. В настоящем же параграфе всюду, кроме леммы 1, считается, что вершины триангуляции являются вершинами многогранника.

Лемма 1. *Пусть на выпуклом многограннике P_0 имеется триангуляция T_0, каждый треугольник которой можно развернуть на плоскость. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если вершины многогранника P удалены от вершин триангуляции T_0 меньше, чем на ε (причём каждой вершине триангуляции T_0 соответствует одна и только одна вершина многогранника P), то на P можно построить, и притом единственным образом, триангуляцию, близкую к T_0 и имеющую то же строение.*

Доказательство. Будем рассматривать любой из многогранников P как полученный путём малого смещения вершин триангуляции T_0 (т. е. как поверхность выпуклой оболочки этих смещённых вершин). При смещениях этих вершин грани исходного многогранника P_0, вообще говоря, будут ломаться.

Число различных способов, какими могут переламываться грани многогранника P_0, давая многогранники P разных строений, очевидно, конечно, и мы рассмотрим многогранники P какого-либо одного строения. Триангулируем одинаково все грани этих многогранников P, беря за вершины триангуляции вершины этих многогранников, и аналогично триангулируем многогранник P_0 (вершинами триангуляции будут здесь вершины из T_0). В результате мы сможем считать, что многогранники P и P_0 одинаково построены из треугольных граней, некоторые из которых могут лежать в одной плоскости.



Черт. 92.

Развернём теперь какое-нибудь ребро AB триангуляции T_0 на плоскость вместе со всеми гранями многогранника P_0, по которым оно проходит; полученную развёртку обозначим Q (черт. 92). Смещение вершин триангуляции T_0 при переходе к многограннику P вызывает изменение граней, участвующих в этой развёртке Q. Но так как

его вершин вершинам развёртки. Однако все эти K-триангулированные тетраэдры будут равны друг другу. На черт. 37 (стр. 55) были даны разные развёртки правильного тетраэдра, имеющие одинаковое строение. Этим развёрткам соответствуют не только разные, но и не равные друг другу K-триангулированные тетраэдры.

изменение граней происходит непрерывно с непрерывным смещением вершин, то найдётся такое $\delta_{AB} > 0$, что при смещениях, меньших δ_{AB}, изменение развёртки Q будет столь малым, что отрезок AB останется внутри неё.

Если мы возьмём ε меньше всех таких δ для всех рёбер триангуляции T_0 и для всех возможных строений многогранников P, то получим как раз искомое ε. Действительно, поскольку вершины триангуляции T при смещениях, меньших ε, не будут переходить через её рёбра (как они не переходят через AB при смещениях $< \delta_{AB}$), постольку рёбра, ограничивавшие в T_0 треугольник, будут попрежнему ограничивать некоторый треугольник, и следовательно, строение триангуляции сохранится. Кроме того, изменённая триангуляция получается только одна, потому что, скажем, в изменённой развёртке Q есть только один отрезок, соединяющий вершины A и B. (На многограннике P возможны также другие геодезические отрезки AB, но они уже не могут быть сколь угодно близкими к данному, так как будут удалены от него всегда на конечное расстояние, зависящее от «ширины» развёртки Q.)

Таким образом, на каждом многограннике P с вершинами, близкими к вершинам триангуляции T_0, существует и притом единственная триангуляция T того же строения и близкая к T_0, как в смысле её расположения, так и в смысле длин её рёбер.

3. Теперь дадим определение окрестностей в многообразии K-триангулированных многогранников. Пусть P_0 — K-триангулированный многогранник и пусть A, B, C — три его вершины, соответствующие трём данным вершинам A, B, C комплекса K. Возьмём декартову систему координат x, y, z и путём движения приведём многогранник P_0 в такое положение, чтобы вершина A оказалась в начале, B — на положительной полуоси x, C — в плоскости xy на полуплоскости $y > 0$. Если многогранник P_0 не вырождается в дважды покрытый многоугольник, то возьмём ещё его вершину D, не лежащую в плоскости xy, и, если нужно, путём отражения в плоскости $z=0$ переведём её в полупространство $z > 0$. Когда расположение многогранника подчинено таким условиям, никакие движения и отражения невозможны. Поэтому, если мы приведём в такое же расположение другой K-триангулированный многогранник P_1, равный P_0, то он совпадёт с P_0 вместе с триангуляцией. Действительно, если многогранники P_1 и P_0 имеют одинаковые K-триангуляции, то существует отображение многогранника P_1 на P_0, приводящее в совпадение их K-триангуляции. Это будет изометрическое отображение P_1 на P_0, а по теореме 1 § 3 главы III такое отображение осуществляется путём движения или движения и отражения. Но движение и отражение многогранника P_1 при данных условиях, наложенных на вершины A, B, C, D, невозможно. Поэтому в результате совпадения многогранников P_1 и P_0 их K-триангуляции неизбежно должны совпадать. Следовательно, при данных условиях, наложенных на вершины A, B, C, D, каждый класс равных K-триангулированных многогранников представляется одним многогранником, и мы можем поэтому говорить о многообразии многогранников вместо многообразия их классов.

Пусть многогранник P_0 не вырождается в многоугольник. Тогда при достаточно малых, но в остальном произвольных смещениях его вершин, сохраняющих, однако, условия, наложенные на вершины A, B, C, мы будем получать новые выпуклые многогранники P. Каждый из них есть граница выпуклой оболочки смещённых вершин. Согласно лемме 1, если смещения вершин достаточно малы, многогранник P допускает единственную K-триангуляцию, близкую к K-триангуляции многогранника P_0. Таким образом, многогранники P, достаточно близкие к P_0, оказываются K-триангулированными. Все они не равны между собой, потому что при условии, наложенном на их расположение, каждому классу равных многогранников отвечает только один многогранник. (Нужно иметь в виду, что при малых смещениях вершин вершина D остаётся в полупространстве $z > 0$.) Совокупность этих многогранников P мы принимаем за окрестность многогранника P_0.

Пусть теперь многогранник P_0 вырождается в дважды покрытый многоугольник. Он лежит в плоскости $z = 0$, и мы различаем на нём две стороны: верхнюю, обращённую в полупространство $z > 0$, и нижнюю, обращённую в полупространство $z < 0$. На одну сторону отображается одна часть комплекса K, на другую — другая. Этим самым стороны вырожденного K-триангулированного многогранника различаются соответствующими им частями комплекса K.

При достаточно малых смещениях вершин, сохраняющих условия, наложенные на расположение вершин A, B, C, многогранник P_0 будет переходить в близкие к нему многогранники P. Если смещения вершин достаточно малы, то грани поворачиваются мало, и ни одна из них не становится перпендикулярной к плоскости $z = 0$. Поэтому на многогранниках P можно различать две части: верхнюю, обращённую в сторону $z > 0$, и нижнюю, обращённую в сторону $z < 0$. По лемме 1 многогранники P допускают K-триангуляции, близкие к K-триангуляции многогранника P_0. Мы будем строить эти триангуляции так, чтобы на верхнюю (нижнюю) сторону многогранника P отображалась часть комплекса K, соответствующая верхней (нижней) части многогранника P_0.

Получаемые таким образом K-триангулированные многогранники P будут не равны между собой. Действительно, в силу условия, наложенного на расположение вершин A, B, C, два равных K-триангулированных многогранника могли бы не совпадать только в том случае, когда один был бы симметричен другому относительно плоскости $z = 0$. Однако при отражении в этой плоскости верхняя и нижняя стороны меняются местами, а им по условию соответствуют разные части комплекса K. Следовательно, хотя симметричные многогранники равны, однако отображения комплекса K на них — разные, и тем самым эти многогранники принадлежат разным классам равных K-триангулированных многогранников.

Совокупность всех многогранников P, полученных указанным путём, мы принимаем за окрестность вырожденного многогранника P_0.

Коротко можно сказать, что *окрестностью K-триангулированного многогранника P_0 мы считаем совокупность всех K-триангулированных многогранников, близких к P_0 вместе с их K-триангуляциями*.

4. Мы показали, что все многогранники P с вершинами, близкими к вершинам P_0, допускают близкие K-триангуляции и не равны между собой. Если число вершин комплекса K, а тем самым и наших многогранников, равно e, то имеется всего $3e$ переменных координат вершин. Но у вершин A, B, C остаются неизменными, соответственно по 3, 2, 1 координате. Следовательно, мы имеем всего $3e-6$ переменных координат, причём в достаточно малых пределах их изменения произвольны и приводят к разным K-триангулированным многогранникам.

Это означает, что *каждый K-триангулированный многогранник P_0 имеет окрестность, гомеоморфную $(3e-6)$-мерному кубу. Тем самым совокупность всех K-триангулированных многогранников действительно превращается в многообразие размерности* $3e-6$. (Помня, конечно, о том, что равные K-триангулированные многогранники не различаются.)

Лемма 2. *Если e — число вершин комплекса K, а k — число его рёбер, то $3e-6=k$. Тем самым число измерений многообразия **P** равно числу измерений многообразия развёрток **M**.*

Действительно, пусть f — число треугольников комплекса K. У каждого треугольника три стороны, и стороны попарно отождествлены; поэтому $3f=2k$. Но по теореме Эйлера $f-k+e=2$, или $3f-3k+3e=6$; а так как $3f=2k$, то $3e-6=k$.

5. Лемма 3. *Пусть последовательность K-триангулированных многогранников P_n такова, что их развёртки R_n сходятся к некоторой развёртке R* *). *Тогда из многогранников P_n можно выбрать подпоследовательность многогранников P_{n_i}, сходящихся к некоторому K-триангулированному многограннику P вместе с их K-триангуляциями* (т. е. K-триангуляция многогранника P есть предел K-триангуляций многогранников P_{n_i}).

В этой лемме многогранники рассматриваются с точностью до движения, так как иначе она не верна: многогранники P_n можно было бы взять удаляющимися в бесконечность. В связи с этим можно предположить, что все многогранники P_n содержат начало координат. Так как развёртки их сходятся, то расстояния между их вершинами рав-

---

*) Сходимость развёрток есть сходимость длин их рёбер, как это ясно из определения многообразия развёрток **M**. Развёртки положительной кривизны заведомо сходятся к развёртке неотрицательной кривизны. Вообще говоря, в развёртке R и предельной K-триангуляции многогранника P могли бы быть и ненастоящие вершины. Доказательство леммы от этого, по существу, не зависит. Однако в дальнейшем нам понадобится эта лемма лишь для того случая, когда и предельная развёртка имеет положительную кривизну.

номерно ограничены и сами многогранники оказываются заключёнными в некотором шаре с центром в начале координат.

Перенумеруем вершины комплекса K; тогда вершины многогранников P_n (и их развёрток R_n) окажутся соответственно перенумерованными. Выберем из многогранников последовательность, в которой сходятся первые вершины, потом из этой последовательности выберем другую, в которой сходятся вторые вершины, и т. д. В результате получим последовательность, в которой сходятся все вершины. Для краткости обозначим многогранники этой последовательности также через P_n, а их развёртки — через R_n. Выпуклый многогранник P, натянутый на пределы вершин (т. е. граница их выпуклой оболочки), будет пределом многогранников P_n. Докажем, что он удовлетворяет требованиям леммы.

Для этого докажем сначала, что если какое-либо ребро многогранника P_n не совпадает ни с одним ребром развёртки R_n, то число его пересечений со всеми её рёбрами не может превосходить некоторого N_0, общего для всех рёбер всех многогранников P_n. (Здесь развёртка R_n рассматривается отображённой на P_n и является, следовательно, его K-триангуляцией R_n.)

Пусть L — верхняя граница длин рёбер многогранников P_n, а h — нижняя граница высот треугольников развёрток R_n; $h>0$, потому что развёртки R_n сходятся к некоторой развёртке R. Пусть, наконец, m — наибольшее число углов, сходящихся в одной вершине развёртки R_n (одно и то же для всех R_n, так как они имеют одинаковое строение K). Я утверждаю, что можно взять

$$N_0=\frac{2Lm}{h}+m. \qquad (1)$$

Допустим противное. Тогда на некотором многограннике P_n есть ребро a, имеющее с рёбрами развёртки R_n число пересечений

$$N>\frac{2Lm}{h}+m. \qquad (2)$$

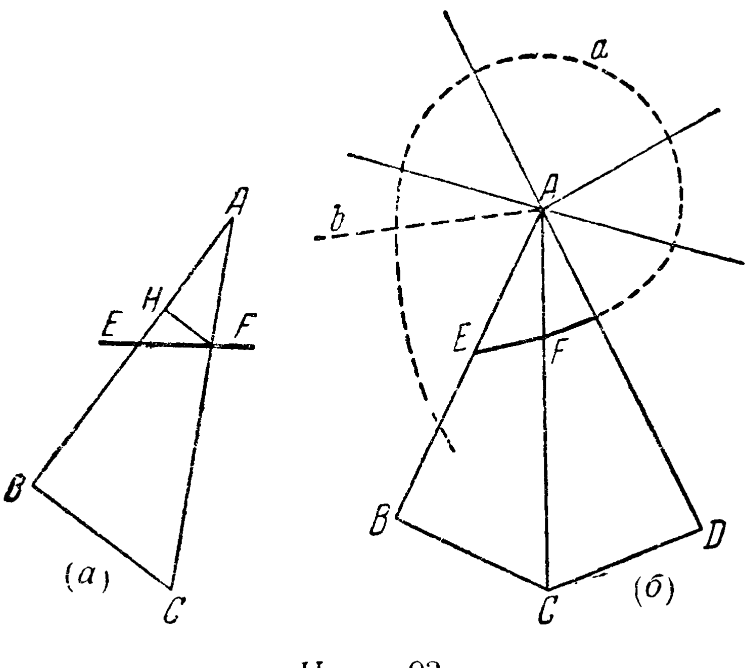
Это ребро a разбивается N точками пересечения на $N+1$ отрезков. Покажем, что среди этих отрезков найдётся не менее m отрезков подряд, имеющих длину $<\frac{h}{2}$. Действительно, иначе на каждые m идущих подряд отрезков приходился хотя бы один с длиной $\geqslant\frac{h}{2}$. Число последовательностей из m отрезков подряд среди всех $N+1$ отрезков равно $\left[\frac{N+1}{m}\right]$ $\left(\text{целая часть отношения } \frac{N+1}{m}\right)$; а в силу неравенства (2)

$$\left[\frac{N+1}{m}\right]\geqslant\left[\frac{N}{m}\right]\geqslant\left[\frac{2L}{h}+1\right]>\frac{2L}{h}.$$

Поэтому, если на каждую такую последовательность приходился хотя бы один отрезок с длиной $\geqslant\frac{h}{2}$, то общая длина этих отрезков уже будет $\geqslant\left[\frac{N+1}{m}\right]\frac{h}{2}>L$. А это невозможно, потому что вся длина ребра a не больше L. Следовательно, последовательность из m отрезков длины $<\frac{h}{2}$ существует.

Пусть первый из m идущих подряд отрезков длины $<\frac{h}{2}$ — отрезок EF — лежит в треугольнике ABC развёртки R_n (черт. 93, a); концы его удалены от вершины A меньше, чем на половины сторон AB и AC, и тем самым лежат ближе к вершине A, чем к вершинам B и C. Чтобы убедиться в этом, мы проводим из точки F перпендикуляр FH к стороне AB; так как $FH\leqslant EF$, то EF только тогда меньше половины высоты, опущенной из вершины C, когда $FA<\frac{1}{2}AC$; аналогичное соображение верно для точки E.

Выйдя из треугольника ABC, ребро a попадает в соседний треугольник ACD, где оно опять имеет отрезок, меньший $\frac{h}{2}$. Поэтому и в этом треугольнике оно проходит ближе к вершине A, чем к другим. Так как мы имеем m таких отрезков подряд, а в вершине A сходится не более m углов, то ребро a, обойдя вокруг вершины A, возвращается к стороне AB и даже снова её пересекает (черт. 93, $б$). Это, однако, невозможно. Действительно, вершина A есть вершина развёртки R_n, а значит, также вершина многогранника P_n. Поэтому из неё должно исходить в какую-нибудь другую вершину ребро b многогранника P_n. Но в силу предыдущего это ребро должно будет пересечь ребро a, а это невозможно, потому что рёбра встречаются только в вершинах.



Черт. 93.

Итак, мы доказали, что число пересечений любого ребра каждого многогранника P_n с рёбрами развёртки R_n не превосходит числа N_0, определённого формулой (1). Отсюда ясно, что и обратно, всякое ребро развёртки R_n не может пересекать ребра многогранника P_n больше чем некоторое число раз, общее для всех многогранников P_n *).

*) Действительно, число рёбер любого многогранника P_n не превосходит некоторого числа N_1, зависящего лишь от числа вершин, которое у всех P_n одно и то же. Поэтому общее число пересечений всех рёбер не больше N_0N_1, и следовательно, на каждое ребро развёртки приходится заведомо не более N_0N_1 пересечений.

Теперь перенумеруем рёбра каждой развёртки R_n, приписав соответственным рёбрам один и тот же номер. Возьмём первые рёбра всех этих развёрток. Если среди них есть бесконечное число совпадающих с рёбрами соответствующих многогранников P_n, то можно выбрать такую последовательность P_{n_i}, в которой эти рёбра сходятся. Если же бесконечное число первых рёбер только пересекает рёбра многогранников P_n, то ввиду ограниченности числа точек пересечения можно выбрать такую последовательность P_{n_i}, в которой эти точки пересечения сходятся к некоторым предельным положениям. Тогда отрезки между соседними точками пересечений тоже будут сходиться и, следовательно, опять первые рёбра развёрток будут сходиться. Применяя, далее, то же рассуждение ко вторым рёбрам, затем к третьим и т. д., получим в конце концов такую последовательность многогранников P_{n_j}, в которой все рёбра развёрток R_{n_j} сходятся.

Пределы этих рёбер образуют на предельном многограннике P сеть того же строения и разбивают его на треугольники, не содержащие внутри себя вершин многогранника. Действительно, треугольники развёрток R_{n_j} составлены из кусков граней многогранников P_{n_j}, прилегающих друг к другу по отрезкам рёбер. Эти куски граней сходятся к некоторым многоугольникам (быть может, вырождающимся) на гранях предельного многогранника P, и куски P, составленные из этих многоугольников, ограничены пределами рёбер развёрток R_{n_j}. При разворачивании на плоскость эти куски оказываются пределами треугольников развёрток R_{n_j}, т. е. сами являются треугольниками. Тем самым на P оказывается начерченной некоторая развёртка того же строения, что и развёртки R_{n_j}, и имеющая длины рёбер, равные пределам длин рёбер этих развёрток. Следовательно, она и будет предельной развёрткой R. Элементы (вершины, рёбра, треугольники) развёрток R_{n_j}, начерченных на многогранниках P_{n_j}, сходятся к соответственным элементам развёртки R, начерченной на многограннике P. Это означает, что K-триангулированные многогранники P_{n_j} сходятся к K-триангулированному многограннику P вместе с их K-триангуляциями R_{n_j}. Лемма доказана.

§ 3. Существование замкнутого выпуклого многогранника с данной развёрткой

Теорема. *Из всякой развёртки, гомеоморфной сфере и имеющей суммы углов в вершинах $\leqslant 2\pi$, можно склеить замкнутый выпуклый многогранник.*

Согласно лемме 2 § 1 каждая такая развёртка изометрична развёртке «положительной кривизны», у которой во всех вершинах суммы углов $< 2\pi$. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением только таких развёрток. Далее, согласно лемме 1 § 1 развёртка только с тремя вершинами реализуема дважды покрытым треугольником. Поэтому доказательство можно вести индукцией по числу вершин развёртки.

считая, что теорема доказана для всех развёрток с числом вершин $<e (e>3)$, будем доказывать её для развёрток с числом вершин, равным e. Наконец, при данном e, очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением развёрток любого данного строения K. Таким образом, нам нужно доказать следующее:

Пусть K — комплекс с числом вершин $e<3$, допускающий превращение в развёртки положительной кривизны *).

Если всякая развёртка положительной кривизны с числом вершин $<e$ реализуема, то всякая развёртка R положительной кривизны строения K также реализуема.

Рассмотрим многообразие $\boldsymbol{M}$ развёрток R и многообразие $\boldsymbol{P}$ K-триангулированных многогранников P. Так как каждому K-триангулированному многограннику P по определению соответствует определённая начерченная на нём развёртка R, то тем самым определяется естественное отображение φ многообразия $\boldsymbol{P}$ в многообразие $\boldsymbol{M}$. Нам нужно доказать, что *φ есть отображение на всё $\boldsymbol{M}$*; этим и будет доказано, что каждой развёртке R отвечает склеенный из неё многогранник $\boldsymbol{P}$. По лемме 2 § 2 многообразия $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{P}$ имеют одно и то же число измерений, а потому можно воспользоваться леммой об отображении (§ 2 гл. II). Согласно этой лемме для установления того, что φ отображает $\boldsymbol{P}$ на всё $\boldsymbol{M}$, достаточно доказать следующие свойства этого отображения:

1) Во всякой связной компоненте многообразия $\boldsymbol{M}$ имеются образы точек многообразия $\boldsymbol{P}$, т. е. реализуемые развёртки R.

2) φ взаимно однозначно.

3) φ непрерывно.

4) Если точки R_n из многообразия $\boldsymbol{M}$ являются образами точек P_n из многообразия $\boldsymbol{P}$ и сходятся к точке R ($R \in \boldsymbol{M}$), то существует точка P из $\boldsymbol{P}$, отображающаяся в R, и имеется подпоследовательность P_{n_j}, сходящаяся к P. Иными словами, если развёртки R_n сходятся к R и из них склеены многогранники P_n, то существуют K-триангулированный многогранник P и такая подпоследовательность P_{n_j} из многогранников P_n, что многогранники P_{n_j} сходятся к P вместе с их K-триангуляциями R_{n_j}.

Это последнее утверждение как раз составляет содержание леммы 3 § 2, и поэтому остаётся доказать первые три свойства отображения φ.

Уже в § 2 было оговорено, что существование многогранников, допускающих развёртки строения K, заранее не известно, т. е. многообразие $\boldsymbol{P}$ могло бы быть пустым, и тогда отображение φ было бы лишено смысла. Однако первое из перечисленных требований состоит в том, что во всякой связной компоненте многообразия $\boldsymbol{M}$ имеются реализуемые развёртки. А это, очевидно, включает в себя утвер-

*) В § 1 было показано на примере, что не всякий комплекс обладает этим свойством.

ждение, что K-триангулируемые многогранники существуют. Следовательно, доказательство выполнения первого требования будет содержать в себе также доказательство непустоты многообразия $\boldsymbol{P}$. Однако мы докажем сначала второе и третье свойства отображения φ, потому что они сразу следуют из уже полученных результатов.

Отображение φ взаимно однозначно. Действительно, однозначность отображения φ содержится в его определении, потому что оно сопоставляет каждому K-триангулированному многограннику развёртку, являющуюся его K-триангуляцией. Вместе с тем, если два многогранника P_1 и P_2 имеют одну и ту же развёртку R, то тем самым между ними установлено изометрическое соответствие, переводящее развёртку R, начерченную на P_1, в развёртку R, начерченную на P_2. По теореме 1 § 3 главы III такое изометрическое отображение многогранника P_1 на P_2 осуществляется путём движения или движения и отражения. А по самому определению равенства K-триангулированных многогранников это означает, что K-триангулированные многогранники P_1 и P_2 равны. Следовательно, неравным K-триангулированным многогранникам отвечают разные развёртки, так что отображение φ взаимно однозначно.

Отображение φ непрерывно. Действительно, это свойство отображения φ содержится в самом определении окрестностей в многообразии $\boldsymbol{P}$. Согласно этому определению окрестность K-триангулированного многогранника P_0 состоит из многогранников с близкими K-триангуляциями. Это означает, что близким K-триангулируемым многогранникам отвечают близкие развёртки, т. е. отображение φ непрерывно.

Остаётся доказать, что *во всякой связной компоненте многообразия $\boldsymbol{M}$ имеются реализуемые развертки.*

Для доказательства рассмотрим, так же как в § 1, многообразие $\boldsymbol{M}^0$ всех развёрток строения K. По лемме 3 § 1 многообразие $\boldsymbol{M}$ составляет часть многообразия $\boldsymbol{M}^0$ и имеет в нём границу (потому что, по предположению, число вершин e комплекса K больше трёх).

Граница многообразия $\boldsymbol{M}$ состоит из развёрток, у которых суммы углов во всех вершинах $\leqslant 2\pi$ и в некоторых из них $=2\pi$. По лемме 2 § 1 каждая такая развёртка изометрична развёртке с числом вершин, меньшим e, а по предположению индукции все такие развёртки реализуемы. Следовательно, граница многообразия $\boldsymbol{M}$ в $\boldsymbol{M}^0$ состоит из реализуемых развёрток.

Пусть $\boldsymbol{M}'$ — какая-нибудь связная компонента многообразия $\boldsymbol{M}$. Согласно лемме 5 § 1 на её границе существует такая точка, т. е. развёртка R_0, в малой окрестности U которой нет точек, т. е. развёрток из других связных компонент многообразия $\boldsymbol{M}$. Так как развёртка R_0 лежит на границе многообразия $\boldsymbol{M}$, то она реализуема посредством некоторого выпуклого многогранника P_0. Однако не все вершины развёртки R_0 являются вершинами этого многогранника, потому что при некоторых из них суммы углов равны 2π. Этим вершинам соответствуют на многограннике P_0 точки $A_1, \ldots, A_l$, лежащие внутри его рёбер или граней. Выдвинув эти точки наружу на достаточно малое расстояние, построим выпуклую оболочку совокупности этих смещённых точек и вершин многогранника P_0. Граница этой выпуклой оболочки будет выпуклым многогранником P с вершинами, близкими к вершинам развёртки R_0, начерченной на P_0, причём точкам $A_1, \ldots, A_l$ будут соответствовать уже истинные вершины многогранника P. Согласно лемме 1 § 2 многогранник P допускает K-триангуляцию R, близкую к развёртке R_0. Но все вершины этой K-триангуляции лежат в истинных вершинах многогранника P, а потому суммы углов во всех вершинах развёртки R строго меньше 2π. Следовательно, развёртка R принадлежит многообразию $\boldsymbol{M}$. А так как она близка к развёртке R_0 и вблизи развёртки R_0 нет иных развёрток из $\boldsymbol{M}$, кроме принадлежащих рассматриваемой связной компоненте $\boldsymbol{M}'$, то R принадлежит этой связной компоненте. Но развёртка R реализована многогранником P. Следовательно, в любой связной компоненте многообразия $\boldsymbol{M}$ имеются реализуемые развёртки.

Таким образом, доказано, что все условия леммы об отображениях выполнены, и тем самым доказана наша теорема о существовании выпуклого многогранника с данной развёрткой.

§ 4. Существование бесконечного выпуклого многогранника с данной развёрткой

1. Как было доказано в §§ 6 и 7 главы I, развёртка бесконечного выпуклого многогранника необходимо удовлетворяет двум условиям: 1) «условие положительности кривизны», требующее, чтобы суммы углов вокруг вершин развёртки не превосходили 2π, и 2) развёртка гомеоморфна плоскости. Согласно теореме 10 § 7 главы I это второе условие равносильно следующим двум:

2а) развёртка содержит хотя бы один бесконечный многоугольник,

2б) развёртка имеет один бесконечный конец, т. е. если переходить от одного бесконечного многоугольника к другому, склеиваемому с первым по бесконечной стороне, от него к следующему и т. д., то вернёмся к исходному многоугольнику, исчерпав все бесконечные многоугольники развёртки. (В частности, развёртка может содержать только один бесконечный многоугольник, и тогда такая циклическая последовательность состоит из него одного: он склеивается сам с собой.)

Условия 1), 2а) и 2б) легко проверяемы для каждой данной развёртки.

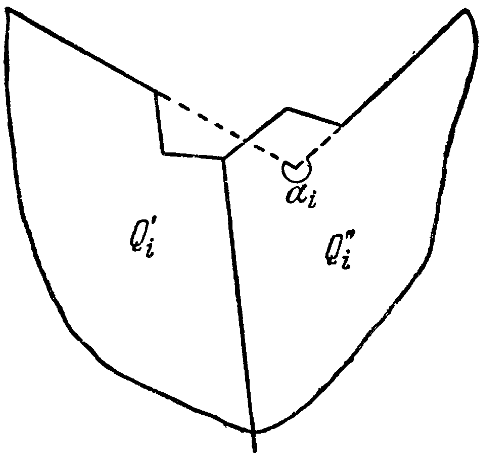
Теперь мы докажем, что они достаточны для того, чтобы из развёртки склеивался бесконечный выпуклый многогранник.

Теорема. *Если развёртка удовлетворяет условиям* 1), 2а) и 2б), *то из неё можно склеить бесконечный выпуклый многогранник.*

2. Приступим к доказательству формулированной теоремы.

Пусть R — какая-либо данная развёртка, удовлетворяющая условиям 1), 2а) и 2б).

Рассмотрим какой-либо бесконечный многоугольник Q_i нашей развёртки. Если его бесконечные стороны не параллельны, то их можно продолжить до пересечения друг с другом, и тогда угол, содержащий бесконечную часть Q_i, который они образуют, мы называем углом α_i между бесконечными сторонами многоугольника Q_i. Если бесконечные стороны многоугольника параллельны, то мы считаем $\alpha_i = 0$. Если $\alpha_i \geqslant \pi$, то проведём в многоугольнике Q_i из надлежащей вершины полупрямую, делящую его на два многоугольника Q_i', Q_i'' с углами α_i', α_i'', равными $\frac{\alpha_i}{2}$ (черт. 94). Разбивая таким образом все многоугольники Q_i, у которых $\alpha_i \geqslant \pi$, мы получим развёртку, в которой у всех бесконечных многоугольников углы $\alpha_i < \pi$. Поэтому можно предполагать, что рассматриваемая развёртка — именно такая.



Черт. 94.

3. Пусть у многоугольника Q_i бесконечные стороны параллельны. Если они отождествляются не друг с другом, а со сторонами других многоугольников, то, подклеив Q_i к одному из этих многоугольников Q_j, получим многоугольник $Q_i + Q_j$. Угол между бесконечными сторонами многоугольника $Q_i + Q_j$ — тот же самый, что у Q_j. (При подклеивании Q_i к Q_j конечные части этих многоугольников могут, вообще говоря, перекрываться; но этого можно избежать, отрезав эти части и приняв их за новые многоугольники развёртки.) Производя такую операцию подклеивания со всеми бесконечными многоугольниками с параллельными бесконечными сторонами, придём к развёртке R, в которой если и есть бесконечный многоугольник с параллельными сторонами, то эти стороны отождествлены между собой. Но так как бесконечные многоугольники образуют одну циклическую последовательность, если идти через их отождествляемые бесконечные стороны, то можно считать, что в развёртке R либо вовсе нет бесконечного многоугольника с параллельными сторонами, либо есть один такой многоугольник, а других бесконечных многоугольников нет.

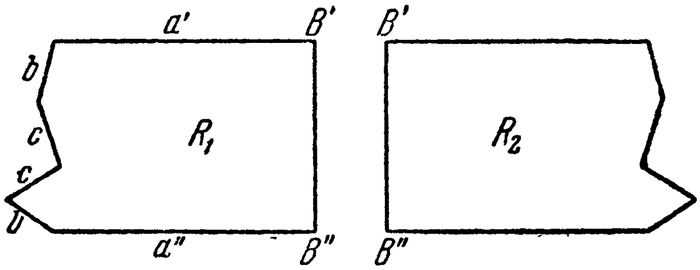
Рассмотрим оба случая отдельно.

4. Предварительно докажем одну простую лемму, которая нам понадобится также в § 1 главы V.

Лемма. *Пусть развёртка R, гомеоморфная сфере, состоит из двух частей R_1 и R_2, имеющих общую границу L, причём существует изометрическое отображение развёртки R на себя, меняющее местами R_1 и R_2 и оставляющее неизменной их границу L. Тогда замкнутый выпуклый многогранник P, склеенный из развёртки R, имеет плоскость симметрии, содержащую ломаную L.*

Действительно, многогранник P состоит из двух частей P_1 и P_2, соответствующих развёрткам R_1 и R_2. Согласно условию теоремы многогранник P допускает изометрическое отображение на себя, состоящее в перемене местами соответствующих точек его частей P_1, P_2, причём точки их общей границы L остаются на месте. Всякое же изометрическое отображение замкнутого выпуклого многогранника сводится к движению или движению и отражению. В данном случае движение исключается, поскольку все точки замкнутой ломаной L, разделяющей P_1 и P_2, остаются на месте. Следовательно, перемена местами частей P_1 и P_2 осуществляется отражением в плоскости, а так как при этом неподвижными остаются только точки этой плоскости, то ломаная L лежит в ней, и лемма доказана.

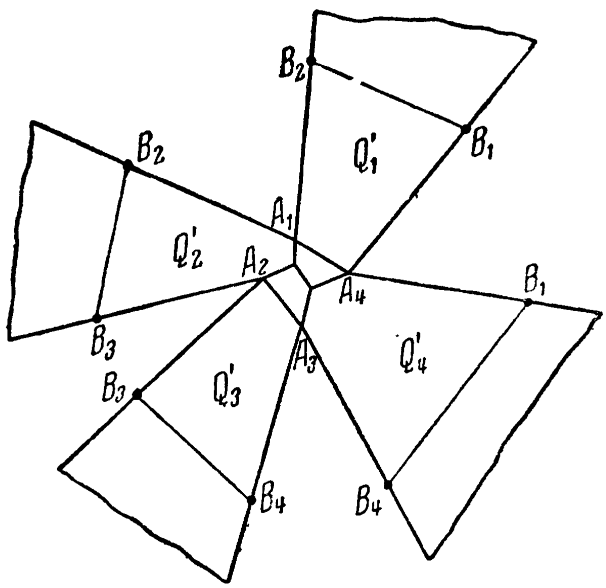
5. Пусть в развёртке R имеется единственный бесконечный многоугольник Q с параллельными сторонами a', a'' и пусть A', A'' — вершины, из которых они исходят. Отложим на этих сторонах равные отрезки $A'B'$, $A''B''$ настолько большой длины, чтобы отрезок $B'B''$ проходил внутри развёрнутого на плоскости многоугольника Q. Отрезав от многоугольника Q бесконечную часть, отсекаемую отрезком $B'B''$, получим развёртку R_1 из конечных многоугольников. В этой развёртке только сторона B' B'' не отождествляется ни с какой другой стороной. Возьмём второй экземпляр R_2 такой же развёртки и отождествим у развёрток R_1 и R_2 свободные стороны $B'B''$, совмещая одновременно соответствующие вершины. Тогда получится развёртка $R_1 + R_2$, симметричная относительно линии $B'B''$ (черт. 95). Сумма углов, сходящихся в вершине $B (= B' = B'')$, будет равна 2π. Кроме того, развёртка $R_1 + R_2$, очевидно, гомеоморфна сфере. Следовательно, $R_1 + R_2$ удовлетворяет всем условиям, каким должна удовлетворять развёртка замкнутого выпуклого многогранника, и из неё можно склеить такой многогранник. Этот многогранник состоит из двух частей P_1 и P_2 соответственно двум половинам развёртки R_1 и R_2. По доказанной лемме многогранник $P_1 + P_2$ симметричен относительно некоторой плоскости T, содержащей замкнутую ломаную $L = B'B''$ (точки B' и B'' склеиваются в одну B).



Черт. 95.

Из того, что полный угол вокруг всякой точки ломаной L равен 2π, следует, что в плоскости T нет вершин многогранника $P_1 + P_2$ и что T может пересекаться лишь отдельными рёбрами, которые по симметрии многогранника $P_1 + P_2$ перпендикулярны к T. Это позволяет отбросить часть P_2, а на P_1 грани, подходящие к T, продолжить до бесконечности. Присоединяемая при этом к P_1 бесконечная призма, как это легко проследить, будет как раз склеена из той бесконечной полосы, которую мы отрезали раньше от многоугольника Q. Полученный из P_1 продолжением граней бесконечный многоугольник реализует развёртку R.

6. Пусть теперь в развёртке R нет бесконечных многоугольников с параллельными сторонами. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — вершины, из которых исходят бесконечные стороны. Отложим на них равные отрезки A_iB_i столь большой длины l, чтобы в бесконечных многоугольниках Q_i отрезки B_iB_{i+1} проходили каждый целиком внутри своего многоугольника Q_i. Отрезав от многоугольников Q_i их бесконечные части, отсекаемые отрезками B_iB_{i+1}, получим развёртку R из конечных многоугольников. В этой развёртке только стороны B_iB_{i+1} не отождествляются ни с какими другими (черт. 96).



Черт. 96.

Пусть Q'_i — отделённая отрезком B_iB_{i+1} конечная часть многоугольника Q_i. Если увеличивать длину l сторон A_iB_i и $A_{i+1}B_{i+1}$ и одновременно подвергать Q'_i подобному сжатию так, чтобы длины сторон A_iB_i и $A_{i+1}B_{i+1}$ оставались постоянными, то многоугольник Q'_i будет сходиться к равнобедренному треугольнику. Отсюда легко заключить, что при увеличении длины l углы при вершинах B_i и B_{i+1} в многоугольнике Q'_i сходятся к углам такого равнобедренного треугольника и, следовательно, становятся в конце концов меньше некоторого $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Поэтому, если выбрать l достаточно большим, то при всех вершинах B_i многоугольников Q'_i углы будут меньше $\frac{\pi}{2}$ и суммы их при каждой общей вершине B_i будут меньше π. Выберем настолько большое l и рассмотрим соответствующую развёртку R_1.

Возьмём второй экземпляр R_2 такой же развёртки и отождествим у развёрток R_1 и R_2 их свободные рёбра B_iB_{i+1}. Получим развёртку $R_1 + R_2$, симметричную относительно линии $B_1B_2 \ldots B_n$, составленной из этих рёбер. Так как в развёртке R_1 углы при вершинах B_i были меньше π, то в развёртке $R_1 + R_2$ они будут меньше 2π. Наконец, развертка $R_1 + R_2$, очевидно, гомеоморфна сфере *).

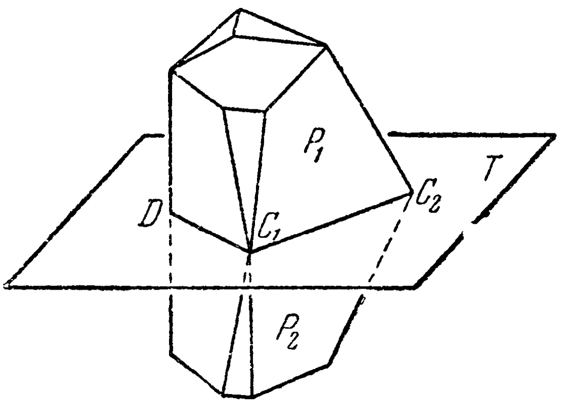
Следовательно, из неё можно склеить замкнутый выпуклый многогранник. Этот многогранник состоит из двух частей P_1 и P_2 соответственно двум частям R_1 и R_2 его развёртки. Так же как и выше, из взаимной симметрии этих частей развёртки следует, что многогранник

*) Если f, k, e — числа многоугольников, рёбер и вершин развёртки R, а n — число её бесконечных многоугольников, то в развёртке $R_1 + R_2$ числа многоугольников, рёбер и вершин будут $\bar{f} = 2f$, $\bar{k} = 2k + n$, $\bar{e} = 2e + n$ и потому $\bar{f} - \bar{k} + \bar{e} = 2(f - k + e) = 2$.

$P_1 \dotplus P_2$ имеет некоторую плоскость симметрии T, разделяющую его части P_1 и P_2.

Будем повторять это построение при всё более увеличивающихся длинах l (которые мы при построении откладывали на бесконечных рёбрах развёртки). На получаемых многогранниках $P_1 \dotplus P_2$ будем рассматривать лишь части P_1. Последние при $l \to \infty$, как это наглядно почти очевидно, дадут в пределе некоторый бесконечный многогранник, который и будет реализовывать развёртку R.

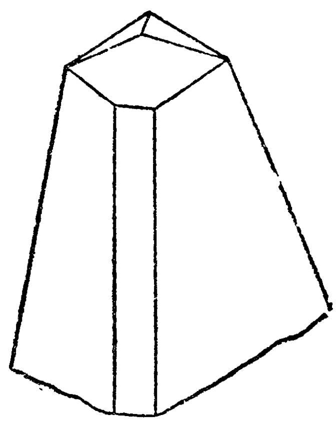
Надо лишь показать, что из получаемых при увеличении l многогранников P_1 действительно можно выбрать подпоследовательность многогранников, сходящихся к некоторому предельному многограннику P. (Метрика его заведомо будет совпадать с метрикой развёртки R, поскольку метрики на многогранниках P_1 должны сходиться и к метрике на P и к метрике в R.)



Черт. 97.

Рассмотрим несколько подробнее возможную структуру многогранника $P_1 \dotplus P_2$.

Внутри части P_1 будет, очевидно, ровно столько вершин, сколько было существенных вершин A_i у исходной развёртки R; обозначим их число через e. Граница части P_1 представляет собой многоугольник, лежащий в плоскости T. Вершины этого многоугольника могут быть двух сортов. Во-первых, точки D_i, не являющиеся вершинами многогранника $P_1 \dotplus P_2$. Через каждую такую точку проходит ребро многогранника $P_1 \dotplus P_2$, по симметрии перпендикулярное к T (черт. 97). Такое ребро должно заканчиваться в одной из e вершин A_i, а потому таких рёбер во всяком случае не более чем e. Во-вторых, точки C_j, являющиеся вершинами многогранника $P_1 \dotplus P_2$. Каждая из них может получаться лишь из некоторой точки B_i развёртки, а потому этих вершин не больше чем бесконечных многоугольников Q_i в развёртке R; пусть их будет m штук. Из каждой такой вершины внутрь P_1 могут идти некоторые рёбра, но общее число их во всяком случае не превышает em.


Черт. 97а.

Пусть теперь P_1^n — многогранники, полученные для всё бо́льших $l_n \to \infty$.

Передвинем всё P_1^n в такое положение, чтобы одна какая-либо вершина, например A_1^n, у всех них совпала, а внешние нормали к плоскостям T^n были одинаково направлены. При этом все внутренние для части P_1^n вершины многогранника $P_1^n \dotplus P_2^n$ расположатся в ограниченной части пространства, и теперь уже очевидно существование подпоследовательности многогранников P_1^n (мы сохраняем для простоты их нумерацию), для которых, во-первых, все вершины A_i^n сходятся к некоторым точкам A_i; во-вторых, рёбра $A_i^n D_i^n$, перпендикулярные к T^n, если только таковые существуют, исходят из сходящихся вершин A_i^n, а потому сходятся к параллельным друг другу лучам, исходящим из точек A_i; в-третьих, рёбра $A_i^n C_j^n$ существуют для одних и тех же пар (i, j) и их направления сходятся к некоторым предельным лучам, исходящим из точек A_i.

Сами многогранники P_1^n, как это читатель сам может проследить, сходятся к выпуклой оболочке совокупности предельных вершин A_i и исходящих из них предельных лучей. Эта оболочка и даст многогранник P, реализующий развёртку R. На черт. 97а изображён для примера многогранник, полученный предельным переходом от многогранников черт. 97.

§ 5. Существование бесконечного многогранника с данной развёрткой и данным предельным углом

1. В § 3 главы III было доказано, что бесконечный выпуклый многогранник с кривизной, равной 2π, определяется своей развёрткой однозначно (с точностью до движения или движения и отражения). Поэтому, если развёртка имеет кривизну 2π, то к теореме существования, доказанной в предыдущем параграфе, нечего добавить. Заметим, что развёртка с кривизной 2π характеризуется тем, что в ней все бесконечные многоугольники имеют параллельные бесконечные стороны; это соответствует первому случаю, рассмотренному в предыдущем параграфе. Но если кривизна развёртки меньше 2π, то из неё, оказывается, можно склеить не один, а бесконечно много неравных выпуклых многогранников с разными предельными углами.

Прежде чем формулировать соответствующую теорему, напомним некоторые определения. Лучом в развёртке R или на многограннике P мы называем бесконечную в одну сторону линию, являющуюся кратчайшей на всяком конечном отрезке. При бесконечном подобном сжатии к какой-нибудь точке бесконечный выпуклый многогранник P переходит в многогранный угол — предельный угол V многогранника P. Если кривизна многогранника P равна 2π, то V вырождается в полупрямую, и этот случай мы здесь исключаем; вообще же V может быть и дважды покрытым плоским углом. При сжатии многогранника P в угол V любой луч L на P переходит в одну из образующих угла V — предельную образующую луча L. Если на многограннике P была задана ориентация, то в пределе она переносится на угол V. (См. гл. III, § 4, n° 5, лемма 1.)

Теорема. *Пусть развёртка R, удовлетворяющая условиям, необходимым для развёртки бесконечного выпуклого многогранника, имеет кривизну $< 2\pi$. Пусть эта развёртка ориентирована и в ней* *задан луч L. (Начиная с некоторого места, он представляет собой полупрямую, проходящую по одному из её бесконечных многоугольников *)). Пусть, наконец, V — выпуклый многогранный угол с кривизной, равной кривизне развёртки R, и с данным обходом вокруг вершины, а $\overline{L}$ — одна из его образующих. Существует бесконечный выпуклый многогранник P, склеенный из развёртки R, имеющий V своим предельным углом и такой, что линия, соответствующая на нём лучу L, имеет $\overline{L}$ в качестве предельной образующей, а ориентация многогранника P, определённая ориентацией развёртки R, совпадает с ориентацией угла V.*

Такой многогранник P — единственный с точностью до переноса. (Мы предполагаем, что кривизна развёртки R больше нуля; иначе утверждение единственности не верно.)

Утверждение о единственности содержится в теореме 3 § 4 главы III. Действительно, эта теорема говорит, что изометрическое отображение одного многогранника P на другой, индуцирующее конгруэнтное отображение их предельных углов, можно осуществить движением или движением и отражением. В данном случае, поскольку заданы развёртка, предельный угол V, ориентация и предельная образующая некоторого луча L, — отображение многогранника P на другой многогранник P_1 с теми же данными необходимо является изометрическим и индуцирует тождественное преобразование угла V. Последнее следует из того, что при отображении P на P_1 угол V, предельная образующая и ориентация должны сохраняться. Следовательно, отображение P на P_1 сводится к движению или движению и отражению; отражение, однако, исключается тем требованием, что ориентация многогранника P_1 должна совпадать с данной ориентацией угла V. Вращение же исключено потому, что оно вызывает вращение предельного угла. Остаётся только перенос, поскольку предельный угол связан с многогранником с точностью до переноса.

Таким образом, в формулированной теореме даётся полная система данных, определяющих многогранник P. Можно ещё заметить, что задание луча L и его предельной образующей $\overline{L}$, очевидно, эквивалентно заданию другого луча L_1 и другой предельной образующей $\overline{L_1}$, если только углы между L и L_1, $\overline{L}$ и $\overline{L_1}$, отсчитанные в направлениях, заданных ориентацией развёртки R и угла V, равны.

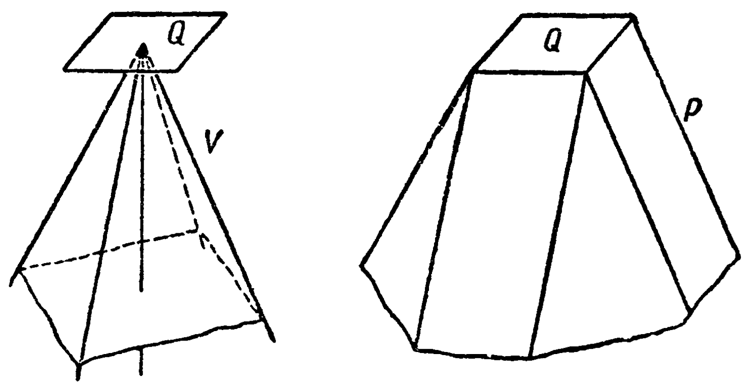
2. Так как при данной развёртке R предельный угол V и образующую $\overline{L}$ можно выбирать достаточно произвольно, то, меняя их, будем получать новые многогранники с той же развёрткой. Таким образом, в данной теореме содержится уже утверждение о возможности изгибания бесконечного выпуклого многогранника с кривизной $< 2\pi$. Этот вопрос мы рассмотрим подробнее в § 2 главы V, а сейчас дадим изящный пример изгибания бесконечного выпуклого многогранника.

*) См. гл. III, § 3, лемма 2.

Пусть даны правильный n-угольник Q и правильный n-гранный угол V, вершину которого поместим в центре многоугольника так, чтобы ось симметрии угла V была перпендикулярна к плоскости Q (черт. 98).

Поверхность выпуклой оболочки полученной таким образом фигуры $Q+V$ будет бесконечным выпуклым многогранником P с предельным углом V и с вершинами только в вершинах многоугольника Q (гл. I, § 4, теоремы 5 и 5а).

Фигура $Q+V$ имеет n-кратную ось симметрии, а потому её имеет и многогранник P, как бы ни поворачивать угол V вокруг его оси. Сумма кривизн вершин многогранника P равна кривизне его предельного угла V (гл. I, § 5, теорема 3). А так как вершины многогранника переходят друг в друга при вращении вокруг оси симметрии, то кривизны их составляют всегда одну n-ю кривизны угла V независимо от поворота угла V.



Черт. 98.

Если вращать угол V вокруг оси, то многогранник P будет изменяться. Однако его грань Q будет неизменной и по доказанному неизменными будут кривизны его вершин. Поэтому полные углы на его бесконечной части и конечные стороны её остаются неизменными. Это означает, что хотя бесконечная часть и меняет свою форму, но её развёртка остаётся неизменной. Чтобы убедиться в этом, достаточно разрезать её по лучу и развернуть на плоскость; тогда получится бесконечный многоугольник с данными углами и данными конечными сторонами.

Таким образом, вращению угла V вокруг оси отвечает изгибание многогранника P, при котором его грань Q остаётся вовсе неподвижной. Интересно проследить это изгибание наглядно. Здесь предельный угол и ориентация не меняются, но меняется соответствие лучей на угле V и на бесконечной части многогранника P.

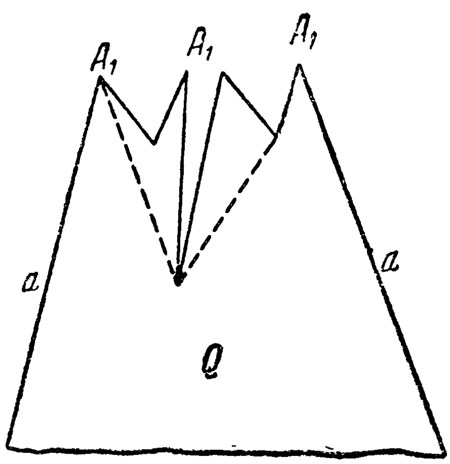
Тот же результат получится, если вместо Q взять выпуклую шапку с симметричным основанием, а угол V взять не обязательно правильным, но всё же так, чтобы он имел такую же ось симметрии, как основание шапки.

3. Формулированная выше общая теорема принадлежит С. П. Оловянишникову *); данное им доказательство использует существование замкнутого выпуклого многогранника с данной развёрткой, подобно доказательству теоремы предыдущего параграфа. Однако его можно осуществить прямо на основании леммы об отображении. Мы дадим

*) Работа С. П. Оловянишникова цитирована в предисловии на стр. 8.

здесь это независимое доказательство, хотя доказательство С. П. Оловянишникова несколько проще, поскольку оно *уже использует* теорему о замкнутом многограннике. В заключение мы покажем, как тем же путём можно дать независимое доказательство существования бесконечного выпуклого многогранника с данной развёрткой, имеющей кривизну, равную 2π.

4. Мы будем рассматривать развёртки, удовлетворяющие условиям, необходимым для развёрток бесконечного выпуклого многогранника с кривизной $\omega > 0$ и $< 2\pi$. Эти развёртки гомеоморфны плоскости. Отобразим такую развёртку R на (топологическую) плоскость E или, иными словами, вообразим развёртку R склеенной, и пусть $A_1, \ldots, A_e$ — точки плоскости E, соответствующие тем вершинам развёртки, где суммы углов $< 2\pi$. Если такая точка — только одна, то, разрезая плоскость E, т. е. склеенную развёртку R, по лучу, исходящему из этой точки, получим плоский угол, из которого можно склеить любой многогранный угол кривизны ω. Следовательно, при $e = 1$ теорема верна, и дальше её можно доказывать индукцией по числу вершин.

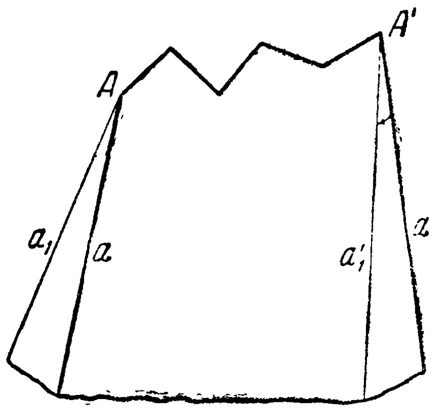


Черт. 99.

5. Пусть $e > 1$. Проведём из точки A_1 луч a, а также кратчайшие A_1A_l во все прочие точки $A_2, \ldots, A_e$. Разрезав плоскость E по этим линиям, получим бесконечный (абстрактный) многоугольник Q. У него имеются две вершины A_1, из которых исходят бесконечные стороны a. Соединим эти точки линией, кратчайшей в многоугольнике Q (черт. 99). Согласно теореме 1 § 8 главы I она будет геодезической ломаной с вершинами только в вершинах многоугольника или, в частности, вовсе без вершин, и отсечёт от многоугольника Q конечную часть, состоящую, может быть, не из одного, а из нескольких многоугольников. Каждую из этих частей мы разбиваем диагоналями на треугольники (что возможно в силу теоремы 5 § 8 гл. I). В результате получается развёртка R_1, изометричная R и такая, что 1) в ней нет «лишних» вершин, где суммы углов $= 2\pi$, 2) она состоит из треугольников и одного бесконечного многоугольника. Следовательно, достаточно ограничиться развёртками, не имеющими «лишних» вершин.

Отвлекаясь от метрических соотношений, мы превращаем развёртку в «комплекс», гомеоморфный плоскости; этот комплекс состоит из топологических треугольников и одного топологического многоугольника, открытого с одной стороны. Обратное превращение такого комплекса в развёртку сводится к заданию 1) длин сторон треугольников и 2) углов бесконечного многоугольника (тогда заданы углы и стороны этого многоугольника и он, следовательно, вполне определён). Однако если менять углы бесконечного многоугольника при его вершинах, из которых исходят бесконечные стороны, оставляя неизменной только сумму этих углов, то мы будем получать изометричные развёртки*). Поэтому представляется более удобным склеить бесконечные стороны; тогда бесконечный многоугольник превратится в фигуру, гомеоморфную бесконечному конусу с исключённой окрестностью вершины; эту фигуру мы назовём «воронкой». Воронка вполне определяется заданием её сторон и углов, потому что, разрезая воронку по какому-нибудь лучу, получаем опеределённый бесконечный многоугольник.

Таким образом, мы будем рассматривать комплекс K, гомеоморфный плоскости и составленный из топологических треугольников и одной топологической воронки. Превращение этого комплекса в развёртку сводится к заданию 1) k длин его рёбер, т. е. сторон треугольников $r_1, \ldots, r$, и 2) n углов воронки $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что составляет всего $k+n$ переменных. Если развёртка R — положительной кривизны, т. е. суммы углов во всех вершинах $< 2\pi$, то при малых изменениях переменных r_i и α_j это условие не нарушается. Вместе с тем малые изменения этих переменных могут быть произвольными. Для длин рёбер это очевидно. Для изменения угла α_j проведём из соответствующей вершины воронки какой-либо луч и разрежем по нему воронку. К обеим сторонам разреза можно подклеить стороны любого плоского угла, откуда ясно, что углы допускают любые приращения. Если разрезанную воронку развернуть на плоскость, то получим бесконечный многоугольник (не исключая, конечно, что он может перекрываться сам с собой). Бесконечные стороны его не параллельны, так как иначе кривизна развёртки равнялась бы 2π. Поэтому можно от этого многоугольника отрезать бесконечный угловой сектор и тем самым уменьшить угол α_j воронки. Таким образом, множество всех развёрток R положительной кривизны и данного строения K естественно оказывается $(k+n)$-мерным многообразием M.



Черт. 100.

6. Однако к заданию развёртки мы должны присоединить ещё задание многогранного угла V, который должен служить предельным углом соответствующего многогранника. Мы будем рассматривать все возможные выпуклые многогранные углы с данным числом h рёбер, имея в виду действительные рёбра, т. е. рёбра, двугранные углы при которых $< \pi$. При заданной вершине такой угол определяется направлениями его рёбер, т. е. $2h$ переменными, а если исключить вращение

*) Это очевидно из черт. 100. Изменение углов при вершинах A и A' с сохранением их суммы сводится к тому, что угол между a' и a_1' отрезается и прикладывается к стороне a; получаем вместо многоугольника с бесконечными сторонами a, a' многоугольник со сторонами a_1, a_1'.

всего угла как целого вокруг вершины, то остаётся всего $2h-3$ переменных. Наконец, с данной развёрткой мы должны связывать многогранный угол, имеющий ту же кривизну ω. Этим исключается ещё одно переменное и остаётся $2h-4$ переменных. Таким образом, мы получаем $(2h-4)$-мерное многообразие V выпуклых многогранных углов с данной кривизной ω.

Далее, в развёртке R мы должны задать направление обхода её воронки, а на угле V — направление обхода вокруг вершины.

Какому-нибудь лучу L в развёртке R мы должны сопоставить образующую $\overline{L}$ многогранного угла V, которая должна быть предельной образующей для соответствующего луча на многограннике P, склеенном из развёртки R. Но, во-первых, задания лучей L, параллельных между собой, очевидно, равносильны, а во-вторых, задание луча L и образующей $\overline{L}$ эквивалентно заданию любых других луча L_1 и образующей $\overline{L}_1$, если только углы между L и L_1, $\overline{L}$ и $\overline{L}_1$ равны, считая, конечно, углы в направлении отсчёта, заданного ориентацией развёртки R и угла V. Поэтому можно говорить просто об установлении соответствия направлений лучей в развёртке R и на угле V; когда луч L задан, мы имеем возможность выбрать любую образующую $\overline{L}$, а их имеется однопараметрическое семейство. Поэтому произвол в задании соответствия направлений в развёртке R и на угле V приводит к ещё одному переменному параметру.

Таким образом, мы должны рассматривать многообразие ориентированных развёрток R и углов V с данными соответствиями направлений. Это многообразие мы обозначим MV; число его измерений равно, как мы показали,

$$(k+n)+(2h-4)+1=k+n+2h-3. \tag{1}$$

7. Пусть R_0 и V_0 — данные развёртка и угол с той же кривизной. Пусть L и $\overline{L}$ — соответствующие лучи в развёртке R_0 и на угле V_0. Мы имеем, таким образом, «точку» (R_0, V_0) нашего многообразия MV. Не ограничивая общности, можно считать, что луч L исходит из некоторой вершины A воронки развёртки R_0. Разрезав воронку по этому лучу, будем вклеивать в полученный разрез секторы S с непрерывно увеличивающимися углами до тех пор, пока развёртка R_0 не превратится в развёртку R_1, у которой сумма углов в вершине A равна 2π. Кривизна развёртки уменьшится при этом на величину $2\pi-\theta$, где θ — сумма углов вокруг вершины A в исходной развёртке R_0. Но она не станет равной нулю, так как по условию число вершин развёртки R_0 больше единицы.

Вместе с таким изменением развёртки R можно непрерывно изменять угол V так, чтобы его кривизна каждый раз равнялась кривизне развёртки. Для этого достаточно, например, непрерывно увеличивать его плоские углы в одно и то же число раз. Так мы придём к углу V_1

с той же кривизной, что и развёртка R_1. Соответствие лучей L и $\bar{L}$ можно сохранить: за луч L можно брать каждый раз одну из сторон разреза, сделанного в исходной развёртке R_0, а за луч $\bar{L}$ — любую из образующих на изменяемом угле V, лишь бы она менялась непрерывно.

Таким образом, от любой точки (R_0, V_0) многообразия MV можно дойти до точки (R_1, V_1), «лежащей на его границе», причём в развёртке R_1 угол только при данной вершине воронки будет равен 2π и поэтому вблизи точки (R_1, V_1) не будет точек из других связных компонент многообразия MV помимо связной компоненты, содержащей данную точку (R_1, V_1). Для доказательства изобразим «точки» (R, V), близкие к (R_1, V_1), точками в $(k+n+2h-3)$-мерном пространстве, где одна из координат есть угол α воронки при вершине A, причём рассматриваются все развёртки R, а не только развёртки положительной кривизны. Граница многообразия MV изобразится уравнением $\alpha+\sum_i \varphi_i=2\pi$, где φ_i — остальные углы, сходящиеся в вершине A. Эта поверхность разбивает окрестность точки (R_1, V_1) на две части: в одной $\alpha>2\pi-\sum \varphi_i$, в другой $\alpha<2\pi-\sum \varphi_i$. Если точки (R', V'), (R'', V'') лежат по одну сторону, то их можно соединить в данной окрестности непрерывным путём, проходящим целиком с той же стороны от поверхности $\alpha+\sum_i \varphi_i=2\pi$. Если окрестность мала, то суммы углов при всех вершинах, кроме вершины A, остаются меньше 2π, и условия, ограничивающие переменные, задающие выпуклый многогранный угол, также не нарушаются. Поэтому указанный путь лежит в многообразии MV, а это означает, что все точки этого многообразия, близкие к (R_1, V_1), принадлежат одной связной компоненте.

Развёртку R_1 можно заменить развёрткой, не содержащей более лишней вершины A. По предположению индукции теорема верна для развёрток с меньшим числом вершин. Поэтому из развёртки R_1 можно склеить выпуклый многогранник P_1 с данным предельным углом V. Вершине A соответствует на многограннике P_1 точка, лежащая внутри грани или ребра. Выдвинем её наружу на достаточно малое расстояние и построим многогранник P с этой выдвинутой вершиной, а также со всеми вершинами многогранника P_1 и с тем же предельным углом V. Легко показать, что многогранник P, достаточно близкий к P_1, допускает развёртку R, близкую к R_1 (это доказывается так же, как лемма 1 § 2). Но развёртки, близкие к R_1, соответствуют «точкам» (R, V) из данной связной компоненты многообразия MV. Следовательно, во всякой связной компоненте этого многообразия имеются «реализуемые точки» (R, V), т. е. развёртки R, из которых можно склеить многогранники с углом V.

8. Теперь рассмотрим множество всех бесконечных выпуклых многогранников, которые можно склеить из развёрток строения K и имеющих предельные углы с h рёбрами. На каждом таком многограннике мы начерчиваем его развёртку и получаем «K-триангулированный» многогранник P. Вместе с K-триангуляцией на многогранник P переносится ориентация его развёртки, так что речь идёт об ориентированном K-триангулированном многограннике. Два K-триангулированных многогранника считаются равными, если их можно привести в совпадение вместе с их K-триангуляциями путём движения или движения и отражения. Равные K-триангулированные многогранники мы просто не будем различать.

Бесконечный выпуклый многогранник P определяется заданием его вершин и предельного угла, причём предельный угол задаётся с точностью до переноса. Если у многогранника e вершин, то это даёт $3e$ их переменных координат; если предельный угол имеет h рёбер, то это даёт $2h$ переменных, определяющих их направления; но так как многогранники рассматриваются с точностью до движения (и отражения), то 6 переменных следует исключить и остаётся всего $3e+2h-6$ переменных, определяющих многогранник P.

Множество всех K-триангулированных многогранников P с h-гранными предельными углами мы превращаем в многообразие $\boldsymbol{P}$, вводя следующее определение окрестностей: *окрестность многогранника P_0 состоит из всех многогранников P, близких к P_0 вместе с их K-триангуляциями.*

Близость многогранников P определяется близостью их вершин и направлений рёбер предельных углов. *Всякий многогранник P, близкий к данному P_0, допускает единственную K-триангуляцию, близкую к K-триангуляции многогранника P_0.* Это доказывается теми же очевидными рассуждениями, какими аналогичное утверждение доказано в § 2 для замкнутых многогранников (лемма 1 § 2). При этом из близости длин рёбер K-триангуляций близких многогранников очевидно уже следует близость углов их воронок. Таким образом, мало меняя все $3e+2h-6$ переменных, мы будем получать K-триангулированные многогранники, близкие к данному вместе с их K-триангуляциями. Все эти многогранники будут различны также и в том случае, когда многогранник P_0 вырождается в дважды покрытый многоугольник. Какие-нибудь два таких многогранника могли бы быть равны, если бы были симметричны относительно его плоскости. Но в таком случае их ориентации, очевидно, противоположные и, следовательно, с учётом ориентации они не равны *).

Следовательно, $\boldsymbol{P}$ есть действительно многообразие с числом измерений $3e+2h-6$.

---

*) Ориентация переносится с многогранника P_0 на близкие очевидным путём, и, в частности, если P_0 вырождается, то нужно помнить о наличии у него двух сторон, которым соответствуют стороны близких ему многогранников. Впрочем, так же, как в случае замкнутых многогранников, можно обойтись без ориентации.

9. Каждому многограннику из $\boldsymbol{P}$ однозначно соответствуют 1) его развёртка, являющаяся его K-триангуляцией, 2) его предельный угол V, 3) соответствие направлений его лучей и образующих угла V, устанавливаемое при бесконечном сжатии многогранника в угол V.

Этим самым устанавливается однозначное отображение многообразия $\boldsymbol{P}_k$ в многообразие $\boldsymbol{MV}$, и для того, чтобы доказать нашу теорему, достаточно показать, что все условия леммы об отображении здесь выполнены.

Покажем прежде всего, что размерности многообразий $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{MV}$ равны. Пусть f, k, e — числа треугольников, рёбер и вершин комплекса K. По формуле Эйлера

$$f-k+e=1. \tag{2}$$

Комплекс K имеет воронку с n сторонами, с которыми отождествлены n сторон его треугольников; остальные их стороны отождествлены друг с другом попарно. Поэтому

$$3f=2k-n. \tag{3}$$

Из формул (2) и (3) следует, что

$$k+n=3e-3.$$

Поэтому для числа измерений многообразия $\boldsymbol{MV}$ (формула (1)) получаем:

$$k+n+2h-3=3e+2h-6,$$

т. е. оно равно числу измерений многообразия $\boldsymbol{P}$.

Мы уже показали, что во всякой связной компоненте многообразия $\boldsymbol{MV}$ содержатся образы точек из $\boldsymbol{P}$. Прочие свойства отображения φ устанавливаются совершенно аналогично тому, как это сделано в § 3 для случая замкнутых многогранников. Непрерывность его содержится в самом определении окрестностей в многообразии $\boldsymbol{P}$. Взаимная однозначность следует из теоремы 3 § 4 главы III, согласно которой два изометричных многогранника с равными предельными углами и одинаковым соответствием направлений лучей и образующих их предельных углов равны.

Наконец, последнее нужное нам свойство отображения φ получается из леммы, совершенно аналогичной лемме 1 § 2. Изменения в формулировке её и дополнения в доказательстве, связанные с тем, что кроме длин рёбер развёртку задают ещё углы воронки, столь очевидны, что нет надобности их оговаривать.

Следовательно, все условия леммы об отображении выполнены, и тем самым наша теорема доказана.

10. Тот же метод приложим к доказательству существования бесконечного выпуклого многогранника с данной развёрткой, имеющей кривизну 2π. Здесь мы должны рассматривать только развёртки с кривизной 2π; у них воронка превращается в «трубку», потому что бесконечные многоугольники такой развёртки имеют параллельные стороны. Прежним рассуждением можно исключить из развёртки лишние вершины с суммами углов, равными 2π. Развёртка данного строения K будет определяться теперь k длинами рёбер и n углами трубки, причём эти углы связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n\pi.$$

Следовательно, мы получаем $(k+n-1)$-мерное многообразие M развёрток данного строения и положительной кривизны. Здесь развёрток с одной вершиной не может быть, потому что кривизна одной вершины $< 2\pi$. Развёртки же только с двумя вершинами, очевидно, реализуются дважды покрытыми плоскими полосами. Поэтому существование многогранника с данной развёрткой можно опять доказывать индукцией по числу вершин.

Многообразие P K-триангулированных многогранников определяется здесь так же, как и раньше. Число переменных, задающих многогранник, будет $3e$ координат вершин плюс 2 переменные, задающие направление его предельной полупрямой, минус 6 переменных, связанных с движением многогранника как целого. Итого многообразие P будет $(3e-4)$-мерным.

Применение формулы Эйлера $f-k+e=1$ приводит к соотношению

$$3e-4=k+n-1,$$

т. е. многообразия M и P имеют одинаковую размерность.

Далее определяется естественное отображение φ многообразия P в M. Его взаимная однозначность следует из единственности многогранника с данной развёрткой, имеющей кривизну 2π (теорема 2 § 3 гл. III). Остальные свойства отображения φ, необходимые для применения леммы об отображении, доказываются аналогично тому, как это делается для случая замкнутых многогранников. В результате все требования леммы об отображении оказываются выполненными, и мы заключаем о существовании многогранника с любой развёрткой, имеющей кривизну 2π.

ГЛАВА V

СКЛЕИВАНИЕ И ИЗГИБАНИЕ МНОГОГРАННИКОВ С ГРАНИЦЕЙ

§ 1. Склеивание многогранников с границей

1. В главе IV речь шла о развёртках, в которых стороны многоугольников склеиваются попарно, так что развёртка не имеет границы. Если же у многоугольников развёртки есть стороны, не склеиваемые ни с какими другими сторонами, то развёртка имеет границу, и такие свободные стороны её многоугольников мы называем *граничными рёбрами* развёртки.

Представляя себе склеиваемые стороны и вершины отождествлёнными, мы естественно приходим к тому, что граница развёртки состоит из конечного числа замкнутых ломаных, образуемых её граничными рёбрами; а если развёртка включает бесконечные многоугольники, то её граница может содержать также бесконечные ломаные, каждая из которых слагается из конечного числа конечных и двух бесконечных граничных рёбер; в частности, конечные граничные рёбра могут отсутствовать. Многогранник, который можно склеить из такой развёртки, будет иметь соответствующую границу.

Вопрос об условиях, при которых из данной развёртки с границей можно склеить выпуклый многогранник, мы не можем решить полностью, а потому вынуждены ограничиться общими указаниями и отдельными, более или менее специальными результатами. Дальше будут также даны простые примеры развёрток, из которых нельзя склеить никакого выпуклого многогранника, хотя они и удовлетворяют некоторым очевидно необходимым условиям.

Подход к решению поставленного вопроса даёт следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть граница развёртки R состоит из замкнутых или бесконечных ломаных $L_1, \ldots, L_n$. Для того чтобы из развёртки R можно было склеить выпуклый многогранник, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие развёртки $R_1, \ldots, R_n$, ограниченные каждая одной ломаной, что отождествление их границ с ломаными $L_1, \ldots, L_n$ давало бы развёртку $R + R_1 + \ldots + R_n$, из которой можно склеить выпуклый многогранник.* Развёртка $R + R_1 + \ldots + R_n$ уже не имеет границы, и потому вопрос об условиях, при которых из неё можно склеить выпуклый многогранник, решается теоремами, доказанными в §§ 1—4 главы IV.

Доказательство совершенно очевидно. Если такие развёртки $R_1, \ldots, R_n$ имеются, то, склеивая из развёртки $R+R_1+R_2+\ldots$ $\ldots+R_n$ выпуклый многогранник и выделяя из него часть, соответствующую данной развёртке R, получим выпуклый многогранник с развёрткой R. Следовательно, условие достаточно.

С другой стороны, пусть из развёртки R склеивается выпуклый многогранник P. По самому определению он есть часть полного выпуклого многогранника $\overline{P}$ без границы, замкнутого или бесконечного. Тогда разность $\overline{P}-P$ с присоединённой её границей представляет собой один или несколько выпуклых многогранников $P_1, \ldots, P_n$. Их развёртки $R_1, \ldots, R_n$ вместе с R образуют развёртку $R+R_1+\ldots$ $\ldots+R_n$ полного многогранника $\overline{P}$, и тем самым необходимость условия доказана.

Теорема 1 сводит вопрос о возможности склеить выпуклый многогранник из развёртки с границей к вопросу о подборе соответствующих развёрток $R_1, \ldots, R_n$. В некоторых случаях такой подбор удаётся осуществить. Для того чтобы он был возможен, развёртка R должна удовлетворять трём заведомо необходимым условиям:

1) Развёртка R должна быть гомеоморфна плоскому многоугольнику, конечному или бесконечному, но ограниченному, вообще говоря, несколькими ломаными *).

2) Суммы углов вокруг всех, как внутренних, так и граничных, вершин развёртки R должны быть $\leqslant 2\pi$.

3) Кривизна развёртки R (т. е. сумма кривизн её внутренних вершин) должна быть $\leqslant 4\pi$, если развёртка конечна, и $\leqslant 2\pi$, если она бесконечна.

Необходимость этих условий очевидна, потому что такими свойствами обладает всякий выпуклый многогранник с границей. Бесконечный полный многогранник $\overline{P}$ гомеоморфен плоскости и имеет кривизну $\leqslant 2\pi$; поэтому многогранник P, являющийся частью $\overline{P}$, гомеоморфен многоугольнику и имеет кривизну $\leqslant 2\pi$. Замкнутый многогранник $\overline{P}$ гомеоморфен сфере и имеет кривизну 4π; но сферу с одной исключённой точкой можно отобразить на плоскость, а потому мно-

---

*) То же условие можно выразить иначе, не привлекая понятия гомеоморфизма. А именно, если f, k, e — числа многоугольников, ребёр и вершин развёртки R, а n — число ограничивающих её ломаных, то в случае конечной развёртки должно быть $f-k+e=2-n$, в случае же бесконечной развёртки должно быть $f-k+e=1-n$. Для доказательства эквивалентности обоих условий достаточно заметить, что, подклеивая к каждой ломаной, ограничивающей данную развёртку, многоугольник, ограниченный одной ломаной, получим развёртку $\overline{R}$ без границы, у которой соответственно будет $f-k+e=2$ и $f-k+e=1$, так что $\overline{R}$ будет гомеоморфна соответственно сфере или плоскости.

гогранник P, являющийся частью $\overline{P}$, будет гомеоморфен плоскому многоугольнику, кривизна же его не более, чем у $\overline{P}$, т. е. $\leqslant 4\pi$. В свою очередь, каждая подклеиваемая к R развёртка R_i должна обладать теми же свойствами 2), 3) и быть гомеоморфной многоугольнику, ограниченному одной замкнутой или бесконечной ломаной.

Условие теоремы 1 сводится в результате к тому, что суммы углов в отождествляемых точках границ развёрток R и R_i должны быть не больше 2π. Так как для каждой ломаной L_i, входящей в границу развёртки R, и для соответствующей развёртки R_i это условие должно выполняться независимо, то основным оказывается вопрос о склеивании многогранника из развёртки, ограниченной одной ломаной. Такая развёртка гомеоморфна кругу или полуплоскости в зависимости от того, является ли она конечной или бесконечной.

2. Здесь и дальше излагаются результаты, получающиеся «методом склеивания», основанным на теореме 1. При этом без особых оговорок будет иметься в виду, что *речь идёт о развёртках, удовлетворяющих указанным выше условиям* 1), 2) *и* 3).

Под углом при граничной вершине развёртки мы будем понимать сумму углов её многоугольников при этой вершине; говоря так, удобно представлять себе развёртку склеенной хотя бы абстрактно.

Напомним, что «*шапкой*» называется такой выпуклый многогранник, ограниченный плоской замкнутой ломаной, проекция которого на плоскость этой ломаной совпадает с многоугольником, ограничиваемым этой ломаной.

Теорема 2. *Для того чтобы из гомеоморфной кругу развёртки R можно было склеить шапку, необходимо и достаточно, чтобы углы при каждой её граничной вершине не превосходили* π.

Докажем необходимость этого условия. Пусть P — шапка; присоединяя к ней шапку P_1, симметричную относительно плоскости, ограничивающей её ломаной, получим замкнутый выпуклый многогранник $P+P_1$ (как на черт. 97, *а*, стр. 202). Граничные вершины шапки будут либо его вершинами, либо точками внутри рёбер. Суммы углов вокруг них будут $\leqslant 2\pi$. Но каждая из них слагается из углов на P и P_1, и так как по симметрии P и P_1 эти углы равны, то сумма углов при каждой граничной вершине шапки P не превосходит π.

Пусть теперь R — развёртка, удовлетворяющая условиям теоремы, и R_1 — второй экземпляр такой же развёртки. Отождествляя соответственные элементы границ этих развёрток, получим развёртку $R+R_1$, гомеоморфную сфере, и так как суммы углов при граничных вершинах у R и R_1 не превосходят π, то вокруг всех вершин развёртки $R+R_1$ суммы углов будут $\leqslant 2\pi$. Поэтому из этой развёртки можно склеить замкнутый выпуклый многогранник $\overline{P}$, состоящий из двух частей P и P_1, соответствующих развёрткам R и R_1.

Согласно лемме § 4 главы IV многогранник $\overline{P}$ симметричен относительно плоскости, содержащей общую границу его частей P и P_1.

Отсюда ясно, что P есть шапка. Она склеена из развёртки R, и теорема таким образом доказана.

Напомним, что согласно теореме 3 § 5 главы III *шапка с данной развёрткой — единственная с точностью до движения и отражения, так что из развёртки R можно склеить по существу только одну шапку либо ей симметричную.*

Если бесконечной шапкой назвать бесконечный выпуклый многогранник, граница которого состоит из одной бесконечной плоской ломаной, также проектирующийся в многоугольник, ограниченный этой ломаной, то можно формулировать следующую теорему:

Теорема 3. *Для того чтобы из развёртки R, гомеоморфной полуплоскости, можно было склеить бесконечную шапку, необходимо и достаточно, чтобы углы при её граничных вершинах не превосходили* π.

Доказательство почти буквально повторяет доказательство теоремы 2. Некоторое различие возникает в последнем его пункте, где приходится ссылаться на единственность многогранника $P + P_1$ с данной развёрткой $R + R_1$. Если кривизна этой развёртки меньше 2π, то, как мы знаем, такой многогранник не будет единственным. Как доказано в § 5 главы IV, его предельный угол можно выбирать произвольно, лишь бы кривизна этого угла равнялась кривизне многогранника. Поэтому предельный угол многогранника $P + P_1$ можно выбирать заранее так, чтобы его части V и V_1, соответствующие частям P и P_1 многогранника, были взаимно симметричными. Тогда при перестановке P и P_1 получим отображение многогранника $P + P_1$, оставляющее неизменным его предельный угол $V + V_1$ и также его образующие, соответствующие общим бесконечным рёбрам у P и P_1. Поэтому в силу теоремы 3 § 4 главы III перестановка P и P_1 должна осуществляться отражением; а отсюда немедленно вытекает, что P есть бесконечная шапка.

Единственность бесконечной шапки с данной развёрткой, вообще говоря, не имеет места. Решение вопроса о том, когда единственность всё же имеется, или о дополнительных данных, полностью определяющих бесконечную шапку, мы оставляем читателю; оно может быть легко получено на основании теорем о бесконечных многогранниках (§§ 3, 4 гл. III и § 5 гл. IV).

Теоремы 2 и 3 полностью характеризуют развёртки шапок условием об углах при граничных вершинах. Укажем ещё другую характеризацию этих развёрток:

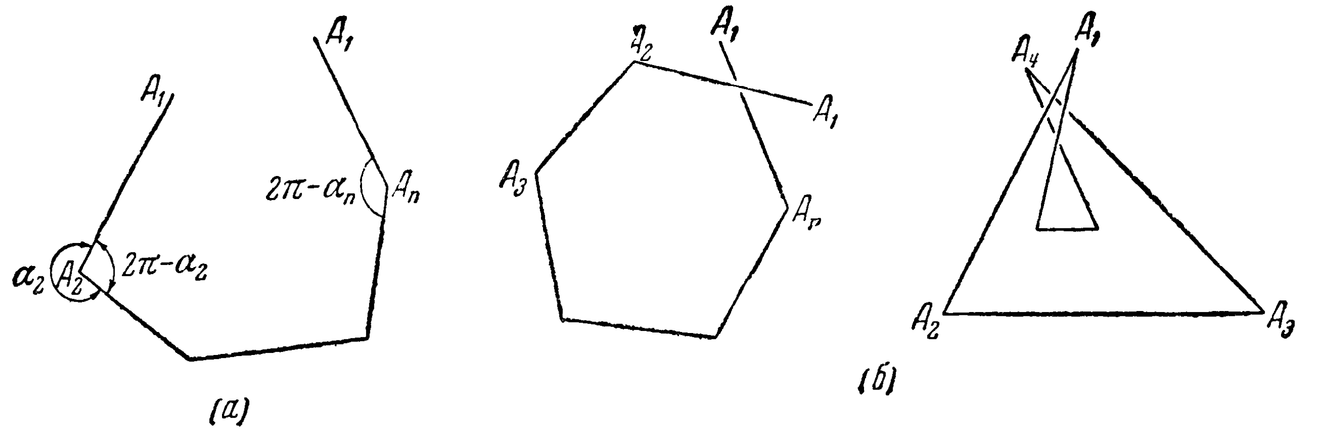
Теорема 4. *Для того чтобы углы развёртки при граничных вершинах не превосходили* π, *необходимо и достаточно, чтобы каждые две внутренние точки развёртки соединялись в ней кратчайшей линией, проходящей целиком внутри развёртки.* (Можно сказать, что такая развёртка «выпукла в себе».)

Здесь удобно представлять себе развёртку склеенной хотя бы абстрактно. Кратчайшая линия, соединяющая внутренние точки в развёртке, может подходить к границе развёртки только в тех вершинах, где угол $>\pi$: иначе её можно было бы заменить линией более короткой, срезая образуемый ею угол (теорема 1 § 8 гл. I, черт. 53). Отсюда и следует теорема 4.

В связи с теоремами 2—4 предложим следующую задачу. Развёртка, у которой все углы на границе не превосходят π, может и не быть гомеоморфной кругу или полуплоскости. Ограничиваясь развёртками, гомеоморфными части плоскости, доказать, что такими могут быть только развёртки боковых поверхностей прямых, замкнутых или открытых, призм; во втором случае (открытой призмы) развёртка изометрична плоской полосе между парой параллельных прямых.

3. В этом пункте и дальше в пунктах 5—7 мы дадим некоторые достаточные критерии склеиваемости выпуклого многогранника из данной развёртки, которые в определённых случаях оказываются также необходимыми. Критерии эти таковы, что для каждой данной развёртки легко непосредственно проверить, выполняются они или нет. Основаны они на следующем построении.

Пусть развёртка R ограничена одной замкнутой ломаной L с вершинами $A_1, \ldots, A_n$ и углами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Построим на плоскости



Черт. 101.

ломаную L^0, звенья которой последовательно равны по длине рёбрам $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, а углы между звеньями с одной стороны равны $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (черт. 101). С противоположной стороны углы будут $\beta_i = 2\pi - \alpha_i$. Эту сторону мы назовём «внешней стороной» ломаной L^0, потому что она соответствует внешней стороне ломаной L относительно развёртки R. (На черт. 101, *а* эта «внешняя сторона» ломаной L^0 обращена не к бесконечной части плоскости.) Вообще говоря, ломаная L^0 не будет замкнутой; её концы соответствуют одной вершине A_1 ломаной L. Однако не исключено, что ломаная L^0 может быть замкнутой или что она сама себя пересекает (черт. 101, *б*). Указанное построение ломаной L^0 естественно назвать *разворачиванием ломаной L*, разорванной в вершине A_1. Совершенно так же можно разворачивать ломаную L, разорванную в любой её точке A.

Если развёртка R ограничена бесконечной ломаной, то разворачивание этой ломаной определяется совершенно аналогично, только разрывать её не приходится, поскольку она не замкнута.

Теорема 5. *Для того чтобы из конечной развёртки R, ограниченной ломаными $L_1, \ldots, L_n$, склеивался выпуклый многогранник с кривизной 4π, необходимо и достаточно, чтобы развёрнутые ломаные $L_1^0, \ldots, L_n^0$ оказывались замкнутыми и ограничивали на плоскости многоугольники $Q_1, \ldots, Q_n$, лежащие с «внешних» сторон этих ломаных.*

(Под многоугольником мы понимаем развёртку, не имеющую внутренних вершин. Последовательно разворачивая на плоскость составляющие её треугольники, мы развернём на плоскость и всю развёртку. При этом возможно, что она будет перекрываться сама с собой. Следовательно, мы понимаем «многоугольник» в таком обобщённом смысле, допуская перекрывания его самого с собой.)

Доказательство теоремы 5 очевидно. Действительно, пусть условие теоремы выполнено. Тогда, подклеивая к развёртке R многоугольники Q_i, получим развёртку $\overline{R} = R + Q_1 + \ldots + Q_n$, гомеоморфную сфере. Углы многоугольников Q_i дополняют углы развёртки R до 2π, так что, во-первых, условие о суммах углов выполнено, и из развёртки $\overline{R}$ можно склеить замкнутый выпуклый многогранник $\overline{P}$. Во-вторых, это показывает, что никакая точка многогранника $\overline{P}$, соответствующая точкам внутри или на границе многоугольников Q_i, не может быть его вершиной: иначе сумма углов вокруг неё была бы $< 2\pi$. Следовательно, все вершины лежат внутри той части P многогранника $\overline{P}$, которая соответствует исходной развёртке R. Поэтому кривизна P равна кривизне $\overline{P}$, т. е. равна 4π. Этим достаточность условия теоремы доказана.

Для доказательства необходимости допустим, что из развёртки R склеен выпуклый многогранник P с кривизной 4π. Он есть часть замкнутого выпуклого многогранника $\overline{P}$, и так как кривизна многогранника $\overline{P}$ равна 4π, то $\overline{P}$ не имеет других вершин помимо внутренних вершин многогранника P. Следовательно, дополнение P на $\overline{P}$ состоит из кусков Q_i, разворачиваемых на плоскость. Суммы углов при общих вершинах многогранника P и многогранников Q_i равны 2π, так как они не являются вершинами многогранника $\overline{P}$. А это как раз и означает, что углы β многоугольников Q_i дополняют углы α на P до 2π, т. е. границы многоугольников Q_i получаются разворачиванием ломаных, ограничивающих P*).

*) Исключительный случай получается, если некоторые ломаные L_i, ограничивающие P, имеют общие вершины. Тогда их можно считать за одну ломаную, и соответствующий многоугольник Q будет составляться из многоугольников Q_i. Строго говоря, этот случай нужно было бы особо оговорить в условиях теоремы.

Напомним, что согласно теореме 1 § 5 главы III выпуклый многогранник с кривизной 4π определяется своей развёрткой однозначно с точностью до движения и отражения. Поэтому *в условиях теоремы* 5 *из развёртки* R *склеивается по существу единственный многогранник* (*либо ему симметричный*).

Теорема 6. *Для того чтобы из бесконечной развёртки* R, *ограниченной ломаными* $L_1, L_2, \ldots, L_n$, *склеивался выпуклый многогранник, достаточно, а если кривизна развёртки равна* 2π — *то и необходимо, чтобы развёрнутые ломаные* $L_1^0, \ldots, L_n^0$ *оказывались замкнутыми и ограничивали многоугольники, лежащие с «внешних» сторон этих ломаных.*

Доказательство по существу не отличается от доказательства теоремы 5. Если кривизна развёртки равна 2π, то соответствующее утверждение единственности также верно в силу теоремы 2 § 5 главы III.

Когда развёртка R задана, то разворачивание ограничивающих её ломаных на плоскость не представляет труда, а потому выполнение условий теорем 5 и 6 всегда легко проверяется.

4. Общая теорема 1, лежащая в основании предыдущих выводов, допускает уточнение, которое оказывается особенно полезным при исследовании изгибаний выпуклых многогранников, чему будет посвящён следующий параграф.

Теорема 7. *Для того чтобы из развёртки* R, *ограниченной ломаными* $L_1, \ldots, L_n$, *можно было склеить выпуклый многогранник, необходимо и достаточно, чтобы существовали плоские, может быть, самоперекрывающиеся, многоугольники* $Q_1, \ldots, Q_n$, *стороны которых равны соответственно звеньям ломаных* $L_1, \ldots, L_n$, *а углы не превосходят дополнений углов при соответственных вершинах этих ломаных. При этом на ломаных* L_i *допускается введение любого числа дополнительных вершин. Ломаные* L_i *и соответственно многоугольники* Q_i *могут быть и бесконечными.* (Согласно принятому выше условию подразумевается, что развёртка R гомеоморфна плоскому многоугольнику и суммы углов вокруг её вершин $\leqslant 2\pi$.)

Достаточность условия очевидна, потому что, отождествляя звенья ломаных L_i со сторонами многоугольников Q_i, получим развёртку, у которой вследствие условия, наложенного на углы многоугольников Q_i, суммы углов вокруг всех вершин будут $\leqslant 2\pi$. Эта развёртка $\overline{R}$ не имеет границы и из неё можно склеить выпуклый многогранник*),

*) Это нам известно, если $\overline{R}$ гомеоморфна сфере или плоскости. Если развёртка R и многоугольники Q_i конечны, то развёртка $\overline{R} = R + Q_1 + \ldots + Q_n$ гомеоморфна сфере. Если же R бесконечна или среди многоугольников Q_i имеются бесконечные, то, как можно показать, развёртка $\overline{R}$ необходимо гомеоморфна плоскости, кроме того случая, когда она представляет собой развёртку бесконечной призмы. Это замечание оставляем без доказательства.

а вместе с тем и из данной развёртки R склеится выпуклый многогранник.

Для доказательства необходимости допустим, что из развёртки R склеен выпуклый многогранник P. Пусть $\overline{P}$ — граница его выпуклой оболочки; $\overline{P}$ есть замкнутый или бесконечный многогранник без границы, частью которого является P. Так как выпуклая оболочка полностью определяется одними вершинами, то на дополнении $\overline{P}-P$ нет никаких вершин: все они лежат внутри или на границе многогранника P. $\overline{P}-P$ распадается на части $Q_1, \ldots, Q_n$ соответственно каждой ломаной $L_1, \ldots, L_n$, ограничивающей развёртку R, и так как эти Q_i не содержат вершин внутри, то все они разворачиваются на плоскость.

Если A — какая-либо вершина на границе многогранника P, а α и β — углы при ней на P и на соответствующем многоугольнике Q_i, то по основному свойству сумм углов вокруг вершин $\alpha+\beta \leqslant 2\pi$. Следовательно, развёрнутые на плоскость Q_i представляют собой многоугольники со сторонами, равными звеньям ломаных L_i, и с углами $\beta \leqslant 2\pi-\alpha$, что и требовалось доказать.

Теорема 7 сводит вопрос о склеивании многогранника из развёртки к планиметрической задаче о существовании многоугольника с данными сторонами и с углами, определённым образом ограниченными сверху. Однако мы не имеем никакого решения этой задачи, не считая частных случаев, уже заключающихся в доказанных выше теоремах. Задача представляется достаточно интересной, но, повидимому, столь же трудной. Во всяком случае теорема 7 почти ничего не даёт для решения вопроса об условиях склеивания многогранника из данной развёртки. Речь идёт, конечно, об условиях, допускающих достаточно эффективную проверку путём построения или вычислений с вещественными числами.

Отметим только один результат, который читатель сам сможет получить, пользуясь теоремой 7. Пусть развёртка R ограничена замкнутыми ломаными L_i. Пусть все её углы $\leqslant \pi$, кроме, может быть, двух α_i, β_i для каждой ломаной L_i, причём вершины A_i, B_i этих углов делят соответствующую ломаную L_i на части равной длины. Тогда из развёртки R можно склеить выпуклый многогранник.

5. Теорема 8. *Пусть R — конечная или бесконечная развёртка, ограниченная замкнутыми ломаными $L_1, \ldots, L_m$. Пусть $L_1^0, \ldots, L_m^0$ — ломаные, полученные разворачиванием ломаных L_k, разрезанных в произвольных вершинах A_k, углы при которых обозначим δ_k. Для того чтобы из развёртки R можно было склеить выпуклый многогранник, достаточно, а если все углы на её границе $\geqslant \pi$ и у каждой ломаной L_k хотя бы один угол $> \pi$, — то и необходимо выполнение для каждой ломаной L_k следующих условий:*

A) *Ломаная L_k^0 вместе с отрезком $A_k' A_k''$, соединяющим её концы, ограничивает, быть может, перекрывающийся сам с собой многоугольник Q, лежащий с «внешней» стороны от L_k^0.*

B) *На отрезке $A_k' A_k''$, как на основании, можно построить равнобедренный треугольник T, содержащийся в Q, так, что углы γ_1, γ_2 многоугольника*

$Q-T$ при концах отрезка a удовлетворяют неравенству $\gamma_1+\gamma_2\leqslant 2\pi-\delta_k$ (черт. 102, *а*).

Если ломаная L_k^0 оказывается замкнутой и отрезок $A_k' A_k''$ тем самым исчезает, то условия А), В) сводятся к тому, что А) ломаная L_k^0 ограничивает многоугольник Q, лежащий с внешней стороны от неё, и В) угол γ этого многоугольника при вершине, соответствующей совпавшим концам ломаной L^0 (т. е. соответствующей вершине A_k ломаной L_k), должен быть $\leqslant 2\pi-\delta_k$ (черт. 102, *б*).

Для простоты фиксируем своё внимание на случае развёртки, ограниченной одной замкнутой ломаной L. Пусть вершины её будут $A_1,\dots,A_n$, углы — $\alpha_1,\dots,\alpha_n$; при разворачивании L разрывается в вершине A_1. Допустим, что условия теоремы выполнены. По самому построению ломаной L^0 её углы с внешней стороны будут

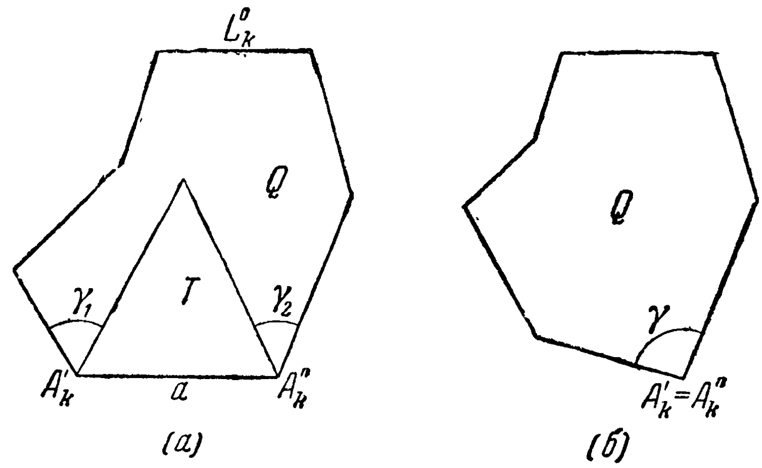
$$\beta_2=2\pi-\alpha_2,\ \dots,\quad \beta_n=2\pi-\alpha_n. \tag{1}$$

Если ломаная L^0 не замкнута, то имеем многоугольник $Q'=Q-T$ с углами γ_1, γ_2 при вершинах A_1', A_1'', причём по условию

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2\leqslant 2\pi-\alpha_1. \tag{2}$$

Отождествляя друг с другом стороны многоугольника Q', являющиеся боковыми сторонами треугольника T, получим развёртку Q'' с одной внутренней вершиной, угол вокруг которой, очевидно, $<2\pi$.

Вследствие (1) и (2) углы на границе этой развёртки будут $\gamma\leqslant 2\pi-\alpha_1$, $\beta_2=2\pi-\alpha_2,\dots,\beta_n=2\pi-\alpha_n$. Поэтому, отождествляя граничные рёбра этой развёртки, т. е. звенья ломаной L^0, с соответствующими граничными рёбрами развёртки R, получим развёртку $R+Q''$, гомеоморфную сфере и имеющую суммы углов вокруг всех вершин $\leqslant 2\pi$. Из такой развёртки можно склеить выпуклый многогранник, а тем самым и из данной развёртки R склеится выпуклый многогранник.



Черт. 102.

Если ломаная L^0 замкнута, то сам ограниченный ею многоугольник Q принимаем за развёртку Q'', и тогда то же отождествление его сторон с рёбрами развёртки R приводит к нужному результату.

Таким образом, достаточность условий теоремы доказана. Если развёртка ограничена несколькими ломаными, то нужно лишь подклеивать соответствующее число развёрток Q_i''.

Докажем необходимость условия теоремы в предположении, что на границе развёртки R все углы $\geqslant\pi$ и хотя бы один $>\pi$. Пусть из развёртки R склеен выпуклый многогранник P. Он является частью некоторого замкнутого или бесконечного выпуклого многогранника $\overline{P}=P+Q$, где Q — дополнение P до $\overline{P}$ с включённой границей. Q также есть выпуклый многогранник; в дальнейшем рассуждении мы не отличаем Q от какой-нибудь его развёртки.

Если развёртка R ограничена несколькими ломаными, то $\overline{P}-P$ распадается на несколько многогранников и тогда в дальнейшем рассуждении под Q нужно понимать любой из них.

Покажем, что сумма кривизн вершин многогранника $\overline{P}$, лежащих внутри или на границе Q, не превосходит 2π. Эту сумму мы обозначим $\omega(\overline{Q})$ в отличие от кривизны $\omega(Q)$ самого Q, которая есть сумма кривизн его внутренних вершин. ($\omega(\overline{Q})$ есть кривизна замыкания Q на $\overline{P}$.)

Если $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — углы на границе Q, то для $\omega(Q)$ имеем

$$\omega(Q) = 2\pi - \sum_{i=1}^{n}(\pi - \beta_i). \tag{3}$$

Полный угол вокруг i-й вершины на границе слагается из угла β_i на Q и угла α_i на P, или, что то же самое, на развёртке R. Поэтому кривизна такой вершины есть $\omega_i = 2\pi - \alpha_i - \beta_i$, а сумма этих кривизн будет

$$\sum_i \omega_i = \sum_{i=1}^{n}(2\pi - \alpha_i - \beta_i). \tag{4}$$

Складывая (3) и (4), получим для суммы кривизн всех вершин выражение

$$\omega(\overline{Q}) = 2\pi - \sum(\pi - \beta_i) + \sum_i (2\pi - \alpha_i - \beta_i) = 2\pi - \sum_i (\alpha_i - \pi), \tag{5}$$

и так как по условию все углы $\alpha_i \geqslant \pi$ и хотя бы один из них $> \pi$, то

$$\omega(\overline{Q}) < 2\pi. \tag{6}$$

Так как полный угол вокруг всякой вершины выпуклого многогранника P не превосходит 2π, а углы на границе P не меньше π, то у Q все углы, напротив, не больше π. Поэтому согласно теореме 4 каждые две внутренние точки на Q соединимы линией, кратчайшей в Q и проходящей внутри Q.

Пользуясь тем же приёмом «срезания» угла, меньшего π, какой был применён в доказательстве теоремы 4, легко убедиться, что кратчайшая в Q линия AB, соединяющая любые две точки A, B из Q, либо целиком проходит внутри Q (исключая, может быть, её концы, если они лежат на границе), либо совпадает с отрезком границы многогранника Q. Как показано в n° 1 § 8 главы I, кратчайшая, проходящая внутри развёртки, не может проходить через точку, где сумма углов $< 2\pi$. Если же внутренняя точка X кратчайшей AB лежит на границе многогранника Q, то сумма углов вокруг неё также не может быть меньше 2π. Действительно, иначе угол при X со стороны Q был бы меньше π, потому что со стороны P он по условию $\geqslant \pi$; а тогда угол при X можно было бы срезать в Q, сократив тем самым кратчайшую AB, что невозможно по самому её определению.

Итак, все углы на границе многогранника Q не превосходят π, и каждую пару точек из Q можно соединить в Q кратчайшей линией, не проходящей через вершины многогранника $\overline{P}$.

Пусть теперь A и B — две точки многогранника Q, являющиеся вершинами многогранника $\overline{P}$, и пусть их кривизны будут ω_A, ω_B. Мы доказали, что сумма кривизн всех вершин, принадлежащих Q, меньше 2π, а потому

$$\frac{\omega_A + \omega_B}{2} < \pi. \tag{7}$$

Проведём кратчайшую в Q линию AB. Построим на плоскости два равных треугольника $A'B'C'$, $A''B''C''$ с основаниями

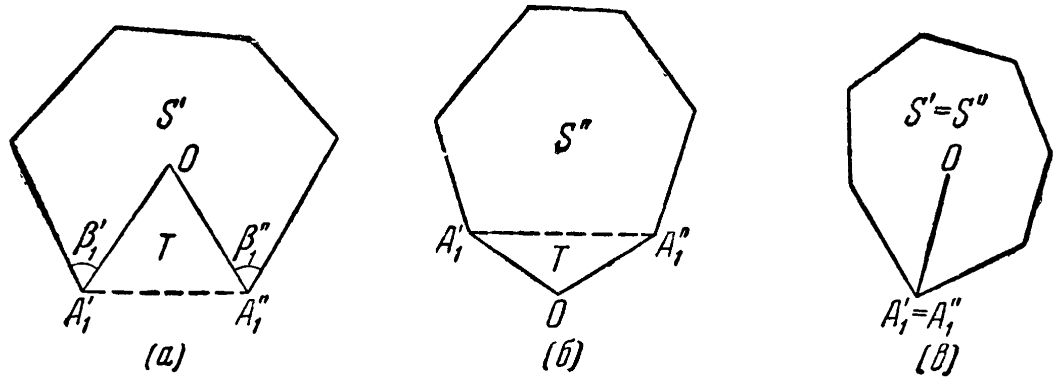
$$A'B' = A''B'' = AB$$

и с углами

$$\angle A' = \angle A'' = \frac{\omega_A}{2}, \qquad \angle B' = \angle B'' = \frac{\omega_B}{2}. \tag{8}$$

Так как $\frac{1}{2}(\omega_A + \omega_B) < \pi$, то такие треугольники существуют.

Разрезав $P+Q$ по линии AB, подклеим к обеим сторонам разреза основания треугольников $A'B'C'$, $A''B''C''$ так, чтобы их вершины A', A'' и B', B'' совпали, соответственно, с точками A и B. Остальные же стороны треугольников склеим друг с другом: $A'C'$ с $A''C''$ и $B'C'$ с $B''C''$. Таким путём мы получаем вместо $P+Q$ новую развёртку $P+Q'$ или $R+Q'$. При этом к полным углам вокруг точек A и B добавляются углы, равные их кривизнам ω_A, ω_B, т. е. как раз столько, сколько нехватало до 2π. Поэтому



Черт. 103.

точки A и B перестают быть вершинами. Но появляется новая вершина $C = C' = C''$ с кривизной ω_C, равной сумме кривизн ω_A, ω_B. Действительно, вследствие (8)

$$\angle C' = \angle C'' = \pi - \frac{\omega_A + \omega_B}{2},$$

сумма же этих углов есть полный угол вокруг C, т. е. $2\pi - \omega_C$, откуда

$$\omega_C = \omega_A + \omega_B. \tag{9}$$

Поскольку суммы углов вокруг всех внутренних точек кратчайшей AB равны 2π, то при подклеивании треугольников $A'B'C'$ и $A''B''C''$ к разрезу по AB никаких вершин на этом разрезе не появится.

Итак, суммы углов вокруг всех точек будут $\leqslant 2\pi$, а так как углы на границе $P \geqslant \pi$, то у Q' они $\leqslant \pi$.

Таким образом, у развёртки Q на одну вершину меньше, чем у Q', но вследствие (9) кривизна её — та же, что у Q, и углы на границе тоже $\leqslant \pi$. Поэтому, если у Q' есть более одной вершины, то, повторяя то же построение, придём к развёртке Q'' и т. д., пока не получим развёртку S, у которой только одна точка O есть (существенная) вершина развёртки $R+S$ (или, что то же самое, вершина склеенного из неё многогранника; такой многогранник существует, поскольку все суммы углов вокруг вершин этой развёртки не превосходят 2π). Развёртка R при этом построении осталась без изменения.

Пусть точка O лежит внутри S. Тогда суммы углов в развёртке $R+S$ вокруг всех точек на общей границе L развёрток R и S будут равны 2π, а потому углы на S будут

$$\beta_1 = 2\pi - \alpha_1, \ \ldots, \ \beta_n = 2\pi - \alpha_n, \tag{10}$$

где α_i — углы на R.

Проведём кратчайшую OA_1, соединяющую точку O с вершиной A_1 границы развёртки S. Так как развёртка S не имеет существенных вершин, помимо O, то, разрезав S по OA_1, её можно развернуть на плоскость, причём получим многоугольник S' (черт. 103, *а*). Его углы будут $\beta_2, \ldots, \beta_n$ и углы β_1', β_1'' при вершинах A_1', A_1'', причём

$$\beta_1' + \beta_1'' = \beta_1 = 2\pi - \alpha_1. \tag{11}$$

Из соотношений (10) следует, что ломаная $\widehat{A_1'A_1''}$ и есть не что иное, как ломаная L^0, получаемая разворачиванием ломаной L, ограничивающей развёртку R. Поэтому, проводя отрезок $A_1'A_1''$, получим многоугольник S'', ограниченный этим отрезком и ломаной L^0. Этим доказано, что условие А) нашей теоремы выполнено.

Если многоугольник S'' получается из S' прибавлением треугольника $T = OA_1'A_1''$ (черт. 103, *а*), то это означает, во-первых, что $S' = S'' - T$, а во-вторых, формула (11) означает, что условие В) нашей теоремы о сумме углов $\gamma_1 = \beta_1'$, $\gamma_2 = \beta_2''$ многоугольника $S' = S'' - T$ при вершинах A_1', A_1'' выполнено.

Если же многоугольник S'' получается из S' вычитанием треугольника $OA_1'A_1''$ (черт. 103, *б*), то углы γ_1, γ_2 при его вершинах A_1', A_2'' меньше, чем у S'; а в крайнем случае, если треугольник $OA_1'A_1''$ вырождается в отрезок (черт. 103, *в*), то S'' и S' совпадают. Поэтому так или иначе

$$\gamma_1 \leqslant \beta_1', \quad \gamma_2 \leqslant \beta_1''$$

и вследствие (11)

$$\gamma_1 + \gamma_2 \leqslant 2\pi - \alpha_1.$$

Тогда, даже не вырезая из многоуольника S'' никакого треугольника T, получаем, что условие В) нашей теоремы выполнено. (Можно, конечно, вырезать из S'' сколь угодно узкий треугольник, и тогда углы γ_1, γ_2 только уменьшатся.)

Таким образом, доказано, что если существенная вершина O лежит внутри развёртки S, то условия А), В) выполнены.

Пусть теперь O лежит на границе развёртки S. Тогда внутри S вовсе нет существенных вершин, и потому S сама представляет многоугольник с углами $\beta_i = 2\pi - \alpha_i$ при всех граничных вершинах, кроме $A_1 = O$; угол же при $A_1 = O$ будет, очевидно, $\gamma \leqslant 2\pi - \alpha_1$. Следовательно, здесь получается как раз тот случай, когда ломаная L^0 замкнута. Она ограничивает многоугольник S, а угол при её совпадающих концах есть $\gamma \leqslant 2\pi - \alpha_1$.

Таким образом, теорема полностью доказана *).

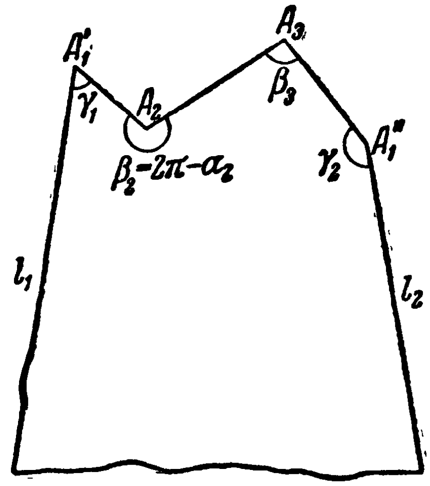
Стоит заметить, что выполнение условий А), В) этой теоремы легко проверяемо для каждой данной развёртки R. Для условия А) это совершенно очевидно, потому что построение ломаной L^0 не представляет труда, когда граничные рёбра и углы α_i заданы. Для условия В) это также просто. Действительно, предположим, что условие А) уже выполнено, так что имеется многоугольник Q, ограниченный ломаной L^0 и отрезком $A_1'A_1''$. Проведя из середины этого отрезка перпендикуляр внутрь Q, возьмём первую точку B его пересечения с ломаной L^0. Построим треугольник $BA_1'A_1''$; это будет наибольший равнобедренный треугольник T, заключающийся в Q. Если углы при вершинах A_1', A_1'' в $Q - T$ таковы, что их сумма $\gamma_1 + \gamma_2 \leqslant 2\pi - \alpha_1$, то условие В) выполнено. Если же $\gamma_1 + \gamma_2 > 2\pi - \alpha_1$, то оно не может быть вы-

*) Приём сведения двух вершин в одну путём склеивания треугольников, применённый в этом доказательстве, оказывается полезным и в других вопросах. Так, например, пользуясь им, можно доказать следующую теорему: пусть дана шапка с кривизной $\omega < 2\pi$; пусть её граничные рёбра будут $a_1, \ldots, a_n$ и углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; тогда существует пирамидальная шапка (т. е. боковая поверхность пирамиды) с теми же данными $a_1, \ldots, a_n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, причём она имеет наибольшую площадь среди всех шапок с этими данными. Далее, отсюда можно вывести и такую теорему: среди всех выпуклых многогранников, гомеоморфных кругу и имеющих данную кривизну $\omega < 2\pi$, данный периметр ограничивающей ломаной и число вершин, не большее данного n, наибольшую площадь имеет боковая поверхность правильной $(n-1)$-гранной пирамиды и только она, не считая многогранников, ей изометричных. Доказательства мы оставляем читателю.

полнено, потому что при всяком меньшем треугольнике T сумма углов $\gamma_1+\gamma_2$ будет ещё больше.

6. Следующая теорема даёт *достаточные* условия, при которых из данной развёртки можно склеить выпуклый многогранник, являющийся частью бесконечного выпуклого многогранника, и которые в известном смысле противоположны условиям теоремы 8.

Теорема 9. *Пусть R — развёртка, гомеоморфная кругу, L — ограничивающая её ломаная, L° — ломаная, полученная разворачиванием ломаной L, разорванной в какой-либо вершине A_1, угол при которой обозначим α_1. Допустим, что из концов ломаной L° можно провести два луча l_1, l_2 так, что:* А) *вместе с ломаной L° они ограничивают бесконечный (может быть, самоперекрывающийся) многоугольник Q, лежащий с внешней стороны L°,* В) *сумма углов γ_1, γ_2 многоугольника Q при концах лучей l_1, l_2 равна (или меньше) $2\pi-\alpha_1$. Тогда из развёртки R можно склеить выпуклый многогранник, являющийся частью бесконечного выпуклого многогранника.*



Черт. 104.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — углы развёртки R при вершинах ломаной L. Они же будут углами с внутренней стороны ломаной L°. Углы многоугольника Q будут, соответственно, $\beta_2=2\pi-\alpha_2, \ldots$ $\ldots, \beta_n=2\pi-\alpha_n$ и γ_1, γ_2, причём $\gamma_1+\gamma_2\leqslant 2\pi-\alpha_1$ (черт. 104). Отождествив бесконечные стороны l_1, l_2 многоугольника Q друг с другом, а конечные его стороны с соответствующими граничными рёбрами развёртки R, получим развёртку $R+Q$, гомеоморфную плоскости. В силу условий, наложенных на углы многоугольника Q, в этой развёртке суммы углов вокруг всех вершин будут $\leqslant 2\pi$ и из неё можно склеить выпуклый многогранник. Часть его, соответствующая данной развёртке R, будет склеенным из неё выпуклым многогранником, и теорема доказана.

Условие теоремы 9 для каждой данной развёртки допускает прямую проверку. Развернув ломаную L, проведём из одного её конца луч l_1 так, чтобы угол γ_1 с внешней стороны от L° был наименьшим, при котором l_1, внешняя сторона ломаной L° и хотя бы один какой-нибудь луч l из точки A_1'' могли ограничивать некоторую область, быть может, и налегающую саму на себя. (Возможность провести такой луч l_1 проверяется конечным числом действий, хотя бы потому, что проверку надо проводить лишь для конечного числа сочетаний лучей l_1, l, идущих в вершины ломаной L°.) Затем проводим из точки A_1'' луч l_2, образующий с внешней стороной ломаной L° угол $\gamma_2=$ $=2\pi-\alpha_1-\gamma_1$. Если при этом лучи l_1, l_2 и ломаная L° ограничат лежащий с внешней стороны от L° бесконечный, возможно налегающий на себя, многоугольник Q (черт. 105, *а*), то условие выполнено. Возможно, однако, что многоугольника Q не получится. Это может произойти по нескольким причинам:

1) Лучи l_1, l_2 и внешняя сторона ломаной L° ограничат конечный многоугольник (черт. 105, *б*).

2) Линия L° пересекает сама себя таким образом, что не может ограничивать никакого многоугольника Q, лежащего с её внешней стороны (черт. 105, *в*).

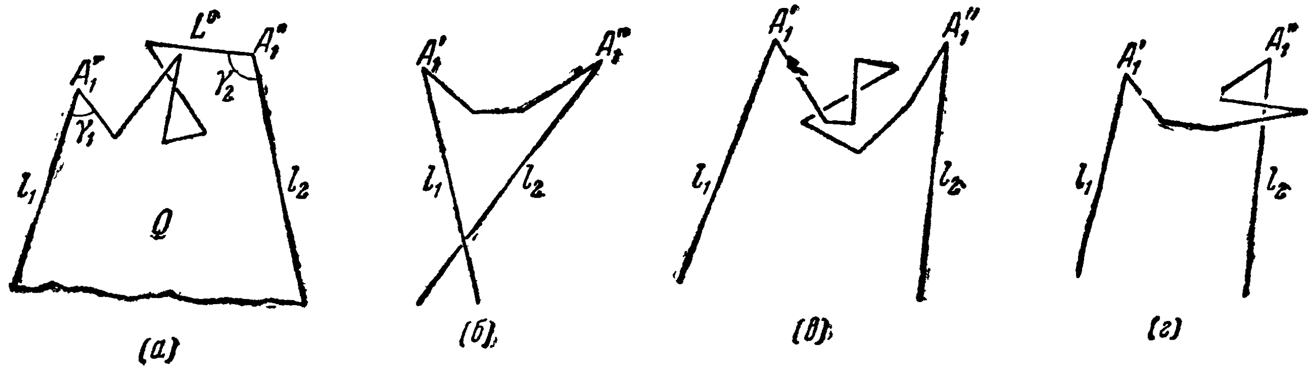
3) Луч l_1 или l_2 пересекает ломаную L° так, что вместе с L° не может ограничивать лежащую с внешней стороны от L° область (черт. 105, *г*).

Во всех случаях 1), 2), 3) условия теоремы 9 не будут выполнены и ни при каком другом выборе луча l_1, идущего из A_1'. Действительно, уменьшать γ_1 нельзя, а увеличивая γ_1, надо уменьшать γ_2, что не может привести к устранению какого-либо из случаев 1), 2), 3).

Поскольку получаемый в теореме 9 многогранник есть часть бесконечного, то его кривизна не превосходит 2π. Поэтому условие теоремы заведомо приложимо лишь к развёрткам с кривизной $\leqslant 2\pi$.

Вопрос о том, в какой мере условия теоремы 9 вместе с ограничением кривизны оказываются необходимыми, остаётся открытым, не считая следующего простого случая.

Допустим, что все углы α_i развёртки R, кроме, быть может, одного α_i, не превосходят π. В этом случае ломаная L° будет получаться выпуклой во внешнюю сторону, и γ_1 можно взять равным нулю. Единственным препятствием к построению требуемого теоремой 9 многоугольника Q может быть лишь случай 1) в черт. 105, *б*).



Черт. 105.

В ограниченном здесь ломаной L° и лучами l_1, l_2 многоугольнике углы суть $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 2\pi - \alpha_1$, далее $2\pi - \alpha_1, \ldots, 2\pi - \alpha_n$ и, наконец, угол φ между l_1 и l_2. Сумма всех углов $(n+2)$-угольника равна $n\pi$, поэтому $\sum_{i=1}^{n}(2\pi - \alpha_i) + \varphi = n\pi$, и так как $\varphi > 0$, то

$$\sum_{i=1}^{n}(\pi - \alpha_i) < 0. \tag{12}$$

Вместе с тем, если ω обозначает сумму кривизн внутренних вершин развёртки R, то по теореме 2 § 8 главы I

$$\sum_{i=1}^{n}(\pi - \alpha_i) = 2\pi - \omega,$$

что вместе с (12) даёт $\omega > 2\pi$. Таким образом, построение невозможно лишь при $\omega > 2\pi$.

Это приводит нас к следующей теореме:

Теорема 10. *Если у развёртки, гомеоморфной кругу, все углы на границе, кроме, может быть, одного, не превосходят π и сумма кривизн внутренних вершин развёртки не превосходит 2π, то из такой развёртки можно склеить выпуклый многогранник, являющийся частью бесконечного выпуклого многогранника.*

7. Теоремы 9 и 10 не могут быть обобщены на развёртки R, ограниченные несколькими ломаными L_i, потому что иначе, подклеивая к каждой ломаной L_i соответствующий бесконечный многоугольник Q_i, мы получили бы бесконечную развёртку, не гомеоморфную плоскости. Из такой развёртки заведомо нельзя склеить никакого выпуклого многогранника, кроме разве бесконечной призмы. Но в этом случае сама развёртка R представляла бы собой только часть такой призмы и имела кривизну, равную нулю.

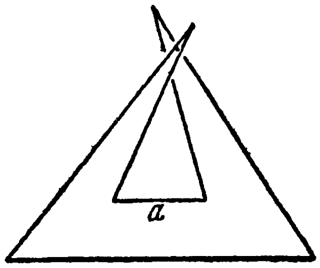
По такой же причине теоремы 9 и 10 не обобщаются на бесконечные развёртки, не считая тех, из которых склеивается часть бесконечной призмы.

Более того, можно доказать, что, исключая развёртки, представляющие собой часть бесконечной призмы, ни для какой развёртки, кроме гомеоморфной кругу, условия теорем 9 и 10 вообще не могут быть выполнены.

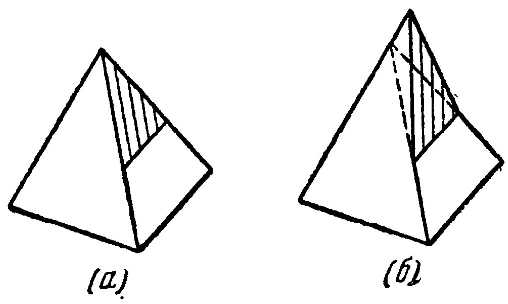
Зато в случае развёртки, ограниченной несколькими замкнутыми или бесконечными ломаными L_i, для каждой из этих ломаных можно применять достаточные условия теорем 4—10 и получить, таким образом, общую теорему, охватывающую все эти теоремы в части достаточности их условий.

8. В заключение приведём несколько простых примеров развёрток, из которых нельзя склеить никаких выпуклых многогранников, хотя они удовлетворяют тем заведомо необходимым условиям 1) — 3), какие были указаны ещё в n° 1.

На черт. 106 изображён многоугольник Q, перекрывающийся сам с собой. Если его разрезать на треугольники, то получим развёртку в обычном



Черт. 106.



Черт. 107.

смысле, из которой, однако, нельзя склеить никакого выпуклого многогранника, если сторона a достаточно мала. Действительно, если бы из многоугольника Q со сколь угодно малой стороной a можно было склеить выпуклый многогранник, то в пределе при исчезающей стороне a из предельного многоугольника Q получалась бы область на некоторой выпуклой поверхности, что заведомо невозможно, потому что здесь сумма углов при точке a больше 2π *).

Кривизна многоугольника Q равна нулю, и потому данный пример показывает, что даже из развёртки нулевой кривизны не всегда можно склеить выпуклый многогранник. Вопрос о необходимых и достаточных условиях, при которых это возможно, остаётся совершенно открытым.

На черт. 107, *а* изображён правильный тетраэдр, у которого от одной грани отрезан треугольник T. Если к краям выреза приставить новые грани, как, например, на черт. 107, *б*, то получим невыпуклый многогранник P, который нельзя изогнуть в выпуклый. Поэтому из развёртки этого многогранника нельзя склеить никакого выпуклого многогранника. Доказательство основано на том, что тетраэдр с удалённым треугольником T не допускает изгибаний, т. е. не существует никакого изометричного, но не равного ему выпуклого многогранника. Это легко проверяемое утверждение является частным случаем теоремы, которая будет доказана в следующем параграфе (теорема 3 § 2). Вместе с тем, если бы существовал выпуклый многогранник, изометричный многограннику P, то его часть, соответствующая тетраэдру с вырезом T, была бы выпуклым многогранником, изометричным, но не равным тетраэдру с вырезом.

Теорема 3 § 2 позволяет построить сколько угодно подобных примеров развёрток, из которых нельзя склеить никакого выпуклого многогранника.

---

*) Интересно непосредственно убедиться, что многоугольник Q с очень малой стороной a не может быть наложен ни на какой выпуклый многогранник. При сколь малых a наступает такое явление?

§ 2. Изгибание выпуклых многогранников

1. Говоря, что выпуклый многогранник P подвергается изгибанию, мы имеем в виду, что существует непрерывное семейство выпуклых многогранников P_t, изометричных, но не равных P. Точнее это семейство обладает следующими свойствами: 1) каждому значению параметра t из некоторого промежутка, скажем $0 \leqslant t \leqslant 1$, отвечают выпуклый многогранник P_t и изометрическое отображение φ_t данного многогранника P на P_t, причём $P_0 = P$ и φ_0 есть тождественное отображение P самого на себя, а φ_t при $t \neq 0$ не сводится к движению; 2) семейство многогранников P_t непрерывно, т. е. при $t \longrightarrow t_0$ точки $\varphi_t(X)$ многогранников P_t, соответствующие любой данной точке X многогранника P, сходятся в точке $\varphi_{t_0}(X)$ многогранника P_{t_0}. Дальше термин «изгибание» понимается именно в этом смысле, так что *изгибания, нарушающие выпуклость* или *превращающие многогранник в немногогранник*, исключаются. Всякий выпуклый многогранник допускает непрерывное изгибание с нарушением выпуклости, достаточно непрерывно продавливать его внутрь в окрестность любой вершины *).

В §§ 3 и 5 главы III было доказано, что *выпуклые многогранники, конечные с кривизной, равной* 4π, *и бесконечные с кривизной, равной* 2π, *не допускают изометрических отображений помимо движений и отражений, а потому они тем более неизгибаемы.* Поэтому речь может идти только об изгибаниях многогранников, конечных с кривизной, меньшей 4π, и бесконечных с кривизной, меньшей 2π.

Мы покажем, однако, что среди таких многогранников также имеются неизгибаемые и даже не допускающие никаких изометрических отображений помимо тривиальных, т. е. помимо движений и отражений (теоремы 3 и 4).

В n° 2 § 5 главы IV было указано, что всякий полный (т. е. не имеющий границы) бесконечный многогранник с кривизной $< 2\pi$ допускает непрерывное изгибание. Этот результат мы ещё уточним в n° 6. Кроме того, мы докажем, что всякий многогранник, являющийся частью изгибаемого, сам допускает изгибания. Поэтому окажется, что многогранник, являющийся частью полного бесконечного многогранника с кривизной $< 2\pi$, будет изгибаемым. (Теорема 7 об изгибаемости части изгибаемого многогранника может сначала показаться совершенно очевидной. Однако такое заключение было бы поспешным, потому что при данном изгибании многогранника P некоторая его часть может, вообще говоря, оставаться неизменной. Легко

---

*) Пусть O — вершина многогранника P_0 и Q_0 — его опорная плоскость, касающаяся P_0 только в точке O. Вдвигая эту плоскость параллельно вовнутрь, получим плоскости Q_t, отсекающие от P_0 пирамиды R_t. Если при каждом t отражать пирамиду R_t в плоскости Q_t, то получим непрерывное семейство многогранников P_t, изометричных P_0 и невыпуклых.

подобрать соответствующие примеры; один из них представляет изгибание бесконечного многогранника, рассмотренное в n° 2 § 5 главы IV. Доказательство теоремы 7, которое будет здесь дано, оказывается не таким уже простым.)

Сделанные замечания показывают, что наша задача сводится к исследованию изгибаемости конечных многогранников с кривизной, меньшей 4π, и бесконечных многогранников, имеющих кривизну, меньшую 2π, но являющихся частями полных бесконечных многогранников с кривизной, равной 2π.

Так как кривизна многогранника сосредоточена в его внутренних вершинах, то речь идёт о многогранниках, получающихся из полных путём удаления частей, содержащих хотя бы одну вершину внутри или на границе.

Мы не знаем эффективных условий, необходимых и достаточных для изгибаемости выпуклого многогранника, так что поставленная задача не будет решена полностью, хотя излагаемые далее результаты подводят к такому её решению, повидимому, довольно близко.

На первых порах мы ограничимся рассмотрением выпуклых многогранников, гомеоморфных кругу, т. е. конечных и ограниченных одной замкнутой ломаной без кратных точек. Этот случай не только наиболее интересен с наглядной точки зрения, но и самый характерный, потому что, как мы потом покажем, все полученные для него результаты переносятся на многогранники другого топологического строения.

2. Пусть P — выпуклый многогранник, гомеоморфный кругу, и L — ограничивающая его замкнутая ломаная. Пусть Q — такой гомеоморфный кругу многоугольник, что ограничивающая его ломаная допускает отображение φ на ломаную L с сохранением длин. Это, очевидно, означает, что при введении, если это необходимо, на ломаной L и многоугольнике Q дополнительных вершин стороны многоугольника оказываются соответственно равными звеньям ломаной L. Здесь, как и всюду дальше, под многоугольником мы понимаем развёртку, не имеющую вершин внутри и такую, что, будучи склеенной, она превращается в плоский многоугольник, могущий, однако, перекрываться сам с собой.

Отождествляя точки границ многогранника P и многоугольника Q, соответствующие друг другу при отображении φ, получим гомеоморфную сфере развёртку $P+Q$; говоря так, мы не отличаем многогранника P от какой-либо его развёртки. Для того чтобы из развёртки $P+Q$ можно было склеить выпуклый многогранник, необходимо и достаточно, чтобы полные углы, т. е. суммы углов, вокруг всех её вершин были $\leqslant 2\pi$. Так как это условие для вершин многогранника P заведомо выполнено, а Q не имеет внутренних вершин, то остаётся потребовать, чтобы *суммы углов при отождествляемых точках границ многогранника P и многоугольника Q не превосхо-*

дили 2π. Если это *«условие об углах»* выполнено, то получаем замкнутый многогранник $\bar{P}=P'+Q'$, где части P' и Q' соответственно изометричны многограннику P и многоугольнику Q.

Это построение многогранника $\bar{P}$ мы будем называть *подклеиванием многоугольника Q к границе данного многогранника P*. Так как замкнутый многогранник $\bar{P}$ определяется своей развёрткой однозначно (с точностью до движения и отражения), то при данном многограннике P операция подклеивания однозначно определяется заданием многоугольника Q и отображением ψ его границ на границу многогранника P.

Подклеивание всегда возможно. Действительно, стоит лишь принять за $\bar{P}$ границу выпуклой оболочки многогранника P. Тогда $\bar{P}$ не имеет других вершин, помимо вершин самого P; поэтому дополнение $\bar{P}-P$ может быть развёрнуто на плоскость, и, присоединяя к нему его границу, получим многоугольник Q. Подклеиванием этого многоугольника к многограннику P и получается $\bar{P}$.

Подклеивание, осуществляемое таким построением, можно назвать *тривиальным*.

Подклеивания многоугольников Q и Q' с отображениями ψ и ψ' их границ на границу многогранника P считаются одинаковыми тогда и только тогда, когда развёртки $P+Q$ и $P+Q'$ изометричны и притом так, что изометрическое отображение φ развёртки $P+Q$ на $P+Q'$ переводит P в себя, а Q — в Q'. Это означает, во-первых, что многоугольники Q и Q' изометричны и отображение φ для них можно рассматривать просто как их наложение, а во-вторых, это наложение сохраняет соответствие границ многоугольников Q и Q' границе многогранника P. (Это второе условие существенно потому, что при равенстве многоугольников Q и Q' способы их подклеивания к многограннику P могут быть различными, т. е. наложение φ многоугольника Q на Q' может и не приводить в совпадение те точки их границ, которые соответствуют (в силу отображений ψ и ψ') одной и той же точке X на границе многогранника P.)

Теорема 1. *Для того чтобы гомеоморфный кругу выпуклый многогранник P допускал нетривиальное изометрическое отображение, необходимо и достаточно, чтобы он допускал нетривиальное подклеивание*. (Речь идёт об изометрическом отображении на выпуклый же многогранник, и такое отображение считается тривиальным, если оно сводится к движению или движению и отражению.)

Условие необходимо. Пусть многогранник P допускает нетривиальное изометрическое отображение φ на многогранник P'. Пусть $\bar{P}$ и $\bar{P}'$ — границы выпуклых оболочек многогранников P и P', так что $\bar{P}=P+Q$, $\bar{P}'=P'+Q'$, где Q и Q' можно развернуть на плоскость.

Вследствие изометрии многогранников P и P' многогранник $\bar{P}'$ можно рассматривать как результат подклеивания к данному многограннику P

многоугольника Q'. Тем самым мы отождествляем точки многогранников P и $\bar{P}'$, соответствующие при отображении φ, и получаем две развёртки $P+Q$ и $P+Q'$, образованные подклеиванием к P многоугольников Q и Q' *).

Допустим вопреки доказываемому, что оба подклеивания одинаковы, так что имеется изометрическое отображение развёртки $P+Q$ на $P+Q'$, переводящее P в себя. Это, очевидно, равносильно тому, что имеется изометрическое отображение многогранника $\bar{P}=P+Q$ на $\bar{P}'=P'+Q'$, переводящее P в P'. Так как эти многогранники замкнуты, то такое отображение необходимо оказывается тривиальным, а вместе с ним оказывается тривиальным также отображение P на P'. Но, рассматривая P и P' как развёртки, мы отождествили их точки, соответствующие при данном изометрическом отображении φ многогранника P на P'. Поэтому это φ как раз и сводится к полученному тривиальному отображению. Это противоречит исходному предположению, и тем самым необходимость условия теоремы доказана.

Пусть теперь многогранник P допускает, помимо тривиального, ещё другое подклеивание, так что мы имеем два замкнутых многогранника $\bar{P}=P+Q$ и $\bar{P}=P'+Q'$, где P' изометричен P, а Q и Q' разворачиваются на плоскость и $\bar{P}$ есть граница выпуклой оболочки многогранника P. Так как Q' разворачивается на плоскость, то многогранник $\bar{P}'$ не имеет других вершин, помимо вершин многогранника P', и, следовательно, также является границей его выпуклой оболочки. Но ввиду того, что рассматриваемые подклеивания различны, многогранники $\bar{P}$ и $\bar{P}'$ не изометричны и тем более не равны. А так как из равенства многогранников P и P' следовало бы равенство их выпуклых оболочек, то P и P' также не равны, что и требовалось доказать.

3. Введём теперь понятие о «деформации подклеивания». Многогранник P вместе с подклеиваемым многоугольником Q образуют развёртку $P+Q$, и под деформацией подклеивания мы понимаем такое непрерывное изменение этой развёртки, при котором многогранник P остаётся неизменным, многоугольник же Q меняется (оставаясь, однако, многоугольником) либо сам Q остаётся неизменным, но меняется способ его подклеивания к многограннику P.

В совершенно строгих терминах деформация подклеивания может быть определена следующим образом.

Пусть каждому значению параметра t в промежутке $[0, 1]$ сопоставлено подклеивание (Q_t, ψ_t) многоугольника Q_t к границе данного

*) Здесь особенно следует различать нетривиальное отображение многогранников от их неравенства, потому что данный многогранник P может допускать нетривиальные изометрические отображения на себя; тогда многогранник P' мог бы просто совпадать с P, хотя отображение φ не было бы ни тождественным, ни каким-либо другим из тривиальных.

многогранника P, заданное отображением ψ_t границы Q_t на границу P. Пусть при всяком t_0 и $t \to t_0$ многоугольники Q_t сходятся к Q_{t_0} так, что для всякой точки X на границе P $\psi_t^{-1}(X) \to \psi_{t_0}^{-1}(X)$, т. е. соответствующие точки на границах многоугольников Q_t сходятся к соответствующей точке на границе Q_{t_0}. Если не все подклеивания (Q_t, ψ_t) одинаковы и подклеивание (Q_0, ψ_0) тривиально, то мы говорим, что имеется деформация тривиального подклеивания.

Теорема 2. *Для того чтобы гомеоморфный кругу выпуклый многогранник P был изгибаемым, необходимо и достаточно, чтобы существовала деформация соответствующего ему тривиального подклеивания.*

Более того, каждой деформации тривиального подклеивания соответствует определённое изгибание многогранника P, и обратно.

Доказательство очевидно из теоремы 1, потому что в силу неё деформация подклеивания соответствует деформации многогранника, и обратно. Нужно только доказать, что обе деформации будут одновременно непрерывны. Мы ограничимся доказательством того, что непрерывной деформации подклеивания действительно соответствует изгибание многогранника P в смысле точного определения, данного в начале этого параграфа. Обратное утверждение представляет собой почти очевидное следствие самих определений; стоит лишь рассмотреть выпуклые оболочки $\bar{P}_t = P_t + Q_t$ многогранников P_t, полученных из данного P путём изгибания.

Для того чтобы исключить движение многогранника P, выберем на нём три вершины A, B, C, и, закрепив в пространстве оси координат x, y, z, перенесём многогранник P так, чтобы вершина A попала в начало, B — на положительную полуось x и C — на полуплоскость $y > 0$ плоскости x, y. Всякий многогранник P', изометричный P, мы будем считать расположенным так, что положения его соответственных вершин A', B', C' подчинены тем же условиям.

Для того чтобы исключить отражение, ориентируем многогранник P, задав на нём направление обхода какого-либо малого контура, и будем рассматривать только такие многогранники P', изометричные P, которые получаются из P изометрическими отображениями, сохраняющими ориентацию винта, определённую данным направлением обхода и внешней нормалью. Так как при отражении ориентация такого винта меняется на обратную, то данное условие исключает отражение, а если для данного P' оно не выполнено, то берём вместо него симметричный многогранник. Когда движение и отражение исключены, можно сказать, что изгибание представляет собой только истинную деформацию многогранника. (Именно о таких изгибаниях с исключённым движением утверждается, что они однозначно соответствуют деформациям подклеивания.)

Пусть каждому t из данного промежутка отвечает подклеивание многоугольника Q_t к многограннику P, так что эти подклеивания представляют собой непрерывную деформацию тривиального. Тогда мы имеем непрерывное семейство развёрток $R_t = P + Q_t$ и семейство склеенных из них замкнутых многогранников $\overline{P}_t = P_t + Q_t$, где P_t изометричны P. Докажем, что при $t \longrightarrow t_0$ многогранники P_t сходятся к P_{t_0}. Допустим противное, и пусть мы имеем такую последовательность $t_n \longrightarrow t_0$, что P_t не сходятся к P_0. Однако ввиду непрерывности семейства развёрток R_t (по лемме 3 § 2 гл. IV) из многогранников $\overline{P}_{t_n}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к многограннику $\overline{P}$ с предельной развёрткой R_{t_0}. Так как замкнутые выпуклые многогранники с одинаковыми развёртками равны, а движение и отражение исключены, то этот многогранник $\overline{P}$ совпадает с $\overline{P}_{t_0}$. Этим доказано, что многогранники $\overline{P}_{t_n}$ должны сходиться к $\overline{P}_{t_0}$. Вместе с ними также P_{t_n} сходятся к P_{t_0} и, более того, если X — какая-либо точка многогранника P, а φ_t — изометрические отображения P на P_t, то $\varphi_{t_n}(X)$ сходятся к $\varphi_{t_0}(X)$. Действительно, ввиду наложенного выше на вершины A, B, C условия и сходимости $\overline{P}_{t_n}$ к $\overline{P}_{t_0}$, точки $\varphi_{t_n}(A)$, $\varphi_{t_n}(B)$, $\varphi_{t_n}(C)$ заведомо сходятся к $\varphi_{t_0}(A)$, $\varphi_{t_0}(B)$, $\varphi_{t_0}(C)$. Но задание трёх точек полностью определяет положение всех остальных точек многогранника P_{t_0}, а потому $\varphi_{t_n}(X) \longrightarrow \varphi_{t_0}(X)$ и при всякой точке X.

Это согласно определению означает, что семейство многогранников P_t представляет результат изгибания данного многогранника P.

Этот вывод вовсе не тривиален, потому что он основан на теореме о равенстве замкнутых выпуклых многогранников с общей развёрткой. Без неё нельзя быть уверенным в сходимости $\overline{P}_{t_n}$ к $\overline{P}_t$, и тем самым в непрерывности полученного семейства многогранников.

4. Теорема 2 сводит вопрос об изгибании выпуклого многогранника к чисто планиметрической задаче о возможности деформации данного многоугольника с сохранением условий подклеивания, т. е. в основном с сохранением данных верхних границ его углов. Для выпуклых многоугольников эта задача решается до конца, что приводит к следующему результату:

Теорема 3. *Пусть многогранник P получается из замкнутого выпуклого многогранника $\overline{P}$ путём удаления некоторой его части, которая может быть развёрнута на плоскость и превращается тогда в выпуклый многоугольник Q, если к вырезу Q присоединить его границу.* (Так как Q разворачивается на плоскость, то внутри него нет вершин.)

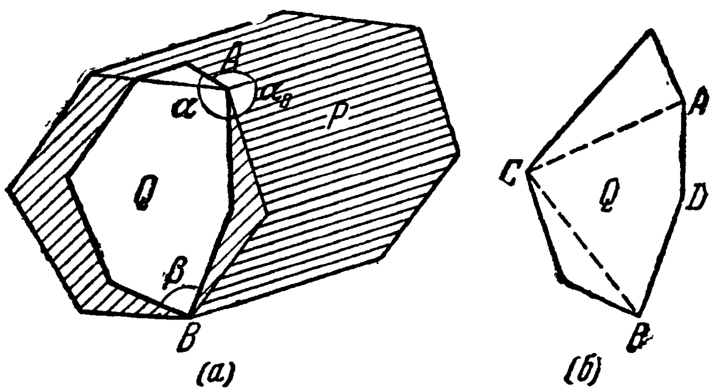
1) *Если на границе выреза $\overline{P} — P$ лежат по крайней мере две вершины многогранника $\overline{P}$, то многогранник P изгибаем.* (*В качестве предельного случая допускается просто надрез многогранника $\overline{P}$ по геодезической линии, соединяющей две его вершины.*)

2) *Если на границе выреза $\bar{P}-P$ лежит только одна вершина A многогранника $\bar{P}$ и α, α_0 — углы при A на $\bar{P}-P$ и на P, то многогранник P изгибаем тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant \alpha_0$, или, иными словами, когда вырезаемый вместе с $P-P$ угол α не меньше половины полного угла $\alpha_0+\alpha$ вокруг вершины A. Более того, при $\alpha < \alpha_0$ многогранник вообще не допускает нетривиальных изометрических отображений.*

3) *Если на границе выреза $\bar{P}-P$ нет вершин многогранника $\bar{P}$, то многогранник P неизгибаем.*

Последнее утверждение содержится в теореме 1 § 5 главы III, потому что при его условиях кривизна многогранника P равна 4π.

Заметим, что так как P содержит все вершины многогранника $\bar{P}$, то $\bar{P}$ есть граница выпуклой оболочки многогранника P и тем самым получается из P путём тривиального подклеивания многоугольника Q. В связи с этим *многогранник P можно характеризовать как такой, который допускает тривиальное подклеивание выпуклого многоугольника.*



Черт. 108.

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть A и B — те вершины многоугольника Q, которые соответствуют вершинам многогранника $\bar{P}$, и α, β — углы при этих вершинах на Q (черт. 108,*а*). Тогда, если α_0, β_0 — углы при этих вершинах на многограннике P, то $\alpha+\alpha_0 < 2\pi$, $\beta+\beta_0 < 2\pi$, т. е.

$$\alpha < 2\pi-\alpha_0, \quad \beta < 2\pi-\beta_0. \tag{1}$$

Возьмём на границе многоугольника Q две точки C и D, разделяющие точки A и B (черт. 108,*б*). Построим выпуклый четырёхугольник $ACBD$ и будем вытягивать его диагональ CD, не меняя его сторон*). При этом части AC, CB, BD, DA границы многоугольника Q будем перемещать без изменения их формы. Тогда углы α, β при A и B будут увеличиваться, прочие же углы многоугольника Q будут оставаться неизменными. При достаточно малой деформации неравенства (1) сохраняются, а так как все остальные углы не возрастают, то условие подклеивания не нарушится. Это в соединении с теоремой 2 доказывает первое утверждение.

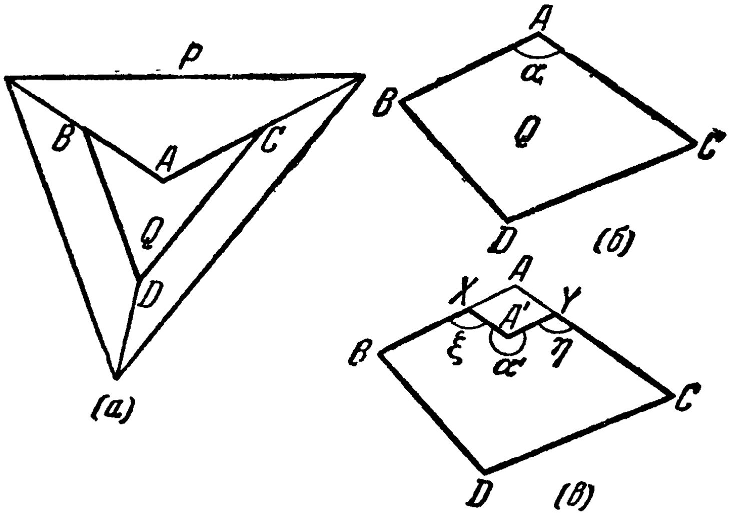
*) Не исключается, что этот четырёхугольник будет на самом деле треугольником (если A и B — соседние вершины и точка D — на стороне AB).

В предельном случае, когда многоугольник Q вырождается в отрезок AB, вывод будет тот же самый; стоит лишь считать этот отрезок дважды покрытым и деформировать его в четырёхугольник.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть A — та вершина многоугольника Q, которая соответствует вершине многогранника $\bar{P}$, и α — угол в Q при этой вершине (черт. 109, *а*, *б*). Тогда, если α_0 — угол при той же вершине на многограннике P, то

$$\alpha < 2\pi - \alpha_0, \tag{2}$$

но для угла при любой другой точке B на границе многоугольника Q будем иметь соответственно $\beta = 2\pi - \beta_0$. Поэтому при деформации многоугольника Q, не нарушающей условия подклеивания для углов, ни один из углов β не может возрастать. Между тем при деформации выпуклого многоугольника, происходящей без нарушения выпуклости, приращения углов меняют знак не менее четырёх раз при обходе вокруг многоугольника, так что должно быть по крайней мере два увеличивающихся угла. (См. лемму 4 § 1 гл. III, которая вместе с её доказательством буквально переносится на плоские многоугольники.)



Черт. 109.

Деформация, нарушающая выпуклость, приводит к вдавливанию хотя бы одной вершины внутрь, и угол при ней увеличивается, так как становится больше π. Поэтому ни для какой вершины, кроме A, такое продавливание внутрь невозможно.

Взяв на сторонах многоугольника Q, исходящих из вершины A, точки X, Y и отразив ломаную XAY в прямой XY, получим многоугольник Q' с входящей внутрь вершиной A' и двумя новыми выступающими вершинами X, Y (черт. 109, *в*). Углы при них будут

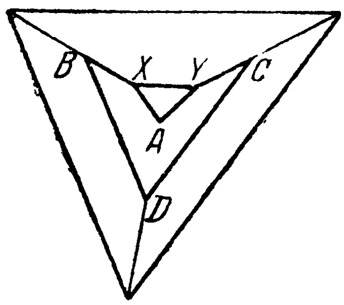
$$\alpha' = 2\pi - \alpha; \quad \xi, \ \eta < \pi.$$

Углы ξ_0, η_0 на многограннике P при точках, соответствующих X и Y, равны π, так как эти точки не являются вершинами на $\bar{P}$. Поэтому $\xi + \xi_0 < 2\pi$, $\eta + \eta_0 < 2\pi$, т. е. условие подклеиваемости тут не нарушается. А для точки A' будем иметь

$$\alpha' + \alpha_0 = 2\pi - \alpha + \alpha_0.$$

Поэтому, если $\alpha \geqslant \alpha_0$, то $\alpha' + \alpha_0 \leqslant 2\pi$, и условие подклеиваемости в точке A' также не нарушается. Если же $\alpha < \alpha_0$, то $\alpha' + \alpha_0 > 2\pi$, т. е. это условие нарушается.

Следовательно, если $\alpha \geqslant \alpha_0$, то, непрерывно продавливая вершину A внутрь многоугольника Q (чему соответствует непрерывное движение точек X, Y, начиная от A), получим его деформацию, не нарушающую условий подклеивания, и в силу теоремы 2 этому будет соответствовать непрерывное изгибание многогранника P. При таком изгибании на P появляются две новые вершины X, Y, движущиеся от вершины A. На примере черт. 109 это изгибание состоит в надламывании «козырька» ABC, которое можно наглядно проследить на черт. 110.



Черт. 110.

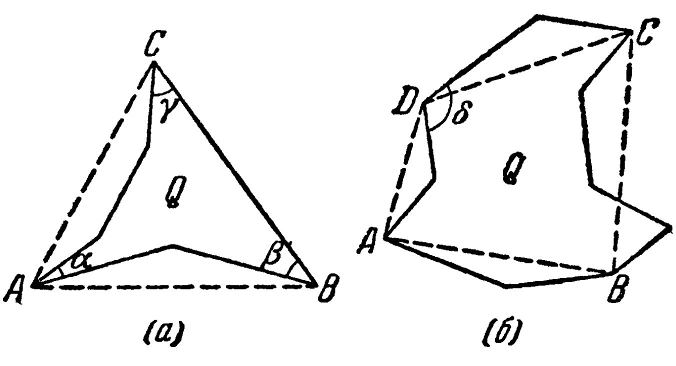
Если $\alpha < \alpha_0$, то условие подклеивания нарушается, и его нельзя восстановить никакой деформацией многоугольника Q'. Действительно, углы при всех вершинах, кроме X и Y, должны при этом не возрастать, а тогда согласно лемме 3 § 1 главы III отрезок XY уменьшается, и потому угол α' ещё более увеличивается. Поэтому в силу теоремы 1 при $\alpha < \alpha_0$ многогранник P вообще не допускает нетривиальных изометрических отображений.

5. Теорема 4. *Пусть многогранник P получается из замкнутого выпуклого многогранника $\bar{P}$ путём удаления некоторой его части $\bar{P} - P$, которая не содержит вершин внутри и может быть поэтому развёрнута на плоскость. Пусть получающийся из неё многоугольник Q — невыпуклый. Пусть n означает число вершин многогранника $\bar{P}$, лежащих на границе выреза $\bar{P} - P$, или, что то же, на границе многогранника P.*

1) *Если $n \geqslant 3$, то многогранник P изгибаем.*

2) *Если $n = 2$, то P может быть как изгибаемым, так и неизгибаемым.*

3) *Если $n = 1$, то P может быть как изгибаемым, так и неизгибаемым, причём в отличие от случая выпуклого многоугольника Q многогранник P может быть изгибаемым и при $\alpha < \alpha_0$, где α и α_0 — углы на Q и P при вершинах, соответствующих единственной вершине многогранника $\bar{P}$, лежащей на границе P. При данном полном угле $\alpha + \alpha_0$ P может быть изгибаемым при сколь угодно малом α.*



Черт. 111.

4) *Если $n = 0$, то P неизгибаем.*

Последнее вытекает из неизгибаемости многогранника с кривизной, равной 4π.

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть A, B, C — вершины многоугольника Q, соответствующие вершинам многогранника $\bar{P}$, лежащим на границе P (черт. 111, *а*). Тогда совершенно так же, как в теореме 3, углы α, β, γ при этих вершинах могут увеличиваться без нарушения условий подклеивания.

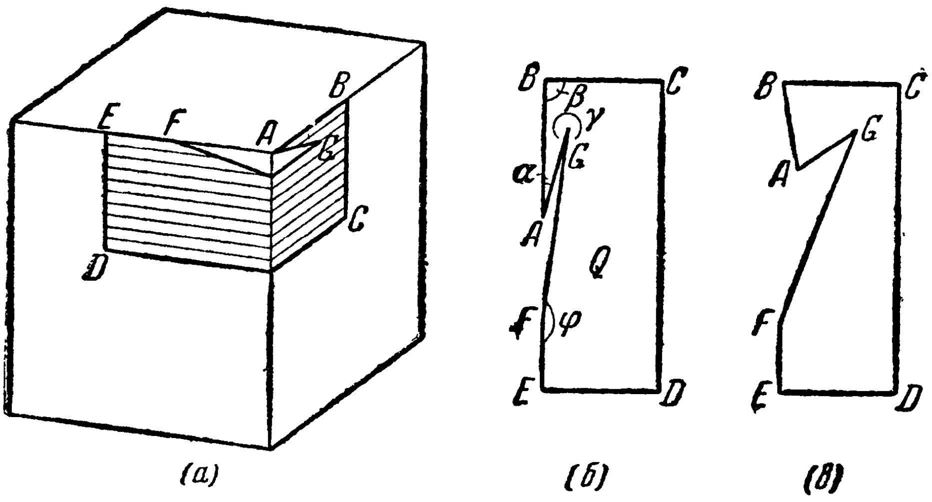
Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$ с вершиной D, лежащей на периметре многоугольника Q между точками A и C. Будем деформировать этот четырёхугольник, а вместе с ним многоугольник Q, перемещая ломаные $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{DA}$ без изменения формы. Тогда все углы многоугольника будут оставаться неизменными, кроме углов α, β, γ, δ при вершинах A, B, C, D. В известных пределах для углов α, β, γ допустимы любые изменения, угол же δ может только уменьшаться, чтобы не нарушалось условие подклеивания. Но деформация, уменьшающая угол δ, всегда возможна. Так, в случае, изображённом на черт. 111, *б*, угол δ уменьшается, если укорачивать диагональ AC. При другом строении многоугольника Q возможно, что укорочение диагонали AC поведёт к увеличению угла δ, но тогда, наоборот, нужно удлинять диагональ AC, и угол δ будет опять уменьшаться. (Особый случай возникает, когда все три точки A, B, C расположены на одной прямой, так что при неизменных длинах отрезков AB и BC «диагональ» AC может только уменьшаться. Теорема и в этом случае остаётся справедливой, но для доказательства нужны дополнительные соображения, которые мы опускаем.)

Во всяком случае, если точки A, B, C не лежат на одной прямой, доказано, что деформация, не нарушающая условия подклеивания, возможна, и первое утверждение теоремы доказано.

Обратимся теперь к случаю, когда на границе многогранника P имеется не более двух вершин многогранника $\overline{P}$. То, что тогда многогранник P может быть изгибаемым, доказывается сразу, если углы многоугольника Q при соответствующих вершинах столь велики, что продавливание их внутрь не нарушает условия подклеиваемости, так же как в случае выпуклого многоугольника Q. Поэтому остаётся указать примеры неизгибаемого многогранника P или, напротив, изгибаемого, но только тогда, когда угол при вершине многоугольника Q, соответствующей единственной вершине многогранника $\overline{P}$, лежащей на границе P, сколь угодно мал.

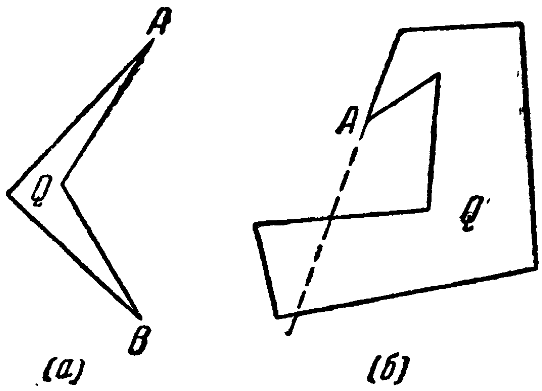
Обратимся к чертежу 112, *а*, где изображён куб с вырезанным невыпуклым многоугольником Q, отдельно изображённым на черт. 112, *б*. Если, не меняя длин сторон Q, изменять углы α, β, γ, φ так, чтобы угол β убывал, то, как легко проверить, углы γ и φ будут также убывать, а угол α будет увеличиваться. Изменённый многоугольник Q (черт. 112, *в*) сохраняет условия подклеиваемости, так что куб с указанным вырезом оказывается изгибаемым. Отметим, что многоугольник Q подходит лишь к одной вершине A куба и может иметь при ней сколь угодно малый угол α. Полученное изгибание, конечно, довольно сложно — при нём на кубе появляются три новые вершины B, F, G.

Предлагаем две задачи, возникающие в связи с теоремой 4. 1) Исследовать условия изгибаемости многогранника, получающегося из замкнутого путём вырезывания многоугольника Q такого вида, как на черт. 113, *а*, при условии, что вершины A, B лежат в вершинах



Черт. 112.

замкнутого многогранника. (Более общий случай многоугольника Q аналогичного строения исследуется так же.) Здесь возможна как изгибаемость, так и неизгибаемость; это может зависеть от разных условий. 2) Доказать, что многогранник, получаемый из замкнутого путём вырезывания многоугольника Q вида, как на черт. 113, *б*, изгибаем, если A — вершина замкнутого многогранника $\overline{P}$ и продолжение хотя бы одной из сторон угла A пересекает Q. Более того, для изгибаемости достаточно, чтобы такое продолжение стороны пересекало Q после поворота вокруг A на угол $\alpha \leqslant \leqslant \pi - \frac{\theta}{2}$, где θ — полный угол вокруг вершины A многогранника $\overline{P}$.



Черт. 113.

6. Теорема 5. *Если гомеоморфный кругу многогранник P получается из замкнутого выпуклого многогранника P_0 удалением его части $P_0 - P$, содержащей внутри хотя бы одну вершину, то многогранник P изгибаем.*

Пусть многогранник P получен из P_0 указанным способом и пусть $\overline{P}$ — граница его выпуклой оболочки. Покажем, что $\overline{P}$ имеет хотя бы одну грань, не являющуюся продолжением никакой грани многогранника P.

Допустим противное. Тогда $\overline{P}$ получается, очевидно, простым продолжением крайних граней многогранника P. Так как P_0 содержит P и потому заведомо охватывает $\overline{P}$, то всякая грань многогранника $\overline{P}$, являющаяся продолжением грани многогранника P, должна принадлежать также P_0. Но продолжение граней многогранника P однозначно определяет замкнутый выпуклый многогранник $\bar{P}$. Таким образом, оказывается, что все грани замкнутого многогранника принадлежат также P_0, откуда ясно, что $\bar{P}$ и P_0 совпадают. Однако выпуклая оболочка многогранника P не имеет других вершин, помимо вершин самого P, а потому оказывается, что P и P_0 имеют одни и те же вершины; но это противоречит условию, что P получается из P_0 удалением области, содержащей внутри хотя бы одну вершину.

Следовательно, $\bar{P}$ имеет по меньшей мере одну грань, не являющуюся продолжением никакой грани многогранника P. Так как у P и $\bar{P}$ вершины — общие, то вершины этой грани лежат на границе многогранника P. Их, очевидно, не менее трёх, а потому P получается из $\bar{P}$ удалением части $\bar{P} - P$, на границах которой лежат минимум три вершины. А тогда согласно теореме 4 многогранник P оказывается изгибаемым, что и требовалось доказать *).

7. Покажем теперь, что рассмотрение одних многогранников, гомеоморфных кругу, по существу не является ограничением.

Теорема 6. *Конечный выпуклый многогранник, ограниченный несколькими ломаными, изгибаем тогда и только тогда, когда он есть часть изгибаемого выпуклого многогранника, ограниченного только одной из этих ломаных.*

Пусть данный многогранник P, ограниченный ломаными $L_1, \ldots, L_n$, неизгибаем. Пусть многогранник $P_1 = P + Q_1 + \ldots + Q_n$ получен из P заклеиванием всех ломаных L_i, кроме L_1. Например, P_1 может быть границей выпуклой оболочки многогранника P за вычетом многоугольника, заклеивающего ломаную L_1. Однако мы вовсе не требуем, чтобы $Q_2, \ldots, Q_n$ были многоугольниками; важно только, что они суть выпуклые многогранники, ограниченные каждый одной ломаной L_i.

Так как многогранник P неизгибаем, то единственно возможные изгибания многогранника P_1 должны сводиться к изгибаниям каждого Q_i при неизменности его границы L_i. Однако такое изгибание невозможно, потому что при неизменной границе многоугольник, который можно подклеить к Q_i, определён однозначно. (Даже более того, теорема 4 § 5 главы III утверждает, что изгибание многогранника Q_i невозможно, если заданы только углы между его граничными рёбрами.)

Этим доказано, что если многогранник P неизгибаем, то никакой содержащий его многогранник, ограниченный только одной из ломаных $L_1, \ldots, L_n$, не может быть изгибаемым.

Пусть теперь многогранник P изгибаем. Пусть $\bar{P} = P + Q_1 + \ldots$ $\ldots + Q_n$ — граница его выпуклой оболочки. Изгибанию многогран-

---

*) Особый случай утверждения 1) теоремы 4, когда три вершины лежат на одной прямой, здесь исключается, так как речь идёт о трёх вершинах, принадлежащих одной грани на $\bar{P} - P$. При развёртывании грани на плоскость они не могут оказаться на одной прямой.

ника P соответствует деформация его выпуклой оболочки и вместе с нею деформация многоугольников Q_i *). Поэтому, если все ломаные $L_1, \ldots, L_n$, ограничивающие P, не имеют общих вершин, то в силу независимости условий подклеивания к каждой ломаной среди многоугольников Q_i должен быть хотя бы один такой, например Q_1, который можно деформировать, оставляя другие неизменными. Тогда многогранник $P_1 = P + Q_2 + \ldots + Q_n$, ограниченный одной ломаной L_1, оказывается изгибаемым.

Если некоторые из ломаных $L_1, \ldots, L_n$ имеют общие вершины, то наше рассуждение неприменимо. В этом случае можно иметь две точки зрения. Во-первых, можно считать две ломаные с общей вершиной за одну. Вырезаемый многоугольник «перетянут» в этой вершине, и её следует считать за две совпадающие вершины. При деформации подклеивания и, соответственно, при изгибании многогранника допускается раздвижение этих вершин. Во-вторых, можно считать две ломаные с общей вершиной за две различные ломаные. Тогда при изгибании многогранника раздвижение в этой вершине не допускается. Представляется очень вероятным, что в этом случае теорема 6 также имеет место; однако мы не имеем для этого исчерпывающего доказательства. Полное решение этого вопроса представляет интересную задачу.

8. Теорема 7. *Если многогранник P есть часть изгибаемого конечного выпуклого многогранника P_0, то многогранник P также изгибаем.*

(Это утверждение может на первый взгляд показаться совершенно тривиальным. Однако это не совсем так, потому что при данном изгибании многогранника P_0 некоторая его часть P может оставаться неизменной. Легко подобрать соответствующие примеры.)

Пусть многогранник P_0 изгибаем, так что имеем семейство изометричных ему многогранников P_t. Допустим, вопреки теореме, что P_0 содержит неизгибаемую часть P, которая, следовательно, содержится также во всех P_t. Пусть $\overline{P}$ и $\overline{P}_t$ — границы выпуклых оболочек многогранников P и P_t. Выпуклая оболочка определяется вершинами; поэтому если бы $\overline{P}_t$ при каком-либо t не совпадала с $\overline{P}$, то она имела бы вершины, помимо вершин многогранника P. Но тогда P получался бы из замкнутого многогранника $\overline{P}_t$ исключением некоторой области, содержащей вершину внутри, и по теореме 5 многогранник P оказывался бы изгибаемым (если P ограничен не одной ломаной, то то же заключение верно в силу теоремы 6). Это противоречит условию, а потому $\overline{P}_t$ и $\overline{P}$ должны совпадать при всех t. Следовательно, выпуклая оболочка многогранников P_t остаётся неизменной и совпадает

---

*) Здесь и дальше мы для простоты говорим о деформации многоугольника, имея в виду деформацию подклеивания в смысле точного определения, данного выше, в n° 3.

с выпуклой оболочкой многогранника P_0, откуда следует, что сами многогранники P_t совпадают с P_0. Это заключение относится к любому изгибанию многогранника P_0, тем самым, вопреки предположению, он оказывается неизгибаемым, и теорема доказана.

Полученный результат в соединении с первым утверждением теоремы 3 приводит к заключению, что если из замкнутого многогранника P_0 вырезана часть Q, разворачиваемая в многоугольник, то оставшийся многогранник будет заведомо изгибаем, если Q содержит отрезок (геодезическую), соединяющую две вершины многогранника P_0. Следовательно, при удалении невыпуклого многоугольника Q оставшийся многогранник может быть неизгибаемым только тогда, когда Q не содержит никакого такого отрезка.

Вследствие теорем 3—7 остаётся только исследовать вопрос об изгибаемости или неизгибаемости многогранника, полученного из замкнутого P_0 удалением части, разворачиваемой в невыпуклый многоугольник Q и содержащей на границе не более двух вершин многогранника P_0, причём в последнем случае нужно рассматривать лишь такие вырезы, которые не содержат геодезической, соединяющей эти вершины. На основании теоремы 2 задача сводится к вопросу о возможности деформации многоугольника Q с сохранением условия подклеиваемости. Этот вопрос остаётся, однако, нерешённым полностью.

9. Теперь обратимся к изгибаниям бесконечных выпуклых многогранников.

Как доказано в §§ 3 и 5 главы III, бесконечный многогранник с кривизной 2π неизгибаем, даже если он имеет границу. Поэтому речь должна идти о многогранниках с кривизной $< 2\pi$. При этом нужно различать две возможности:

1) бесконечный многогранник P есть часть многогранника с кривизной 2π;

2) бесконечный многогранник P есть бесконечный полный многогранник с кривизной, меньшей 2π, или часть такого полного многогранника.

Так как бесконечный многогранник с кривизной 2π, подобно замкнутому, неизгибаем, то к многогранникам первого типа приложимы методы и выводы предыдущих пунктов. Несколько новым будет случай, когда данный бесконечный многогранник получается из полного с кривизной, равной 2π, путём исключения какого-то бесконечного куска.

Как крайний случай можно рассматривать многогранники, получаемые из полных с помощью бесконечных разрезов. Если разрезать многогранник по бесконечному лучу, исходящему из вершины, то он становится изгибаемым. Если же разрез достаточно сильно искривлён в начале и лишь потом распрямляется, уходя в бесконечность, то многогранник может быть неизгибаемым.

Мы не будем, однако, останавливаться на исследовании этого случая. Понятие деформации подклеивания естественно обобщается на бесконечные многоугольники, а вместе с ним на указанный случай переносится также основанный на этой деформации метод.

Рассматривая бесконечные многогранники, получаемые из полных с кривизной 2π удалением конечных или бесконечных кусков, и применяя соображения, вполне аналогичные применённым выше к конечным многогранникам, читатель сам сможет формулировать и доказать теоремы об изгибании таких многогранников, подобные теоремам 1—7. В частности, подобно сказанному в теоремах 3 и 4, такие многогранники могут быть как изгибаемыми, так и неизгибаемыми.

Для многогранников второго типа вопрос решается однозначно: все они изгибаемы. Для полных многогранников все возможные их изгибания определяются теоремой, вытекающей из теоремы Оловянишникова, доказанной в § 5 главы IV.

Теорема 8. *Пусть P_0 — бесконечный полный выпуклый многогранник с кривизной $<2\pi$, V_0 — его предельный угол и G_0 — образующая угла V_0, предельная для некоторого данного луча L_0 на P_0. Пусть V_1 — многогранный угол, изометричный V_0, и G_1 — его образующая. Тогда*

1) *угол V_0 может быть изогнут в V_1 так, что образующая G_0 перейдёт в G_1;*

2) *это изгибание угла V_0 однозначно определяет изгибание многогранника P_0 в многогранник P_1 с предельным углом V_1, причём образующая G_1 будет предельной для луча на P_1, соответствующего по изометрии лучу L_0.*

Других изгибаний многогранника P_0 нет.

То, что изгибание V_0 в V_1 однозначно определяет изгибание P_0 в P_1, означает, что семейству углов V_t с образующими G_t отвечает определённое семейство многогранников P_t, если пренебрегать переносом, который не меняет ни предельного угла, ни предельной образующей.

Первое утверждение об изгибаемости многогранного угла достаточно очевидно и его строгое доказательство не представляет труда. Докажем второе утверждение.

Пусть семейство многогранных углов V_t с отмеченными образующими G_t осуществляет изгибание угла V_0 с образующей G_0 в V_1, G_1 *). По теореме Оловянишникова (теорема § 5 гл. IV и теорема 3 § 4 гл. III) каждому V_t с отмеченной образующей G_t отвечает и притом единственный многогранник P_t, изометричный P_0, с условием соответствия луча L_0 образующей G_t и так же ориентированный, как P_0. (Ориентация при непрерывном изгибании должна, конечно, сохраняться.) То,

*) Не исключается, что углы V_0, V_1 равны, но образующие G_0, G_1 занимают на них разное положение. Тогда, считая V_1 совпадающим с V_0, сводим изгибание V_0 в V_1 к такому изгибанию V_0 самого в себя, при котором образующая G_0 переходит в G_1.

что многогранники P_t образуют *непрерывное* семейство, доказывается так же, как аналогичное утверждение в теореме 2, на основании теоремы единственности (§ 4 гл. III).

Так как, обратно, всякое изгибание многогранника порождает изгибание его предельного угла, то никаких других изгибаний многогранник P_0 не допускает.

10. Отметим ещё два вопроса. Можно дать простые примеры изометричных выпуклых многогранников, не допускающих изгибания друг в друга с сохранением выпуклости (найдите такие примеры). Тем не менее можно рассчитывать, что верна следующая теорема: два достаточно близких изометричных многогранника изгибаемы один в другой. Точнее, если выпуклые многогранники P_i, изометричные многограннику P, сходятся к P, то P изгибаем в любой из многогранников P_i с достаточно большим номером.

Второй вопрос относится к невыпуклым многогранникам. Не известно ни одного примера замкнутого многогранника, допускающего непрерывные изгибания без переламывания граней. (Известные примеры представляют многогранники с самопересечениями; они, очевидно, не допускают изгибаний, реально осуществимых на моделях.) Наиболее интересной проблемой теории многогранников представляется решение вопроса: все ли замкнутые многогранники неизгибаемы без переламывания граней или можно указать примеры изгибаемых?

§ 3. Обобщения к главам IV и V

1. При перенесении теорем глав IV и V на неэвклидовы трёхмерные пространства Лобачевского и сферическое — речь должна идти о развёртках, образованных из многоугольников в смысле геометрии соответствующего пространства. Так, в сферическом пространстве это будут обычные сферические многоугольники на сфере, радиус которой равен радиусу данного сферического пространства.

Имея в виду это условие, *теорему существования замкнутого выпуклого многогранника с данной развёрткой можно формулировать в пространстве Лобачевского или в сферическом без каких бы то ни было изменений.* Доказательство её также остаётся почти неизменным, потому что по существу оно не связано с аксиомой параллельности. Изменения, которые нужно внести в доказательство, изложенное в §§ 1—3 главы IV, мы предоставляем сделать читателю. Здесь же мы лишь укажем те пункты доказательства, которые нуждаются в таком изменении.

Прежде всего отметим, что доказательство значительно проще переносится в пространство Лобачевского, чем в сферическое. Глубокая причина этого состоит в том, что аксиоматика сферической геометрии отличается от эвклидовой не только отсутствием аксиомы параллельности, но также аксиомами сочетания и порядка; например, в двухмерном сферическом пространстве, или, попросту, на сфере две диаметрально противоположные точки соединимы бесконечным числом различных «прямых», роль которых играют дуги больших кругов. Последнее приводит, в частности, к тому, что в сферическом пространстве неверно утверждение о разбиваемости всякого многоугольника диагоналями на треугольники (в этом нетрудно убедиться на примере).

Обращаясь к лемме 1 § 1 главы IV, замечаем следующее. Утверждение, что число вершин развёртки не менее трёх, верно и в пространстве Лобачевского. Действительно, так как пространство Лобачевского имеет отрицательную кривизну, то полная (или интегральная) кривизна развёртки, равная попрежнему 4π (тот факт, что полная кривизна развёртки, гомеоморфной сфере, равна 4π, вовсе не зависит от кривизны пространства), слагается из положительных кривизн вершин и отрицательных кривизн многоугольников развёртки. Поэтому сумма кривизн вершин больше 4π, а так как кривизна каждой вершины меньше 2π, то вершин не меньше трёх. В случае сферического пространства то же рассуждение показывает, что сумма кривизн вершин меньше 4π. В этом случае существуют развёртки, вовсе не имеющие вершин (многогранник с такой развёрткой есть просто сфера), а также развёртки с двумя вершинами (всякую такую развёртку можно представить в виде двуугольника, склеенного по сторонам); развёрток с одной вершиной, как можно показать, не существует. Теперь, чтобы получить в неэвклидовом пространстве утверждение, заменяющее лемму 1, достаточно непосредственно убедиться в том, что все развёртки с числом вершин, не бо́льшим трёх, реализуемы.

При доказательстве леммы 2 следует также различать два случая. В пространстве Лобачевского доказательство повторяется дословно. В сферическом пространстве, как уже упоминалось, неверна теорема о триангулируемости многоугольника. Однако, несмотря на это, лемма 2 оказывается справедливой, но для её доказательства нужно привлечь некоторые дополнительные соображения. Подробно разобраться во всём этом — интересная задача, которая предлагается читателю.

Доказательство леммы 3 требует лишь незначительных изменений. Доказательство леммы 4 основано на том факте, что угол треугольника является существенно монотонной функцией противолежащей стороны, что верно и в неэвклидовых пространствах. Наконец, применение теоремы о единственности многогранника с данной развёрткой не вызывает сомнений, поскольку в n° 4 § 6 главы III объяснено, что доказательство этой теоремы переносится в неэвклидовы пространства дословно, если из рассмотрения исключаются «двухвершинники». Но они нас не интересуют потому, что теорема единственности применяется лишь к многогранникам, имеющим не менее трёх вершин.

Таким образом, прослеживая доказательство от начала до конца и внося соответствующие изменения, читатель докажет существование многогранника с данной развёрткой и для неэвклидовых пространств.

Вместе с указанной теоремой на эти пространства обобщаются её следствия, полученные в § 1 настоящей главы относительно склеивания конечных многогранников с границей (общие теоремы 1 и 7 § 1, теорема 2 о шапке) и в § 2 относительно изгибаний конечных многогранников (теоремы 1—7 § 2). Здесь уже ничего не нужно менять в доказательствах.

В сферическом пространстве нет бесконечных многоугольников, а потому там не может стоять вопрос о склеивании бесконечных многогранников.

В пространстве же Лобачевского, напротив, этот вопрос оказывается бесконечно богаче по содержанию, чем в эвклидовом пространстве. В этом последнем, не считая бесконечных призм, всякий полный бесконечный выпуклый многогранник гомеоморфен плоскости. В пространстве же Лобачевского, как уже было указано в § 6 главы III, существуют бесконечные выпуклые многогранники, гомеоморфные любой плоской области, ограниченной конечным числом кривых.

В связи с этим теорема о существовании бесконечного многогранника с данной развёрткой выглядит в пространстве Лобачевского следующим образом:

Из всякой развёртки, составленной из конечных и бесконечных многоугольников на плоскости Лобачевского, не имеющей границы и гомеоморф-

ной любой плоской области *), *можно склеить выпуклый многогранник в соответствующем* **) *пространстве Лобачевского.*

Доказательство этой теоремы осуществляется на основании теоремы о замкнутом многограннике. Именно, из развёртки R вырезается конечная часть R' так, что из неё можно склеить замкнутый многогранник, после чего, расширяя эту часть R' на всю развёртку R, получаем в пределе бесконечный многогранник, склеенный из развёртки R ***).

Теорема Оловянишникова не может быть распространена в пространство Лобачевского, пока остаётся неизученным понятие предельного угла многогранника в этом пространстве. Об этой задаче мы говорили уже в § 6 главы III. Её решение и тем более полное исследование изгибаний всех бесконечных многогранников любого топологического строения в пространстве Лобачевского представляют достаточно интересную проблему.

2. К обобщению теорем о существовании многогранника с данной развёрткой на кривые поверхности можно подходить с двух точек зрения.

Первая, более конкретная, но зато и менее общая, точка зрения состоит в том, что вместо развёртки, составленной из плоских многоугольников, можно рассматривать «развёртку», образованную конечным числом кусков произвольных выпуклых поверхностей. Под «развёрткой» понимается тогда совокупность кусков $G_1, \ldots, G_n$ выпуклых поверхностей со следующими свойствами:

1) Каждый кусок G_i гомеоморфен многоугольнику, конечному или бесконечному, и ограничен спрямляемыми кривыми.

Граница каждого куска произвольно разбивается на отрезки — стороны, точки деления считаются вершинами.

2) Стороны кусков G_i «склеиваются», т. е. отождествляются друг с другом попарно так, что отождествляемые отрезки всегда имеют равные длины. Некоторые стороны могут не склеиваться с другими, и тогда они образуют границу «развёртки».

В частном случае эти G_i могут быть кусками плоскости.

Мы говорим, что поверхность F склеена из кусков G_i, если она может быть разбита на части F_i так, что

1) Каждый кусок G_i может быть изометрически отображён на соответствующую часть F_i поверхности F (т. е. так, что при этом каждой кривой на G_i отвечает на F кривая той же длины).

2) При таких отображениях отождествляемые отрезки границ кусков G_i переходят в общие отрезки границ частей F_i.

Склеивание многогранника из развёртки представляет лишь частный случай склеивания в смысле данного сейчас общего определения. Другими примерами могут служить склеивания цилиндров и конусов из известных кусков плоскости или склеивание веретенообразной поверхности из полусферы.

Задача состоит в отыскании тех условий, при которых из данной «развёртки» можно склеить выпуклую поверхность того или иного вида, например замкнутую. Решение этой задачи даётся теоремой, которую я называю «теоремой о склеивании». Точная общая формулировка этой теоремы потребовала бы введения ряда определений Мы этого делать не будем, а формулируем теорему в предположении, что кривые, ограничивающие куски G_i, — кусочно-гладкие и имеют кусочно-непрерывную геодезическую кривизну.

---

*) То, что область ограничена конечным числом кривых, добавлять не нужно: это уже следует из того, что развёртка по определению содержит лишь конечное число многоугольников.

**) Здесь нужно помнить, что пространства Лобачевского различаются своей кривизной.

***) См. А. Д. Александров, Полные выпуклые поверхности в пространстве Лобачевского, Изв. Акад. наук СССР, сер. матем. 9 (1945), стр. 113, где этот приём осуществлён в применении к общему случаю не обязательно многогранной метрики.

Последняя есть не что иное, как кривизна, измеренная на самом куске G_i. Она считается положительной, если в данной точке граница обращена выпуклостью наружу от G_i, и отрицательной — в противном случае.

Для того чтобы из «развёртки» R, гомеоморфной сфере, можно было склеить замкнутую выпуклую поверхность, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) *сумма углов кусков G_i, сходящихся при отождествлении границ в одной точке — вершине, должна быть $\leqslant 2\pi$ для каждой вершины;*

2) *сумма геодезических кривизн в отождествляемых точках границ кусков G_i должна быть всюду $\geqslant 0$.*

Если стороны кусков G_i — геодезические, то геодезическая кривизна их всюду равна нулю. Последнее условие выполняется тогда автоматически и остаётся только первое условие.

Таким образом, условие склеиваемости целой выпуклой поверхности из геодезических многоугольников, вырезанных из каких-то выпуклых поверхностей, ничем не отличается от условия склеиваемости выпуклого многогранника из плоских многоугольников.

Аналогичные теоремы могут быть формулированы для «развёрток» другого топологического строения; условия 1), 2) остаются неизменными.

Эта теорема о склеивании представляет собой очень сильный инструмент исследования выпуклых поверхностей, особенно их изгибания *). Она доказывается, однако, на основе обобщения теорем о многогранниках в другом, более абстрактном направлении.

3. Эта вторая, более абстрактная, но зато и более общая точка зрения состоит в следующем. Как выяснено в § 6 главы I, задание развёртки эквивалентно заданию внутренней метрики многогранника. Метрика определяет расстояния между его точками, измеренные на самом многограннике. Если, например, развёртка R гомеоморфна сфере, то, отображая её на сферу S, мы переносим на S метрику ρ, заданную развёрткой R. Склеиванию многогранника P из развёртки R соответствует в этом смысле изометрическое отображение сферы S с метрикой ρ на многогранник P.

В связи с этим для любых поверхностей речь так же может идти о существовании поверхности с заданной метрикой.

Пусть F — поверхность и X, Y — две её точки. За расстояние $\rho_F(XY)$ точек X, Y на F принимают точную нижнюю границу длин кривых, лежащих на F и соединяющих точки X, Y. Это расстояние, рассматриваемое как функция пары точек X, Y, и есть внутренняя метрика поверхности F.

В этих терминах задача обобщения теоремы существования многогранника с данной развёрткой может быть поставлена следующим образом.

Пусть на сфере S задана непрерывная функция пары точек $\rho(XY)$ — абстрактная метрика, удовлетворяющая трём необходимым для всякой метрики условиям **). Спрашивается, каковы те дополнительные, необходимые и достаточные условия, при которых сфера S с метрикой ρ может быть изометрически отображена на какую-либо замкнутую выпуклую поверхность F. То-есть, когда существует такое отображение φ сферы S на какую-либо поверхность F, что $\rho(XY)=\rho_F(\varphi(X)\varphi(Y))$, где ρ_F — внутренняя метрика поверхности F?

Аналогичный вопрос можно ставить для бесконечных поверхностей F, задавая при этом метрику ρ на плоскости.

---

*) См. А. Д. Александров, Метод склеивания в теории поверхностей. Доклады Акад. наук СССР, 1947, т. 57, № 9; А. Д. Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, гл. VIII, § 1 и гл. IX, § 3.

**) Легко проверяется, что ρ_F удовлетворяет этим трём условиям: 1) $\rho(XY)=0$ тогда и только тогда, когда $X=Y$, 2) $\rho(XY)=\rho(YX)$ и 3) $\rho(XY)+\rho(YZ)\geqslant\rho(XZ)$.

Эти вопросы полностью решены для общих выпуклых поверхностей как в эвклидовом пространстве, так и в пространствах Лобачевского и сферическом. Я не буду, однако, излагать здесь соответствующие результаты, отсылая читателя к моей книге «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» *).

Если ограничиваться регулярными поверхностями, то их метрику можно задавать линейным элементом с определённой гауссовой кривизной K. В таком плане теорема существования замкнутой выпуклой поверхности с данным линейным элементом положительной кривизны была указана ещё в 1916 г. Г. Вейлем и доказательство её было завершено Г. Леви в 1938 г. **). Эта специальная проблема известна поэтому под именем проблемы Вейля. О поверхности, имеющей данную метрику, говорят, что она реализует эту метрику.

Формулируем общую теорему о реализуемости метрики, заданной линейным элементом, посредством выпуклой поверхности в пространстве постоянной кривизны K_0 (т. е. в эвклидовом при $K_0 = 0$, Лобачевского, если $K_0 < 0$, и сферическом, если $K_0 > 0$).

Пусть в области G на сфере задана метрика, определяемая линейным элементом, гауссова кривизна которого всюду $\geqslant K_0$. Пусть каждые две точки области G соединимы кратчайшей линией в смысле данной метрики. (В частности, это условие заведомо выполнено, если G есть вся сфера.) *Тогда в пространстве постоянной кривизны K_0 существует выпуклая поверхность F, реализующая данную метрику, т. е. область G с данной метрикой допускает изометрическое отображение на поверхность F.* (Полное доказательство этой теоремы пока не опубликовано.)

Доказательства теорем существования выпуклой поверхности с данной метрикой основаны прежде всего на приближении данной метрики «многогранными метриками» S_n, т. е. метриками, задаваемыми развёртками из плоских треугольников.

В силу теорем существования многогранников с данной развёрткой — метрикой ρ_n мы утверждаем существование многогранников P_n с метриками ρ_n. Предел сходящейся последовательности, выбранной из этих многогранников, даёт поверхность, имеющую предельную, т. е. как раз заданную метрику ρ ***).

Однако в случае метрики, задаваемой линейным элементом с достаточно регулярными коэффициентами, проблема существования поверхности с такой метрикой может быть формулирована как проблема существования решения некоторого дифференциального уравнения в частных производных. Именно в этом плане проблема рассматривается у Вейля и Леви.

4. Об изгибаниях выпуклых поверхностей можно доказать ряд теорем, аналогичных теоремам § 2 настоящей главы. Прежде всего укажем, что теорема Оловянишникова § 5 главы IV о бесконечных многогранниках обобщается на произвольные бесконечные выпуклые поверхности в следующем виде:

Пусть F — бесконечная полная выпуклая поверхность с полной кривизной $\omega(F) < 2\pi$. Пусть L — луч на F, т. е. бесконечная в одну сторону

---

*) Краткое изложение дано в моей статье «Геометрия и топология в Советском Союзе» (Успехи матем. наук, т. II, вып. 5 (21) (1947)), § 18, стр. 52—65.

**) См. статью Н. В. Ефимова в Успехах матем. наук, т. III, вып. 2 (24), стр. 49 и сл., где дан обзор этих работ. Перевод работы Вейля помещён в том же выпуске «Успехов» и там же даны переводы работ Леви, необходимых для завершения вейлевского доказательства.

***) В применении к простейшему случаю поверхностей в эвклидовом пространстве и метрики, заданной линейным элементом, этот метод во всех деталях изложен в моей работе «Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с данной метрикой», Матем. сборник, т. 11 (53), вып. 1 (1941). Для общего случая см. мою книгу «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей», гл. VII.

кривая, являющаяся кратчайшей между любыми двумя своими точками. Пусть поверхность F ориентирована указанием обхода некоторого контура.

Задаём произвольный выпуклый конус K с единственным условием, чтобы его кривизна (площадь сферического изображения) равнялась $\omega(F)$. На конусе K задаём произвольную образующую G.

Утверждается, что существует выпуклая поверхность F', изометричная F и такая, что 1) *K есть её предельный конус,* 2) *G есть предельная образующая луча L' на F', отвечающего по изометрии лучу L,* 3) *при сжатии поверхности F' в конус K ориентация, индуцированная на ней в силу изометрического отображения исходной поверхности F, даёт ориентацию, заданную на конусе K.*

Эта теорема доказана Оловянишниковым путём предельного перехода от многогранников *). В ней заключается утверждение, что всякая бесконечная выпуклая поверхность с кривизной $< 2\pi$ допускает нетривиальные изометрические отображения. Однако вопрос о возможности её непрерывного изгибания остаётся пока нерешённым в общем случае. А. В. Погорелов доказал, что если поверхность F имеет ограниченную удельную кривизну (см. n° 3 § 6 гл. III), то она допускает непрерывные изгибания и все они определяются изгибаниями конуса K с отмеченной образующей G. Это — полный аналог теоремы 8 § 2. Нужно думать, что тот же результат верен и без предположения об ограниченности удельной кривизны.

Из теорем об изгибаниях конечных выпуклых поверхностей укажем:

Если выпуклая поверхность, гомеоморфная кругу, такова, что каждые две её точки соединимы на ней кратчайшей линией, то такая поверхность изометрична шапке. (Определение см. в § 6 гл. III.) **)

Вероятно, такая поверхность всегда может быть непрерывно изогнута в шапку. Однако это не доказано даже для сколь угодно регулярных поверхностей.

Если из замкнутой выпуклой поверхности вырезать геодезический многоугольник, внутренность которого имеет интегральную кривизну, отличную от нуля, то оставшаяся поверхность допускает нетривиальные изометрические отображения.

Вероятно, такая поверхность всегда допускает непрерывные изгибания, даже если у неё вырезается не многоугольник, а какая угодно область ненулевой кривизны.

Однако это доказано пока лишь для трижды непрерывно дифференцируемых поверхностей.

Доказательства приведённых теорем основаны на теореме о склеивании, т. е. по существу на том же методе подклеивания, который применялся для многогранников в § 2.

5. Теперь рассмотрим вопрос об обобщении наших теорем на пространства с числом измерений больше трёх. Для определённости будем говорить о трёхмерных многогранниках в четырёхмерном эвклидовом пространстве.

Соответственно, развёртка должна слагаться из трёхмерных многогранников Q_i с отождествляемыми («склеиваемыми») гранями. В рёбрах такой развёртки сходится по нескольку многогранников Q_i, и для того, чтобы речь могла идти о развёртке именно выпуклого многогранника, необходимо, чтобы сумма двугранных углов этих многогранников Q_i вокруг каждого ребра не превосходила 2π.

Это условие, однако, *вовсе не достаточно* для того, например, чтобы из удовлетворяющей ему развёртки (гомеоморфной сфере) можно было склеить замкнутый выпуклый многогранник. Причину этого мы сейчас выясним.

---

*) С. П. Оловянишников, Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей, Матем. сборник, т. 18 (60); 3 (1946), стр. 429—440.

**) См. мою «Внутреннюю геометрию выпуклых поверхностей», гл. IX, § 4 и гл. VIII, § 2.

Пусть A — вершина развёртки R; она должна быть вершиной многогранника P, склеенного из R. Точки на P, равноудалённые от A, образуют на трёхмерной сфере с центром A замкнутый выпуклый многогранник Q_A. Этот многогранник определяет многогранный угол при вершине A многогранника P. Развёртка этого многогранника Q_A образуется в развёртке R точками, равноудалёнными от её точки A. Но замкнутый выпуклый многогранник Q_A определяется своей развёрткой однозначно. Поэтому мы приходим к следующему результату: одни сколь угодно малые окрестности вершин развёртки полностью определяют многогранные углы многогранника, который из неё можно склеить. Если вершины A и B соединены по рёбрам, то многогранные углы при них имеют общие грани вокруг этого ребра. Соответственно сферические многогранники Q_A, Q_B должны иметь равные плоские и двугранные углы при их вершинах, отвечающих ребру AB. Между тем, двугранные углы многогранника определяются его развёрткой в целом и они будут, вообще говоря, меняться, если изменять её даже в той части, которая, так сказать, не имеет никакого отношения к ребру AB.

Это приводит к заключению, что даже развёртка с границей, имеющая всего лишь две вершины, может не реализоваться в виде многогранника. В этом можно непосредственно убедиться на простых примерах. Развёртка с двумя вершинами получается, если из любой развёртки вырезать окрестность ребра. Следовательно, *даже в окрестности ребра трёхмерная развёртка может не склеиваться в четырёхмерном пространстве.* Тем более то же верно в случае большего числа измерений.

С другой стороны легко доказывается теорема:

Для того чтобы развёртка, гомеоморфная трёхмерной сфере и составленная из тетраэдров (что есть, очевидно, общий случай) склеивалась в выпуклый многогранник, достаточно, чтобы она склеивалась в окрестности каждого своего ребра.

Таким образом, весь вопрос сводится к условиям склеиваемости развёртки в окрестность ребра. Нахождение таких условий представляется трудным, если не безнадёжным делом.

6. Для регулярных $(n-1)$-мерных поверхностей в n-мерном пространстве дело обстоит проще. Условия реализуемости малой области $(n-1)$-мерного абстрактного риманова многообразия в виде поверхности в n-мерном пространстве рассматривались давно и исчерпывающее их исследование было дано Ниной Аркадьевной Розенсон *). Известно, далее, что, вообще говоря, при $n > 3$ $(n-1)$-мерная поверхность в n-мерном пространстве вовсе не изгибаема даже в малых частях. Отсюда можно вывести:

Для того чтобы риманова метрика со всюду положительной кривизной, заданная на $(n-1)$-мерной сфере, в целом реализовалась поверхностью в n-мерном пространстве, необходимо и достаточно, чтобы она реализовалась в каждой сколь угодно малой области. Условия же реализуемости в малом известны, и тем самым вопрос решается полностью. Для многообразия, отличного от сферы, такой результат может и не иметь места, потому что его вывод основан на односвязности сферы.

*) Н. А. Розенсон, О римановых пространствах класса 1, часть I, Известия Акад. наук СССР, сер. матем., 4 (1940), 181—192; часть II, там же, 5 (1941), 325—352; часть III, там же, 7 (1943), 253—284. Начальные сведения имеются в книге Эйзенхарта «Риманова геометрия» (1948).

ГЛАВА VI

УСЛОВИЯ РАВЕНСТВА МНОГОГРАННИКОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ

§ 1. Леммы о выпуклых многоугольниках

1. Будем говорить, что многоугольник P_1 помещается в многоугольнике P_2, если все точки многоугольника P_1 лежат в P_2. Если же, кроме того, многоугольник P_2 не совпадает с P_1, то мы будем говорить, что многоугольник P_1 помещается внутри P_2. Под многоугольником всюду будет пониматься конечный плоский выпуклый многоугольник, кроме леммы 4а, где речь идёт о бесконечных выпуклых многоугольниках. Мы будем рассматривать пары выпуклых многоугольников и сравнивать длины их сторон с параллельными внешними нормалями. Для краткости эти стороны будем называть просто параллельными. При этом если для стороны l одного многоугольника нет параллельной ей стороны другого многоугольника, то мы будем считать, что она есть, но имеет нулевую длину: она вырождается в ту вершину, где опорная прямая параллельна l.

Так как мы будем сравнивать только параллельные стороны многоугольников, то часто будем опускать указание на это. Наконец, мы будем ещё говорить, что стороны $l_1, \ldots, l_n$ больше сторон $l'_1, \ldots, l'_n$, если $l_1 \geqslant l'_1, \ldots, l_n \geqslant l'_n$ и хотя бы для одной пары $l_i > l'_i$. При аналогичных условиях будем говорить, что стороны $l'_1, \ldots, l'_n$ меньше сторон $l_1, \ldots, l_n$.

Все перечисленные условия будут использоваться во всех параграфах данной главы.

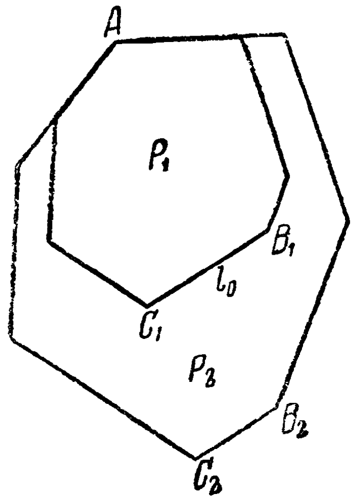
2. Лемма 1. *Если у многоугольника P_1 все стороны, кроме, быть может, одной l_0, меньше, чем у P_2, то P_1 можно параллельным переносом поместить внутри P_2.*

Возьмём на P_1 и P_2 вершины A_1 и A_2, через которые проходят опорные прямые с внешними нормалями, антипараллельными нормали к l_0, и перенесём P_1 параллельно так, чтобы вершина A_1 совпала с A_2*). Покажем, что тогда P_1 окажется внутри P_2.

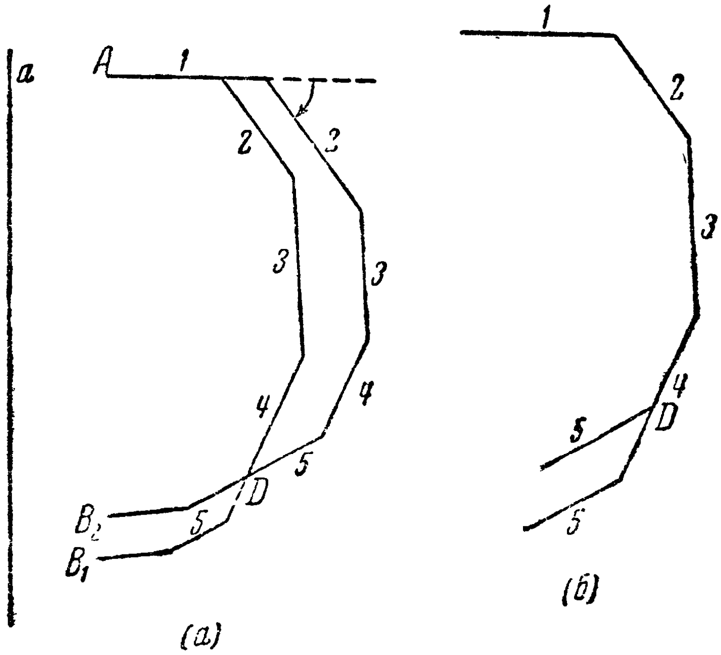
*) Если такие опорные прямые проходят вдоль сторон, то берём любую пару соответственных их вершин.

Вершина $A = A_1 = A_2$ и сторона l_0 делят границу многоугольника P_1 на две ломаные AB_1 и AC_1 (черт. 114). Им отвечают на границе многоугольника P_2 две ломаные AB_2 и AC_2. Докажем, что ломаная AB_1 не может выходить из многоугольника P_2, пересекая ломаную AB_2.

Пусть $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \ldots$ и $l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \ldots$ — последовательные стороны ломаных AB_1 и AB_2, начиная от вершины A. Так как $l_1^{(1)} \leqslant l_1^{(2)}$ и т. д.,



Черт. 114.



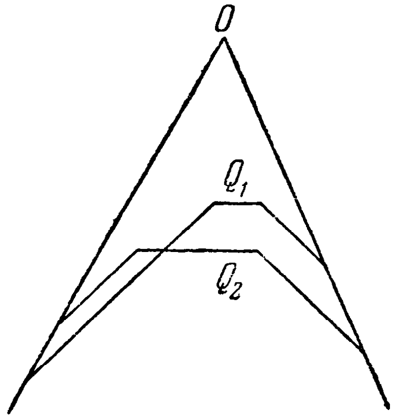
Черт. 115.

то во всяком случае первый отрезок ломаной AB_1 проходит в P_2. Допустим, что ломаная AB_1 выходит из P_2, пересекая AB_2 в точке D (черт. 115, *а*). Пусть эта точка принадлежит сторонам $l_h^{(1)}$ и $l_k^{(2)}$. Стороны $l_i^{(1)}$ и $l_i^{(2)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ параллельны, и переход от l_i к l_{i+1} связан с поворотом на некоторый угол. Поэтому $l_h^{(1)}$ может пересечь $l_k^{(2)}$ только в том случае, если угол её поворота меньше, т. е. если $h < k$.

Спроектируем теперь ломаные AB_1 и AB_2 на прямую a, перпендикулярную к стороне l_0. Так как эти ломаные пересекаются в точке D, то проекции их отрезков AD равны. Вместе с тем $h < k$, и потому проекция отрезка ломаной AB_1, составленного из сторон $l_1^{(1)}$, $l_2^{(1)}, \ldots, l_k^{(1)}$, будет больше проекции соответствующего отрезка ломаной AB_2. Так как стороны обеих ломаных параллельны, то это возможно только в том случае, когда среди сторон $l_i^{(1)}$ имеются бо́льшие, чем $l_i^{(2)}$. А это противоречит условию леммы. Следовательно, ломаная AB_1 не может пересекать AB_2.

Особый случай изображён на черт. 115, *б*. Все стороны $l_i^{(1)}$ и $l_i^{(2)}$ совпадают вплоть до $i = k - 1$, а сторона $l_k^{(1)}$ выходит из P_2. Этот случай приводит к тому же противоречию: $l_k^{(1)}$ оказывается больше $l_k^{(2)}$.

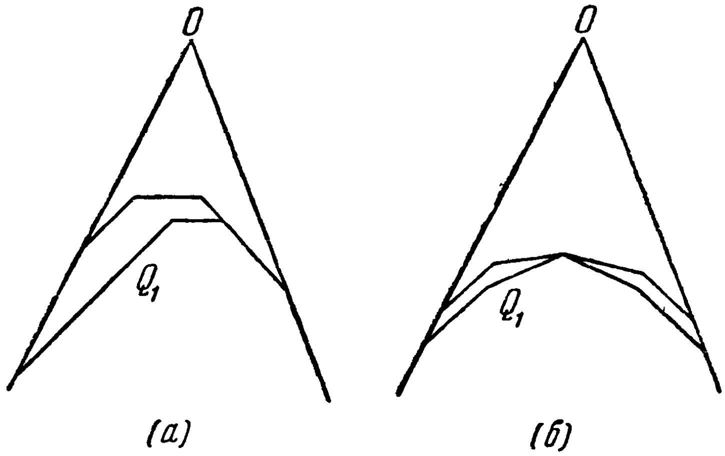
Таким образом, ломаная AB_1 не может выходить из P_2, пересекая AB_2. Точно так же, конечно, ломаная AC_1 не может выходить из P_2, пересекая AC_2. Но сторону B_2C_2 (параллельную l_0) они также не могут пересекать. Иначе, например, проекция ломаной AB_1 на прямую a была бы больше проекции ломаной AB_2, вопреки тому, что стороны у AB_1 меньше сторон у AB_2. Итак, ломаные AB_1 и AC_1 лежат в P_2, а следовательно, и вся граница многоугольника P_1 лежит в P_2. Границы многоугольников P_1 и P_2 не могут совпадать, потому что у P_1 имеются меньшие стороны. Поэтому P_1 лежит внутри P_2, что и требовалось доказать.



Черт. 116.

Лемма 2. *Пусть две выпуклые ломаные Q_1 и Q_2 лежат в угле с вершиной O, имеют концы на его сторонах и обращены выпуклостью к O* (черт. 116). *Тогда, если какой-нибудь луч из O встречает Q_1 раньше Q_2, то у Q_1 есть сторона, меньшая, чем у Q_2.* (Речь идёт о параллельных сторонах, причём читатель должен помнить условие о сторонах нулевой длины.)

Для доказательства будем подобно сжимать Q_2 к точке O. Стороны ломаной Q_2 будут при этом уменьшаться. В тот момент, когда Q_2 окажется в части угла, ограниченной ломаной Q_1, но будет ещё соприкасаться с Q_1, любая сторона, по которой касаются Q_1 и Q_2, будет у Q_2 не меньше, чем у Q_1 (черт. 117, *а*). Поэтому до подобного сжатия эта сторона ломаной Q_2 была больше, чем у Q_1, что и требовалось доказать.



Черт. 117.

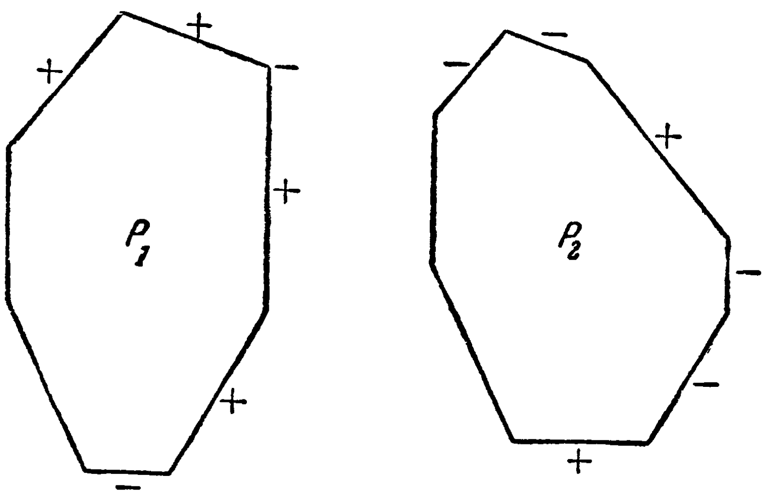
Может случиться, что в указанный момент Q_1 и Q_2 соприкасаются только в одной вершине (черт. 117, *б*). Но тогда, как очевидно из чертежа, в этой вершине сходятся такие стороны ломаной Q_2, которым нет параллельных у Q_1, т. е. этим сторонам соответствуют на Q_1 стороны нулевой длины. Следовательно, эти стороны у Q_2 больше параллельных им сторон у Q_1.

3. Следующая лемма будет непосредственно использована при установлении условий равенства многогранников в §§ 3 и 4.

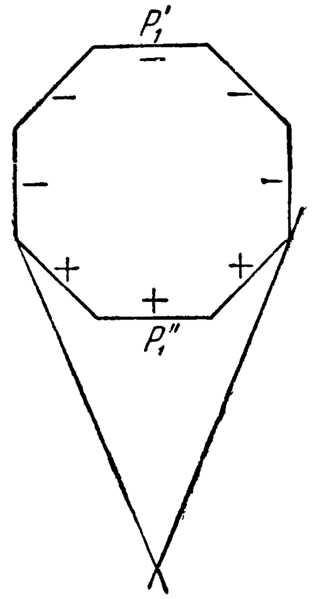
Лемма 3. *Если два выпуклых многоугольника нельзя поместить один в другом путём параллельного переноса, то разности длин их параллельных сторон меняют знак не менее четырёх раз при обходе вокруг любого из этих многоугольников.*

Пусть наши многоугольники будут P_1 и P_2 (черт. 118). Отнесём стороне многоугольника P_1 знак плюс, если она больше соответствующей стороны многоугольника P_2, и минус — в обратном случае (помня условие о сторонах нулевой длины), а в случае равенства обеих сторон оставим сторону P_1 неотмеченной. Сторонам многоугольника P_2 сопоставим противоположные знаки. Нужно доказать, что при обходе вокруг P_1 (или P_2) будет не менее четырёх перемен знака.

Допустим, что перемен знака нет вовсе. Тогда, скажем, все стороны многоугольника P_1 меньше или равны сторонам многоугольника P_2 *) и по лемме 1 P_1 можно поместить в P_2. Это, однако, противоречит условию, а потому перемены знака должны быть. Так как число их, очевидно, чётное, то достаточно доказать, что не может быть только двух перемен знака.



Черт. 118.



Черт. 119.

Допустим, однако, что имеется только две перемены знака. Тогда границы многоугольников P_1 и P_2 разбиваются каждая на две ломаные P_1', P_1'' и P_2', P_2'': у P_1' стороны меньше, чем у P_2', а у P_1'' стороны больше, чем у P_2'', т. е. сторонам P_1 отнесены минусы, а сторонам P_1'' — плюсы (черт. 119).

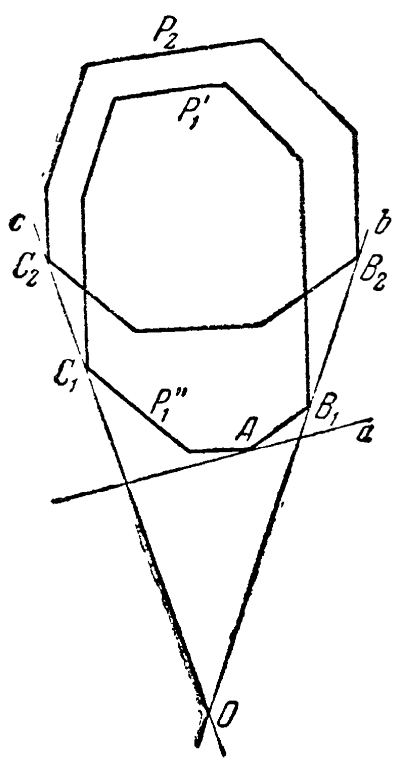
Сумма углов между внешними нормалями к смежным сторонам выпуклого многоугольника равна 360°. Когда P_1 разбивается на две ломаные P_1' и P_1'', то исключаются углы между нормалями к сторонам, смежным у этих ломаных. Поэтому по крайней мере для одной из ломаных P_1' и P_1'' сумма углов между внешними нормалями меньше 180°. Допустим, что это имеет место для P_1'', а следовательно, и для P_2'', так как их стороны имеют параллельные внешние нормали. В таком случае, если провести две опорные прямые к P_1'', то P_1'' будет обращена выпуклостью к вершине угла, образованного этими прямыми (черт. 119).

---

*) Помним, что сравниваются только стороны с параллельными внешними нормалями и что мы считаем стороны $l_1, \ldots, l_n$ меньше сторон $l_1', \ldots, l_n'$, если $l_1 \leqslant l_1', \ldots, l_n \leqslant l_n'$ и хотя бы для одной пары $l_i < l_i'$.

Если бы сумма углов между внешними нормалями к сторонам ломаной P_1'' была больше 180°, то она была бы меньше 180° для P_1'. Тогда, переменив обозначения многоугольников, мы получили бы всё-таки, что сумма углов между внешними нормалями у P_1'' меньше 180°. Следовательно, можно считать, что эта сумма углов меньше 180° именно у P_1''. Нам важно здесь, что стороны у P_1'' больше, чем у P_2''.

Стороны у P_1' меньше, чем у P_2'. Соединив прямолинейным отрезком концы ломаной P_1' и точно так же концы ломаной P_2', получим два выпуклых многоугольника. По лемме 1 первый из них можно поместить во втором. Следовательно, можно так параллельно перенести P_1, что ломаная P_1' окажется внутри P_2. Тогда ломаная P_1'' должна будет выступать из P_2, так как по условию P_1 нельзя поместить в P_2. Теперь на P_1'' найдётся точка A, через которую проходит опорная прямая a к P_1, не пересекающая P_2 *). Перемещая эту точку по P_1'' сначала в одну, а потом в другую сторону и вращая вместе с тем опорную прямую, мы получим две прямые b и c, опорные как для P_1, так и для P_2 (черт. 120). Эти прямые касаются P_1 в вершинах B_1, C_1, принадлежащих P_1'', потому что P_1' лежит внутри P_2. А так как стороны, а тем самым и опорные прямые к P_1'' и P_2'' соответственно параллельны, то b и c касаются P_2 в вершинах B_2, C_2, принадлежащих P_2''.



Черт. 120.

Итак, мы имеем следующее положение: ломаные B_1C_1 и B_2C_2, являющиеся частями ломаных P_1'' и P_2'', лежат концами на прямых b и c, образующих угол с вершиной O. Обе ломаные обращены выпуклостью к O, так как суммы углов между внешними нормалями к P_1'', а также к P_2'' меньше 180°, и потому угол поворота опорной прямой a от положения b до положения c меньше 180°.

На ломаной B_1C_1 есть точка A, через которую проходит опорная прямая a, не пересекающая P_2. Поэтому луч, идущий из O в точку A, встречает B_1C_1 раньше, чем B_2C_2.

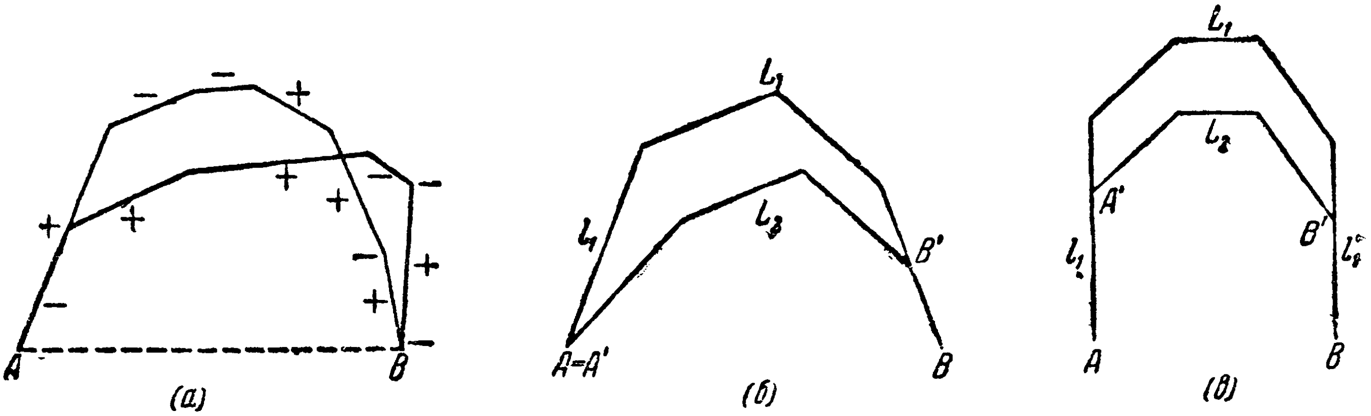
Применяя теперь лемму 2, заключаем, что у ломаной B_1C_1 имеются стороны, меньшие, чем у B_2C_2. Значит, у P_1'' имеются стороны, меньшие, чем у P_2''. Это, однако, противоречит предположению о том, что сто-

*) Так как P_1 выступает из P_2, то найдётся прямая d, опорная к P_2 и пересекающая P_1. Проведём прямую a, опорную к P_1, параллельную d и лежащую по ту сторону от d, по которую не лежит P_2. Эта прямая a и будет такая, какая нам нужна.

роны ломаной P_1'' больше сторон ломаной P_2''. Следовательно, предположение о том, что на многоугольнике P_1 имеются только две перемены знака, невозможно, и лемма доказана.

4. Следующая лемма понадобится нам в § 4 при рассмотрении бесконечных многогранников.

Лемма 4. *Пусть две выпуклые ломаные имеют общие концы и пусть внешние нормали к их сторонам направлены в одну полуплоскость**) (черт. 121). *Тогда, если эти ломаные не совпадают, то при прохождении от одного конца ломаных к другому разности длин их параллельных сторон меняют знак не менее двух раз,*



Черт. 121.

кроме одного исключительного случая, когда крайние стороны параллельны, а прочие стороны ломаных соответственно равны (черт. 121, *в*).

(Здесь, как и раньше, подразумевается условие: если на одной ломаной нет стороны, параллельной стороне другой ломаной, то считается, что она есть, но имеет длину нуль; параллельными на двух ломаных считаются стороны с параллельными внешними нормалями.)

Рассмотрим две несовпадающие ломаные L_1, L_2, удовлетворяющие условиям леммы. Проведя отрезок AB, соединяющий их концы, получим два выпуклых многоугольника P_1, P_2 с общей стороной AB. Поскольку ломаные L_1, L_2 не совпадают, для этих многоугольников имеются только две возможности:

1) Ни один из них не помещается в другом (черт. 121, *а*).

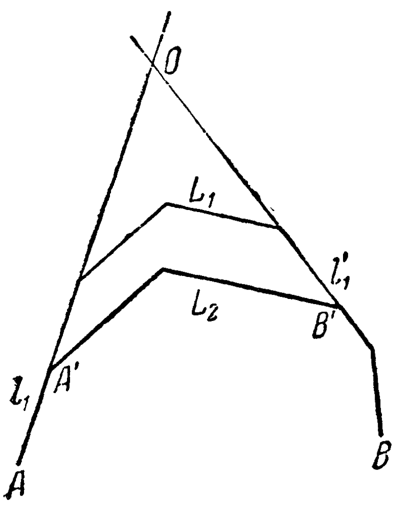
2) Один из них помещается внутри другого (черт. 121, *б*, *в*).

В первом случае, как очевидно, никакой параллельный перенос не позволит поместить один многоугольник внутри другого. Поэтому согласно лемме 3 разности длин сторон этих многоугольников меняют знак не менее четырёх раз. Сторона AB у них общая и ей не соответствует никакой знак. Поэтому, исключив её, мы исключим самое большее одну перемену знака, могущую иметь место при переходе

*) Полуплоскость содержит ограничивающую прямую. Ломаные могут иметь стороны с антипараллельными нормалями, направленными как раз вдоль этой прямой.

через эту сторону. Останется по крайней мере три перемены знака, относящиеся уже к самим данным ломаным.

Допустим теперь, что один из многоугольников, скажем многоугольник, ограниченный ломаной L_2, помещается внутри другого — P_1. Тогда, идя по ломаной L_2, начиная с её конца A, мы найдём такую её точку A', где она входит вовнутрь многоугольника P_1 (черт. 121, *в*). Не исключено, конечно, что это происходит в самой точке A, так что $A' = A$ (черт. 121, *б*). На ломаной L_1 точка A' либо лежит внутри некоторой стороны l_1, либо является началом некоторой стороны l_1. В первом случае соответствующая сторона l_2 ломаной L_2 короче l_1. Во втором случае на ломаной L_2 вовсе нет стороны, параллельной l_1; но тогда мы считаем, что она есть, но имеет нулевую длину. Следовательно, так или иначе $l_1 > l_2$.



Черт. 122.

Проходя ломаную L_2, начиная с другого её конца B, мы точно так же найдём точку B' и пару параллельных сторон, из которых сторона ломаной L_1 больше стороны ломаной L_2: $l'_1 > l'_2$.

Следовательно, с обоих концов ломаной L_2 мы прежде всего подходим к сторонам, отмеченным на ней знаком минус, согласно знаку разности $l_2 - l_1$ и $l'_2 - l'_1$. Стороны l_1, l'_1 (а значит, и l_2, l'_2) различны; иначе точки A', B' принадлежали бы одной стороне, и ломаная L_2 никак не могла бы заходить внутрь многоугольника P_1 в обеих этих точках, будучи вместе с тем выпуклой.

Теперь будем различать два случая:

1) Стороны l_1, l'_1, а значит, и l_2, l'_2 не параллельны.

2) Эти стороны параллельны, т. е. их внешние нормали антипараллельны.

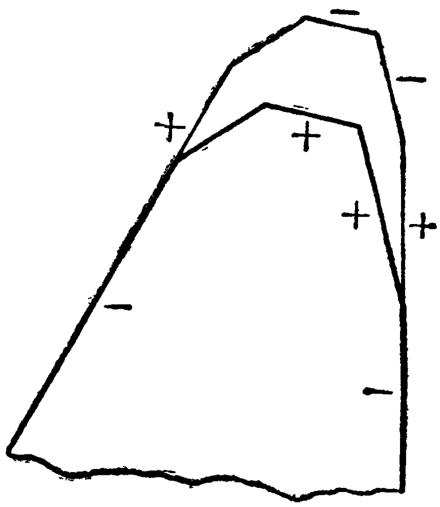
В первом случае продолжаем стороны l_1, l'_1 до их пересечения (черт. 122). Тогда отрезки $\widehat{A'B'}$ наших ломаных L_1, L_2 окажутся лежащими в угле с вершиной O, причём ломаная L_1 будет проходить ближе к вершине O, чем ломаная L_2. В таком случае согласно лемме 2 на отрезке $\widehat{A'B'}$ ломаной L_2 имеются стороны более длинные, чем параллельные им стороны на L_1. Этим сторонам на L_2 согласно нашему правилу относится знак плюс. Итак, оказывается, что на ломаной L_2 между крайними сторонами l_2, l'_2, отмеченными минусами, имеется по крайней мере одна сторона, отмеченная плюсом, что даёт не менее двух перемен знака.

Теперь остаётся рассмотреть тот случай, когда стороны l_1, l'_1, а вместе с ними и l_2, l'_2 параллельны. Тогда, так как внешние нормали к сторонам наших ломаных идут по условию в одну полуплоскость, то стороны l_1, l'_1 (l_2, l'_2) являются крайними сторонами ломаной L_1 (L_2). Стороны l_1, l_2 исходят из общей точки A, но так как $l_1 > l_2$, то l_2 составляет лишь часть l_1. Аналогичное положение имеем для сторон l'_1, l'_2.

Прибавим к сторонам l_2, l'_2 меньшую из разностей $l_1 - l_2$, $l'_1 - l'_2$. Тогда ломаная L_2 заменится новой $\overline{L}_2$, у которой хотя бы одна крайняя сторона совпадает с крайней стороной ломаной L_1. Число перемен знаков разностей сторон ломаных L_1, L_2 при этом, очевидно, не увеличится. После этого остаются две возможности:

1) Ломаные L_1, $\overline{L}_2$ совпадут, а это и будет тот исключительный случай, который оговорен в лемме.

2) Ломаные L_1, $\overline{L}_2$ не совпадут. Но в таком случае, исключая их совпавшие крайние стороны, мы получим две ломаные, у которых крайние стороны не параллельны. А тогда можно применить все предыдущие рассуждения, так что число перемен знака для ломаных L_1, $\overline{L}_2$ оказывается не меньше двух*). А так как для ломаных L_1, L_2 число перемен знака не меньше, чем для L_1, $\overline{L}_2$, то оно тем более не меньше двух. Таким образом, лемма доказана.



Черт. 123.

Этой лемме мы придадим ещё другую формулировку, как раз ту, в которой она будет применена при рассмотрении бесконечных многогранников. Здесь речь будет идти о бесконечных многоугольниках с налегающими бесконечными сторонами. При этом мы будем считать одну бесконечную сторону короче другой, если она является только её частью (черт. 123). В соответствии с этим определяется знак разности бесконечных сторон.

Л е м м а 4а. *Пусть у двух бесконечных выпуклых многоугольников бесконечные стороны соответственно налегают друг на друга так, что в далёких частях многоугольники полностью налегают один на другой* (черт. 123). *Тогда, если эти многоугольники не совпадают, то разности их параллельных сторон меняют знак не менее двух раз, кроме одного исключительного случая, когда бесконечные стороны параллельны, а прочие стороны соответственно равны; в этом случае многоугольники совмещаются параллельным переносом вдоль бесконечных сторон.*

---

*) Для многоугольников, ограниченных ломаными L_1, $\overline{L}_2$ и отрезком, соединяющим их концы, рассматриваем те же два случая, что и выше: 1) многоугольники не умещаются один в другом, 2) один многоугольник лежит внутри другого.

Чтобы свести эту лемму к предыдущей, достаточно взять на бесконечных сторонах какие-нибудь точки A, B и принять их за концы ломаных L_1, L_2.

(Легко заметить, что, и обратно, лемма 4 следует из леммы 4а: стоит лишь продолжить до бесконечности крайние стороны ломаных L_1, L_2.

Заметим ещё, что если бесконечные стороны одного многоугольника не параллельны друг другу, но параллельны бесконечным сторонам другого, то их всегда можно наложить путём параллельного переноса. Если же бесконечные стороны параллельны, то для возможности их наложения нужно, чтобы расстояния между ними были равны в обоих многоугольниках. Соответственно с этим можно формулировать лемму 4а, требуя, чтобы стороны многоугольников не налегали, а только допускали наложение путём параллельного переноса.)

5. Замечание. Лемма 3 вместе с её доказательством легко обобщается на произвольные замкнутые выпуклые кривые. Пусть P — замкнутая выпуклая кривая и $l(\varphi)$ — длина дуги кривой P, состоящей из точек, через которые проходят опорные прямые с внешними нормалями, направленными в дугу φ единичной окружности E, если их отложить из центра последней. $l(\varphi)$ есть функция дуги на E. Теорема, обобщающая лемму 3, гласит:

Если две замкнутые выпуклые кривые P_1 и P_2 не могут быть помещены одна внутри другой параллельными переносами, то единичную окружность можно разбить минимум на четыре такие дуги φ_k, что $l_1(\varphi_k) - l_2(\varphi_k)$ меняет знак при переходе от одной дуги к соседней.

В случае дважды дифференцируемых кривых $l(\varphi)$, есть интеграл от радиуса кривизны по $d\varphi$. Поэтому из указанной теоремы сразу следует известная «теорема о четырёх вершинах овала»: на всяком овале (т. е. на замкнутой дважды непрерывно дифференцируемой выпуклой кривой) имеются по крайней мере два максимума и два минимума кривизны. Для доказательства достаточно за P_1 взять овал, а за P_2 — окружность той же длины*).

Аналогично лемме 3 можно доказать теорему о $2n$ вершинах овала: если овал P пересекается окружностью в $2n$ точках, то на нём имеется $2n$ «вершин», т. е. $2n$ точек, где кривизна имеет экстремум.

Точно так же, пользуясь функцией $l(\varphi)$, можно получить теоремы о выпуклых кривых, вполне аналогичные остальным доказанным выше леммам. Для бесконечных кривых (в аналоге леммы 4а) нет надобности требовать совпадения их бесконечных дуг. Более слабое необходимое условие мы предоставим найти читателю.

---

*) Ср. Бляшке, Дифференциальная геометрия, § 12. Там же указана литература об этой теореме, занимавшей в своё время многих геометров.

§ 2. О линейной комбинации многогранников

1. Выберем в пространстве начало координат O и будем определять положение любой точки X вектором $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OX}$, проведённым в неё из начала O.

Любое множество точек M задаётся как множество концов векторов $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OX}$, идущих из O в его точки X. Если ко всем векторам $\boldsymbol{x}$ прибавить один и тот же вектор $\boldsymbol{a}$, то множество M претерпит перенос на этот вектор. Если все векторы $\boldsymbol{x}$ умножить на одно и то же положительное число λ, то они удлинятся в λ раз. В результате множество M подвергнется подобному преобразованию с коэффициентом подобия λ и с центром подобия O. Новое множество мы обозначим λM.

Пусть теперь M_1, M_2 — два каких-либо множества точек, а λ_1, λ_2 — два любых данных положительных числа. Будем проводить векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ из начала в точки множеств M_1, M_2 и образовывать каждый раз вектор

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2.$$

Когда концы векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ будут пробегать независимо друг от друга множества M_1, M_2, то конец вектора $\boldsymbol{x}$ будет зачерчивать некоторое множество точек M. Это множество называется *линейной комбинацией множеств M_1, M_2 с коэффициентами* λ_1, λ_2 и обозначается

$$M=\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2.$$

Особенно простой случай получается, если $\lambda_1+\lambda_2=1$. Тогда, как известно из аналитической геометрии, конец вектора $\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2=(1-\lambda_2)\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2$ делит отрезок между концами векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ в отношении $\lambda_2:(1-\lambda_2)$. Следовательно, множество образуется точками, делящими в данном отношении $\lambda:(1-\lambda)$ отрезки, концы которых лежат в множествах M_1, M_2. В частности, при $\lambda=\frac{1}{2}$ получаем «полусумму» множеств M_1, M_2; она образуется серединами отрезков, концы которых лежат в M_1 и M_2 (см. ниже черт. 125).

В следующих параграфах этой главы нам понадобятся только «полусуммы» выпуклых (телесных) многогранников; как будет показано, такая полусумма сама есть выпуклый многогранник. Общие линейные комбинации будут применяться в § 3 главы VIII. Линейные комбинации любых выпуклых тел были введены в рассмотрение и исследованы Бруном и Минковским около пятидесяти лет назад; учение о них выросло в обширную теорию. Основные её элементы составляют содержание данного параграфа и § 3 главы VIII.

Совершенно аналогично линейной комбинации двух множеств можно определить линейную комбинацию любого числа множеств M_i с коэффициентами λ_i:

$$M=\lambda_1 M_1+\ldots+\lambda_n M_n.$$

Это M есть множество концов векторов $x=\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n$, получающихся, когда концы векторов x_i зачерчивают независимо каждый своё множество M_i. Ввиду ассоциативности сложения векторов множество M можно получить последовательно, образуя линейную комбинацию $\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2=M'$, потом $M'+\lambda_3 M_3$ и т. д. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением комбинации двух множеств *).

2. Лемма 1. *При переносе начала и при параллельных переносах множеств M_1, M_2 их линейная комбинация испытывает только параллельный перенос.*

Если перенести начало из O в O', то ко всем векторам x_1, x_2 прибавится один и тот же вектор $a=\overrightarrow{O'O}$. Поэтому к вектору $x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ прибавится вектор $(\lambda_1+\lambda_2)a$. Но теперь вектор $x+(\lambda_1+\lambda_2)a$ откладывается из нового начала O', а в ту же точку из старого начала O будет идти вектор $x+(\lambda_1+\lambda_2)a-a$. Поэтому всё множество $M=\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2$, образованное концами этих векторов, переносится на вектор $(\lambda_1+\lambda_2-1)a$.

В частности, если $\lambda_1+\lambda_2=1$, то M вовсе не меняется. (Это, впрочем, очевидно из того, что, как было выяснено выше, оно образуется в этом случае точками, делящими в данном отношении отрезки с концами в M_1 и M_2.)

Если множество M_1 переносится на вектор a_1, то ко всем векторам x_1 прибавляется вектор a_1, а ко всем векторам $x=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ прибавляется вектор $\lambda_1 a_1$. Поэтому множество $M=\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2$ переносится на вектор $\lambda_1 a_1$. При переносах множеств M_1 и M_2 на векторы a_1 и a_2 множество M переносится на вектор $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2$.

(Те же результаты верны, конечно, для линейной комбинации любого числа множеств M_i.)

При рассмотрении линейных комбинаций множества, получаемые друг из друга параллельным переносом, можно не считать существенно различными. Поэтому как «слагаемые» M_1, M_2, так и их комбинацию $M=\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2$ можно рассматривать с точностью до любых переносов. Лемма 1 как раз показывает, что переносы начала и «слагаемых» не влияют на множество M, если пренебрегать переносом.

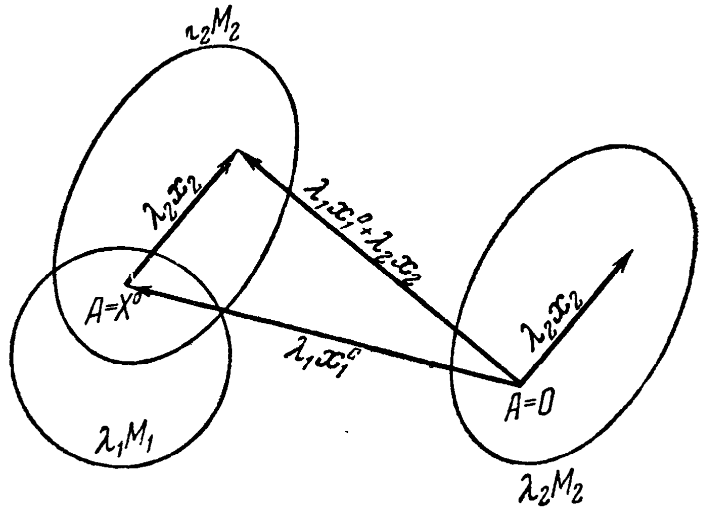
Это замечание приводит к следующему наглядному пониманию линейной комбинации $M=\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2$.

Подвергнув множества M_1, M_2 подобным преобразованиям, получим множества $\lambda_1 M_1$, $\lambda_2 M_2$. Затем *возьмём в множестве $\lambda_2 M_2$ любую точку A и путём параллельного переноса множества $\lambda_2 M_2$ будем помещать точку A во все точки множества $\lambda_1 M_1$. Тогда мно-*

*) Можно рассматривать линейные комбинации, допуская отрицательные λ_i. Множество $-M$ заполняется концами векторов $-x$, обратных векторам x, идущим из O в точки множества M. Поэтому $-M$ симметрично M относительно начала. Умножение на отрицательное λ_i состоит в подобном изменении в $|\lambda_i|$ раз и отражении в начале O. Линейная комбинация с отрицательными λ_i сводится к линейной комбинации с коэффициентами $|\lambda_i|$, но для множеств, симметричных данным относительно начала.

жество M, зачерченное множеством $\lambda_2 M_2$, и будет $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ (черт. 124). Действительно, мы можем принять точку A за начало. Тогда, если перенести точку A в точку X^0 множества $\lambda_1 M_1$, то перенесённое множество $\lambda_2 M_2$ будет заполняться концами векторов $\lambda_1 \boldsymbol{x}_1^0 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$. Перемещая точку $A = X_0$ по множеству $\lambda_1 M_1$, получим всё множество $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$.

В определении линейной комбинации порядок слагаемых не играет роли (ввиду переместительного закона сложения векторов). Поэтому в изложенном построении множества M_1 и M_2 можно поменять ролями. (Это может привести только к переносу построенной таким путём их комбинации.)



Черт. 124.

На основании данного построения легко получить следующий простой вывод.

Лемма 2. *Если M_1 и M_2 — непараллельные отрезки, то $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ есть параллелограмм со сторонами, равными и параллельными отрезкам $\lambda_1 M_1$ и $\lambda_2 M_2$.*

Если M_1 и M_2 — параллельные отрезки, то $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ есть параллельный им отрезок; длина его есть такая же линейная комбинация их длин: $l = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2$.

Для доказательства достаточно подобно преобразовать отрезки M_1, M_2 и перенести отрезок $\lambda_1 M_1$ его концом по отрезку $\lambda_2 M_2$.

3. Лемма 3. *Линейная комбинация выпуклых множеств есть выпуклое множество* (черт. 125).

Действительно, пусть X и Y — две точки множества $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$. Они получаются как комбинации некоторых точек X_1, X_2 и Y_1, Y_2 из множества M_1 и M_2 (т. е. $\overrightarrow{OX} = \lambda_1 \overrightarrow{OX_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OX_2}$ и то же для Y).

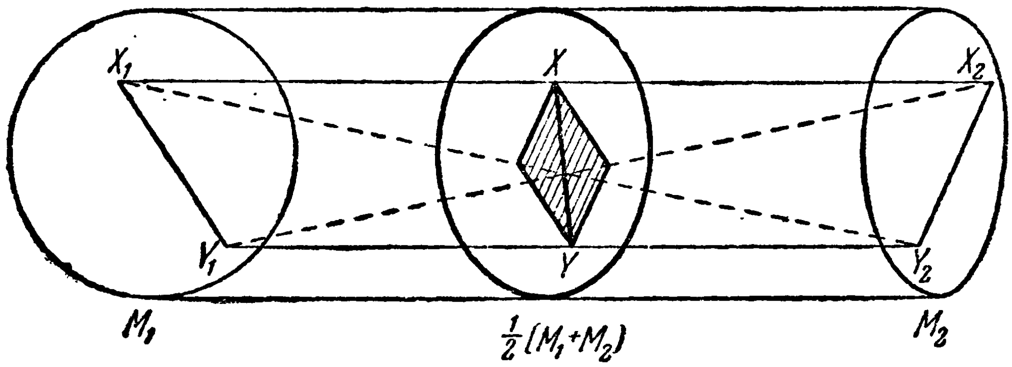
Если множества M_1 и M_2 выпуклы, то они содержат отрезки $X_1 Y_1$ и $X_2 Y_2$. Тогда множество M содержит, очевидно, комбинацию этих отрезков, а сама эта комбинация содержит точки X и Y. Но согласно лемме 2 комбинация отрезков есть параллелограмм или отрезок, а потому она вместе с точками X и Y содержит и соединяющий их отрезок.

Следовательно, при выпуклых M_1, M_2 множество $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ содержит вместе с любой парой точек X, Y также соединяющий их отрезок, т. е. оно также выпукло.

(Строя последовательно линейную комбинацию любого числа выпуклых множеств, придём к тому же выводу о выпуклости линейной комбинации $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \ldots + \lambda_n M_n$.)

4. Будем называть «гранью» (в кавычках) множества M общую часть его с опорной плоскостью. Например, у выпуклого многогранника она может быть гранью в обычном смысле, ребром или вершиной.

Лемма 4. *Пусть Q_1 и Q_2 — опорные плоскости множеств M_1 и M_2 с параллельными внешними нормалями, а G_1 и G_2 — соответствующие «грани» этих множеств. Тогда $Q = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ есть опорная плоскость множества $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ с той же внешней*



Черт. 125.

нормалью, а соответствующая ей «грань» G множества M есть такая же комбинация «граней» G_1 и G_2, т. е. $G = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$. Обратно, всякая опорная плоскость и «грань» множества получаются именно таким образом. (Строго говоря, нужно добавить, что имеются в виду замкнутые множества.)

Так как при переносах множеств M_1 и M_2 множество M испытывает лишь параллельный перенос, то можно перенести M_1 и M_2 так, чтобы плоскости Q_1 и Q_2 совпали. Кроме того, начало можно перенести на плоскость $Q = Q_1 = Q_2$. Тогда первое утверждение леммы становится очевидным. Множество $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ будет лежать по ту же сторону от плоскости Q, что и сами множества M_1 и M_2. Общая часть множества M с плоскостью Q, т. е. «грань» G, будет получаться как комбинация «граней» G_1 и G_2. Например, на черт. 127 (стр. 264) нижняя грань среднего многогранника есть полусумма нижних рёбер «слагаемых» многогранников. (Если же перенести множества M_1 и M_2 на исходные места, то и множество M, и плоскость Q, и «грань» G испытают только соответствующий перенос.)

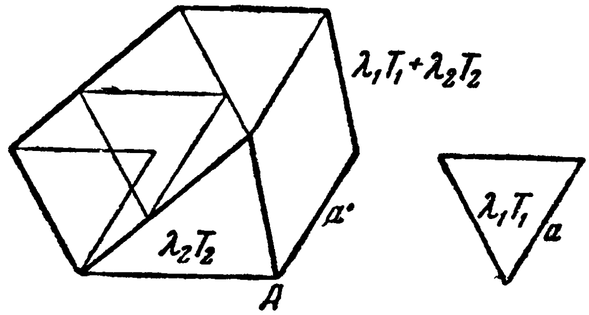
Для доказательства обратного утверждения возьмём какую-либо опорную плоскость Q множества M и опорные плоскости Q_1, Q_2 множеств M_1 и M_2 с параллельными внешними нормалями*). Перенесём M_1 и M_2 так, чтобы плоскости Q, Q_1 и Q_2 совпали. Тогда

*) У M_1 и M_2 имеются такие опорные плоскости. Если бы, например, у M_1 не было такой опорной плоскости, то M_1 содержало бы точки, сколь угодно далёкие от плоскости Q в направлении её внешней нормали. Но тогда очевидно, что и в множестве M были бы такие сколь угодно далёкие точки, вопреки тому, что оно имеет опорную плоскость Q.

совершенно так же ясно, что плоскость Q и соответствующая ей «грань» G будут комбинациями плоскостей Q_1 и Q_2 и соответствующих им граней G_1 и G_2.

Совершенно тот же вывод применим к плоским фигурам с заменой опорной плоскости на опорную прямую и «грани» — на «сторону», т. е. общую часть фигуры с её опорной прямой. (Например, на черт. 126 сторона a' есть комбинация вершины A и стороны a.)

5. Лемма 5. *Линейная комбинация многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях, есть многоугольник, лежащий в параллельной плоскости.* (В частности, один из многоугольников может вырождаться в отрезок или даже точку.)



Черт. 126.

Можно считать, что многоугольники лежат в одной плоскости, так как их перенос может вызвать лишь перенос их линейной комбинации.

Пусть даны два треугольника T_1, T_2. Фигуры $\lambda_1 T_1$, $\lambda_2 T_2$ будут подобными им треугольниками. Их комбинацию $\lambda_1 T_1 \dotplus \lambda_2 T_2$ можно строить, обнося какую-либо вершину треугольника $\lambda_1 T_1$ по всем точкам треугольника $\lambda_2 T_2$.

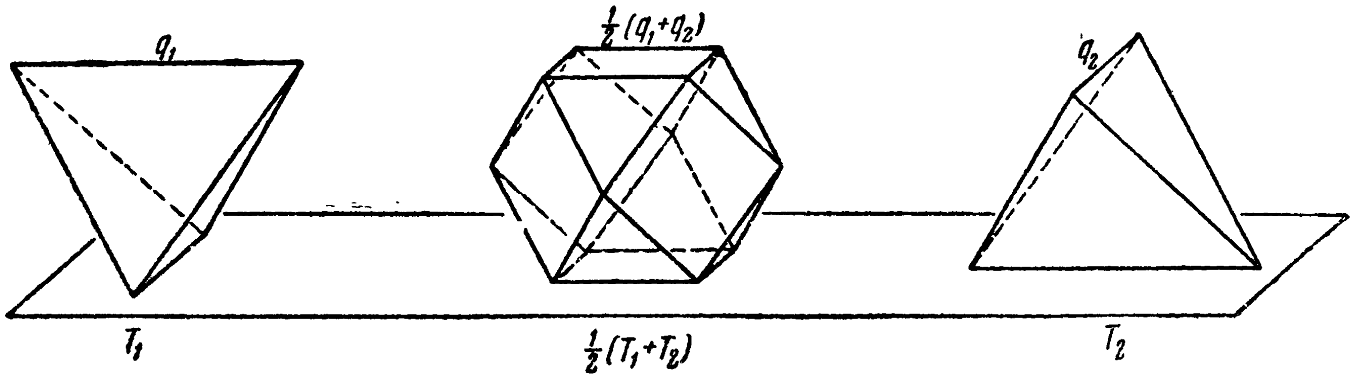
Непосредственно из чертежа 126 очевидно, что в результате зачертится шестиугольник. В частных случаях он может выродиться в пятиугольник, четырёхугольник или треугольник (последнее — если T_1 и T_2 подобны и параллельно расположены). Доказательство можно обосновать на последнем замечании в предыдущем пункте. «Стороны» множества $\lambda_1 T_1 \dotplus \lambda_2 T_2$ будут комбинациями сторон или вершин треугольников T_1 и T_2. Так как тех и других — лишь конечное число, то у множества $\lambda_1 T_1 \dotplus \lambda_2 T_2$ будет лишь конечное число «сторон», так что оно представляет собой многоугольник. Так как настоящая сторона может получиться лишь от комбинирования стороны с вершиной или со стороной, лежащей в параллельной опорной прямой, то имеется максимум шесть возможных комбинаций, приводящих к сторонам на $\lambda_1 T_1 \dotplus \lambda_2 T_2$.

Пусть теперь M_1 и M_2 — любые два многоугольника. Разобьём их на треугольники T_1^i и T_2^j. Комбинация $\lambda_1 M_1 \dotplus \lambda_2 M_2$ будет, очевидно, слагаться из комбинаций всех возможных пар треугольников: $\lambda_1 T_1^i \dotplus \lambda_2 T_2^j$. (Эти комбинации, конечно, перекрываются.) По доказанному эти комбинации суть многоугольники. Поэтому $\lambda_1 M_1 \dotplus \lambda_2 M_2$ слагается из конечного числа многоугольников и, следовательно, также является многоугольником, что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Линейная комбинация телесных многогранников есть телесный многогранник.*

Доказательство — то же, что для леммы 5. Сначала убеждаемся, что комбинация тетраэдров есть многогранник (черт. 127). После этого, разбивая любые данные многогранники на тетраэдры, видим, что их комбинация слагается из комбинаций этих тетраэдров и, следовательно, также является многогранником.

Наглядное рассмотрение комбинации двух тетраэдров представляет некоторое затруднение. Поэтому можно прибегнуть к лемме 4, так же как это сделано в выводе леммы 5. Если T_1 и T_2 — два тетраэдра, то множество $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ будет выпуклым согласно лемме 3. По лемме 4 его «грани» будут комбинациями «граней» тетраэдров T_1 и T_2, т. е. их настоящих граней, рёбер и вершин. Так как всех этих элементов — лишь конечное число, то и их комбинаций — конечное



Черт. 127.

число. Поэтому $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ имеет конечное число «граней» и, значит, оказывается многогранником.

(Настоящая грань у $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ может получаться как комбинация грани на T_1 (или T_2) с гранью, ребром или вершиной на T_2 (или T_1) либо как комбинация двух непараллельных рёбер, лежащих в параллельных опорных плоскостях. В последнем случае согласно лемме 2 она будет параллелограммом. При «общем» расположении тетраэдров T_1 и T_2 грани одного не параллельны ни граням, ни рёбрам другого; рёбра, лежащие в параллельных опорных плоскостях, также не параллельны. Поэтому грани на $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ получаются от комбинирования граней с вершинами и рёбер с рёбрами (см. черт. 127). Рассмотрение комбинации $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ в этом общем случае и исследование всех возможных её вырождений может служить хорошим упражнением в наглядной геометрии.)

6. Теперь можно получить результат, являющийся конечной целью выводов этого параграфа.

Теорема. *Линейная комбинация телесных выпуклых многогранников есть телесный выпуклый многогранник:* $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$. *Если Q есть «грань» многогранника P (т. е. грань, ребро или вершина), то $Q = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$, где Q_1 и Q_2 — «грани» на P_1 и P_2, лежащие в опорных плоскостях с параллельными внешними нормалями. Q будет настоящей гранью, когда Q_1 и Q_2 суть:* 1) *две грани, либо* 2) *грань и ребро, либо* 3) *грань и вершина, либо* 4) *пара непараллельных рёбер. Q будет ребром, если Q_1 и Q_2 — параллельные рёбра либо ребро и вершина.*

Доказательство непосредственно следует из предыдущих лемм. По лемме 6 P будет многогранником, а по лемме 3 — выпуклым. Далее, по лемме 4 каждая «грань» Q многогранника P будет комбинацией «граней» Q_1 и Q_2, лежащих на P_1 и P_2 в опорных плоскостях с параллельными нормалями. Если при этом Q_1 и Q_2 — параллельные рёбра или ребро и вершина, то они дают в комбинации параллельное ребро $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$. Если Q_1 и Q_2 — вершины, то они дают вершину $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$. Во всех остальных случаях $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ будет настоящей гранью (как видно из лемм 2 и 5). Эти остальные случаи исчерпаны четырьмя возможностями, указанными в теореме. (На черт. 127 треугольные грани среднего многогранника суть комбинации граней и вершин тетраэдров T_1 и T_2, а четырёхугольные грани — комбинации рёбер.)

Строя последовательно линейную комбинацию нескольких многогранников, получим аналогичный результат для любого числа их.

§ 3. Условие равенства замкнутых многогранников

1. Мы будем рассматривать пары замкнутых выпуклых многогранников или, что равносильно, пары конечных телесных выпуклых многогранников. (В этом параграфе «выпуклый многогранник» всегда будет означать именно телесный конечный выпуклый многогранник.) Опорные плоскости к ним мы будем называть параллельными только тогда, когда внешние нормали к этим плоскостям параллельны.

Пусть P_1 и P_2 — два выпуклых многогранника. Пусть Q_1 — грань многогранника P_1, а Q_2 — «грань», т. е. грань, ребро или вершина многогранника P_2, лежащая в опорной плоскости, параллельной плоскости Q_1. Эту «грань» Q_2 мы будем называть гранью многогранника P_2, параллельной грани Q_1. Соответственно определяются грани многогранника P_1, параллельные граням P_2. Таким образом, две «параллельные грани» лежат в опорных плоскостях с параллельными внешними нормалями и хотя бы одна из них является действительно гранью, другая же может быть ребром или вершиной.

Теорема 1. *Если у двух выпуклых многогранников все пары параллельных граней таковы, что ни одну грань нельзя поместить внутри другой параллельным перенесением, то такие многогранники равны и параллельно расположены.* (Иными словами, невозможно, чтобы параллельные грани нельзя было совместить параллельным переносом, если ни для одной пары их нельзя поместить одну внутри другой.)

Так как вершину всегда можно поместить внутри грани, то при условиях теоремы параллельные грани могут быть либо обе действительно гранями, либо одна — действительно гранью, а другая — ребром.

Пусть многогранники P_1 и P_2 удовлетворяют условиям теоремы; рассмотрим их полусумму

$$P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2).$$

По доказанному в предыдущем параграфе P будет выпуклым многогранником, грани которого представляют собой одно из трёх:

1) полусумму параллельных действительных граней многогранников P_1 и P_2;

2) полусумму параллельных граней, из которых одна — действительная грань, а другая — ребро;

3) полусумму непараллельных рёбер.

(Полусумма грани и вершины отсутствует, как это только что было отмечено, в силу условий теоремы.)

Каждое ребро многогранника P есть полусумма параллельных рёбер, лежащих на P_1 и P_2 в параллельных опорных плоскостях, либо полусумма ребра и вершины. В этом случае мы считаем, что оно также есть полусумма рёбер, но одно из которых имеет нулевую длину. (Это условие о рёбрах нулевой длины соответствует аналогичному условию о сторонах многоугольника, принятому в § 1.) Таким образом, каждому ребру многогранника P отвечает по ребру на P_1 и P_2.

Отнесём ребру многогранника P знак плюс или минус в зависимости от того, длиннее или короче соответствующее ребро на P_1, чем на P_2; в случае равенства рёбер на P_1 и P_2 оставляем ребро на P неотмеченным.

Докажем, что в таком случае при обходе вокруг каждой грани Q многогранника P должно быть не менее четырёх перемен знака, если только на этой грани имеются отмеченные рёбра. Рассмотрим последовательно каждый из трёх типов граней, указанных выше.

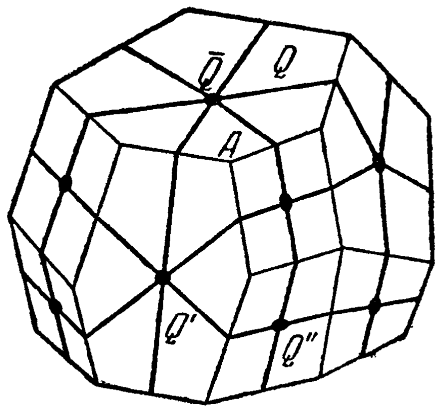
1) Грань Q есть полусумма двух действительных граней Q_1 и Q_2. По условию теоремы Q_1 и Q_2 непомещаемы одна внутри другой. Поэтому на основании леммы 3 § 1 число перемен знака при обходе вокруг любой из них, а значит, и вокруг Q, должно быть не меньше четырёх. Исключение составляет случай, когда стороны граней Q_1 и Q_2 равны, т. е. Q_1 и Q_2 равны и параллельно расположены.

2) Грань Q есть полусумма действительной грани Q_1 и ребра Q_2 (или наоборот). Так как по условию Q_2 нельзя поместить в Q_1, то на Q_1 стороны, параллельные Q_2, должны быть короче Q_2. Вместе с тем на Q_1 имеются, конечно, стороны, не параллельные Q_1; им на Q_2 соответствуют «стороны» нулевой длины.

Отсюда очевидно, что при обходе вокруг Q будет ровно четыре перемены знака.

3) Грань Q есть полусумма непараллельных рёбер Q_1 и Q_2. Тогда Q есть параллелограмм со сторонами, равными $\frac{1}{2}Q_1$ и $\frac{1}{2}Q_2$. Стороне $\frac{1}{2}Q_1$ соответствуют Q_1 и конец Q_2, т. е. «сторона» нулевой длины. Аналогичное верно для $\frac{1}{2}Q_2$. Следовательно, стороны параллелограмма Q отмечены попеременно плюсами и минусами, что даёт четыре перемены знака.

Итак, при обходе вокруг каждой грани многогранника P, имеющей отмеченные рёбра, получается не менее четырёх перемен знака. Возьмём внутри каждой грани по точке и соединим эти точки линиями, если они принадлежат граням, смежным по ребру. Тогда получим сеть $\overline{P}$, двойственную многограннику P (черт. 128). Грани Q на P отвечает вершина $\overline{Q}$ на $\overline{P}$; ребру на P, по которому смежны грани Q' и Q'', отвечает на $\overline{P}$ ребро $\overline{Q'}\,\overline{Q''}$; вершине A на P отвечает грань на $\overline{P}$, ограниченная рёбрами на $\overline{P}$, соответствующими рёбрам на P, сходящимся в A. Рёбрам многогранника P, принадлежащим одной грани, соответствуют рёбра сети $\overline{P}$, сходящиеся в вершине. Отнеся этим рёбрам те же знаки, получим, что вокруг каждой вершины сети $\overline{P}$ имеется не менее четырёх перемен знака, если только к этой вершине подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Но в таком случае из леммы Коши вытекает, что отмеченных рёбер не может быть вовсе*). Следовательно, и на многограннике P нет отмеченных рёбер.



Черт. 128.

Отсюда следует:

Если грань Q на P есть полусумма двух действительных граней, то эти грани равны и параллельны; граней на P, являющихся полусуммами грани и ребра или двух рёбер, нет вовсе, потому что, как было показано, вокруг такой грани должно быть ровно четыре перемены знака.

Следовательно, многогранники P_1 и P_2 имеют попарно равные и параллельные грани, так что они равны и параллельно расположены.

2. Из теоремы 1 можно вывести такое следствие:

Теорема 2. *Пусть $f(Q)$ — монотонная функция выпуклого многоугольника Q, т. е. $f(Q)$ есть такое число, что $f(Q_1) > f(Q_2)$, если Q_2 можно поместить внутри Q_1. Тогда, если у двух выпуклых многогранников $f(Q_1) = f(Q_2)$ для каждой пары параллельных граней Q_1 и Q_2, то такие многогранники равны и параллельно расположены.* Или в ещё более общей форме:

Пусть выпуклые многогранники P_1 и P_2 имеют попарно параллельные грани Q_1^1, Q_2^1; ...; Q_1^n, Q_2^n. Если $f_1, \ldots, f_n$ — монотонные функции многоугольника и $f_i(Q_1^i) = f_i(Q_2^i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то многогранники P_1 и P_2 равны и параллельно расположены.

Действительно, в силу монотонности функций f_i грани Q_1^i и Q_2^i непомещаемы одна в другой; поэтому данная теорема непосредственно вытекает из теоремы 1.

*) Условия леммы Коши (§ 1 гл. II) здесь выполнены, потому что в сети $\overline{P}$ нет двуугольных областей, поскольку на многограннике P нет вершин, где сходятся только два ребра.

Примерами монотонных функций могут служить площадь, периметр, момент инерции относительно центра тяжести и т. д. и т. п. В частности, если $f(Q)$ — площадь, то получаем теорему Минковского:

Два выпуклых многогранника с попарно параллельными и равновеликими гранями равны и параллельно расположены.

Ещё в n° 5 § 4 главы II на простом примере было показано, что наша теорема 1, а следовательно, и теорема 2 не обобщаются в более чем трёхмерное пространство. Это — пример четырёхмерного куба с ребром 2 и четырёхмерного прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 1, 1, 3, 3. Между тем Минковский доказал свою теорему в пространстве любого числа измерений. Это доказательство Минковского основано на совершенно иных соображениях и будет изложено в § 2 главы VII.

Заметим ещё, что вследствие «запаса», равного 8, имеющегося в оценке числа перемен знаков по лемме Коши, в теореме 1 достаточно требовать выполнения её условий для всех пар параллельных граней, кроме одной. Отсюда легко заключить, что теорему 1 можно высказать в следующей несколько усиленной форме.

Для любых двух замкнутых выпуклых многогранников имеются лишь две возможности: либо они равны и параллельно расположены, либо на них есть по крайней мере две пары таких параллельных граней, что одна из граней помещается внутри другой параллельным переносом. При этом одна из граней всегда есть настоящая грань, другая же может быть настоящей гранью, ребром или вершиной.

§ 4. Условия равенства бесконечных многогранников

1. Условие равенства замкнутых многогранников, установленное в предыдущем параграфе, для бесконечных многогранников лишается смысла. В применении к их бесконечным граням оно, вообще говоря, просто не может быть выполнено, потому что из двух бесконечных выпуклых многоугольников один всегда может быть помещён внутри другого, как в этом легко убедиться. Тем не менее, применяя это условие лишь к конечным граням, можно ввести такое условие для бесконечных граней, что оба эти условия вместе обеспечат равенство бесконечных многогранников.

Это дополнительное условие состоит в следующем:

*Бесконечные многогранники должны иметь равные и параллельные бесконечные части**), т. е. от каждого из них можно отрезать конечную часть так, что оставшиеся бесконечные части будут совмещаться параллельным переносом. Это равносильно тому, что путём

*) Как указывалось ещё в § 1 гл. I, рассмотрение бесконечных многогранников равносильно рассмотрению конечных многогранников, крайние грани которых допускают бесконечное продолжение без появления новых пересечений. Поэтому данное условие и вместе с ним следующая далее теорема 1 легко пересказываются для таких конечных многогранников.

параллельного переноса можно привести в совпадение плоскости бесконечных граней обоих многогранников.

Относительно конечных граней мы будем иметь в виду те же условия, что и в предыдущем параграфе. Две грани считаются параллельными тогда и только тогда, когда параллельны их внешние нормали. Если на одном многограннике нет грани, параллельной грани другого, то мы считаем, что она есть, но только вырождается в ребро или вершину, лежащие в опорной плоскости с той же внешней нормалью.

Термин «параллельные грани» понимается дальше именно в этом смысле.

2. Теперь формулируем теорему о равенстве бесконечных многогранников.

Теорема 1. *Пусть у двух бесконечных выпуклых многогранников бесконечные части равны и параллельны, а все пары конечных параллельных граней таковы, что ни одну грань нельзя поместить внутри другой путём параллельного переноса. Тогда эти многогранники равны и параллельно расположены.*

Термин «поместить внутри» понимается так же, как в §§ 1 и 3, т. е. так, что один многоугольник содержится в другом и с ним не совпадает.

Так как точку всегда можно поместить внутри грани, то при условиях теоремы параллельные грани могут быть либо обе действительно гранями, либо одна — действительно гранью, а другая — ребром.

Пусть многогранники P_1 и P_2 удовлетворяют условиям теоремы. В силу первого из этих условий можно считать, что бесконечные части этих многогранников совпадают. Следовательно, их бесконечные рёбра и грани налегают соответственно друг на друга.

Представляя себе P_1 и P_2 как телесные многогранники, построим их полусумму

$$P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2).$$

Так как бесконечные части многогранников P_1 и P_2 совпадают, то их полусумма P имеет ту же бесконечную часть; никаких новых бесконечных граней и рёбер здесь не появляется, и форма граней может измениться только в конечной части. К конечной же части многогранника P применимы все те же соображения, какие были использованы в предыдущем параграфе. Поэтому мы сразу можем формулировать их результат.

Если ребру многогранника P приписывать знак разности $l_1 - l_2$ соответствующих рёбер l_1 и l_2 многогранников P_1 и P_2, то при обходе вокруг каждой конечной грани многогранника P будет не менее четырёх перемен знака, если только хотя бы одно ребро этой грани не остаётся неотмеченным (неотмеченные рёбра — те, для которых $l_1 - l_2 = 0$).

3. Обратимся теперь к бесконечным граням. По условию расположения многогранников P_1 и P_2 их бесконечные рёбра соответственно налегают друг на друга. Мы будем считать бесконечное ребро l_1 многогранника P_1 длиннее соответствующего ребра l_2 многогранника P_2, если l_2 есть только часть l_1. Аналогично определяется обратное неравенство, равными же эти рёбра считаются тогда, когда они совпадают. Согласно этому условию определяется знак разности бесконечных рёбер $l_1 - l_2$ и этот знак приписывается соответствующему ребру «среднего» многогранника P. Неотмеченными останутся только рёбра, которым отвечают совпадающие бесконечные рёбра на P_1 и P_2.

Принятое условие о знаке разности бесконечных рёбер совпадает с условием о знаке разности бесконечных сторон многоугольников, принятым в лемме 4а § 1. Так как, кроме того, у налегающих бесконечных граней многогранников P_1 и P_2 бесконечные рёбра налегают, то мы находимся как раз в условиях этой леммы. Поэтому, применяя её, мы приходим к следующему заключению относительно возможных расстановок знаков на контуре любой бесконечной грани Q среднего многогранника P:

1) Ни одно ребро этой грани не отмечено, и тогда соответствующие ей грани Q_1 и Q_2 на P_1 и P_2 совпадают.

2) На контуре грани Q имеются минимум две перемены знака.

3) Бесконечные рёбра граней Q_1 и Q_2 параллельны, а конечные их рёбра соответственно равны. Это соответствует исключительному случаю, оговорённому в лемме 4а § 1.

4. Рассмотрим ближе этот исключительный случай. Пусть он имеет место для пары граней Q_1, Q_2 многогранников P_1, P_2. Грани Q_1, Q_2 равны и параллельны, потому что равны и параллельны их рёбра. Поэтому для этих граней имеются только две возможности:

3а) грани Q_1, Q_2 совпадают, т е. имеет место первый из трёх указанных только что случаев.

3б) Одна из этих граней, скажем Q_1, смещена внутрь другой.

Покажем, что если грани Q_1 и Q_2 не имеют общих рёбер с конечными гранями своих многогранников, то они совпадают. Действительно, общие рёбра бесконечных граней лежат в пересечениях плоскостей этих граней. У многогранников P_1, P_2 по условию их расположения бесконечные грани соответственно налегают, а следовательно, совпадают и пересечения плоскостей этих граней. Поэтому если грани Q_1, Q_2 ограничены только пересечениями с плоскостями других бесконечных граней, то они необходимо совпадают.

Таким образом, исключив из рассмотрения случай совпадения граней Q_1 и Q_2, мы имеем для них следующее положение: одна из них, скажем Q_1, сдвинута внутрь другой и хотя бы одна из этих граней имеет общие рёбра с конечными гранями своего многогранника.

Соответствующая грань Q среднего многогранника P есть полусумма граней Q_1, Q_2 (теорема n° 6 § 2), и так как Q_1, Q_2 равны и параллельны, то Q тоже равна и параллельна им. Так как грань Q_1

сдвинута внутрь Q_2, то согласно условию её бесконечные рёбра считаются короче рёбер грани Q_2, и потому обоим бесконечным рёбрам грани Q отнесён знак минус. Вместе с тем ни одно конечное ребро грани Q не отмечено, потому что конечные рёбра граней Q_1, Q_2 равны. По условию хотя бы у одной из граней Q_1, Q_2, скажем у Q_1, есть ребро l_1, принадлежащее также конечной грани R_1. Тогда соответствующее ребро l грани Q также принадлежит конечной грани, именно той грани R, которая является «полусуммой» грани R_1 и параллельной ей грани R_2 многогранника P_2. Ребро l не отмечено, и мы отнесём ему знак плюс. Тогда, так как бесконечные рёбра грани Q отмечены минусами, то на её контуре получится две перемены знака. Число же перемен знаков на конечных гранях, очевидно, не уменьшится*).

Таким образом, в исключительном третьем случае (если он не сводится к первому) всегда можно ввести ещё лишние знаки так, что на контуре бесконечной грани будет две перемены знака. Мы примем такую расстановку знаков на всех бесконечных гранях, где это нужно.

5. Теперь, суммируя все наши выводы относительно расстановки знаков на конечных и бесконечных гранях, мы приходим к следующему результату:

Если на многограннике P конечная грань имеет отмеченные рёбра, то на её контуре имеется не менее четырёх перемен знака; если же бесконечная грань имеет отмеченные рёбра, то на её контуре имеется не менее двух перемен знака.

Допустим, что на многограннике P имеются отмеченные рёбра. Проведём на бесконечных его гранях замкнутую ломаную с вершинами внутри бесконечных рёбер, отделяющую бесконечную часть многогранника. Останется конечный многогранник P'. Возьмём второй экземпляр P'' того же многогранника P' с той же расстановкой знаков на его рёбрах и отождествим соответствующие стороны и вершины ломаных, ограничивающих P' и P'' **). После этого исключим эти ломаные и также исключим их вершины. Тогда получим абстрактный многогранник $P' + P''$, который, очевидно, гомеоморфен сфере и не имеет вершин, общих только двум рёбрам. На этом многограннике имеются отмеченные рёбра и если какая-то его грань имеет отмеченное ребро, то число перемен знака вокруг неё не меньше четырёх. Действительно, для граней, соответствующих конечным граням многогранника P, это очевидно из предыдущего. Если же грань

*) Оговорка, что грань R, смежная с Q по ребру l, — конечная, существенна, потому что иначе могло бы оказаться, что, применяя к бесконечной грани R те же рассуждения, мы должны были бы отнести ребру l знак минус.

**) Это отождествление мыслится абстрактно. Однако легко видеть, что многогранник P' можно отсечь от P некоторой плоскостью и тогда P'' получается из P' простым отражением в этой плоскости.

соответствует бесконечной грани многогранника P, то её контур слагается из двух одинаковых частей, на каждой из которых имеется не менее двух перемен знака. В сумме это даёт не менее четырёх перемен знака.

Но точно так же, как в § 3, переходя к двойственному многограннику, мы убеждаемся, что такая расстановка знаков противоречит лемме Коши. Поэтому допущение о наличии у среднего многогранника P отмеченных рёбер невозможно: все его рёбра должны быть неотмеченными. Так же, как в § 3, отсюда следует, что грани наших исходных многогранников P_1 и P_2 не только параллельны, но и равны, т. е. сами многогранники равны и параллельны, что и требовалось доказать.

6. Из доказанной теоремы, подобно теореме 2 § 3, немедленно вытекает такое следствие:

Теорема 2. *Пусть $f_1(Q)$, $f_2(Q)\ldots$ — такие функции конечного выпуклого многоугольника, что $f_i(Q') > f_i(Q'')$, если Q'' помещается внутри Q'. Тогда, если у двух бесконечных выпуклых многогранников Q'_i, Q''_i бесконечные части равны и параллельны, а для каждой пары их конечных параллельных граней Q'_i, Q''_i $f_i(Q'_i) = f_i(Q''_i)$, то такие многогранники равны и параллельно расположены.*

В частности, например, принимая в качестве всех f_i площадь, получим:

Если у двух бесконечных выпуклых многогранников бесконечные части равны и параллельны, а конечные грани попарно параллельны и равновелики, то такие многогранники равны и параллельно расположены.

Но можно для одних граней требовать равенства площадей, для других — равенства периметров и т. д.

§ 5. Другое доказательство и обобщение теоремы о бесконечных многогранниках. О многогранниках с границей

1. А. В. Погорелов предложил другое доказательство теоремы 1 предыдущего параграфа, обладающее важными преимуществами. Оно распространяется на пространство любого числа измерений и позволяет получить более общий результат:

Теорема 1. *Пусть у двух бесконечных многогранников плоскости бесконечных граней совпадают, а каждая пара их параллельных конечных граней обладает по крайней мере одним из двух свойств: либо их плоскости совпадают, либо ни одну из этих граней нельзя поместить внутри другой параллельным переносом. При этих условиях многогранники совпадают.*

(Если речь идёт о n-мерных многогранниках, то, говоря о паре параллельных граней, мы имеем в виду, что хотя бы одна из них

$(n-1)$-мерная, другая же может быть и меньшего числа измерений, но лежит в параллельной опорной $(n-1)$-мерной плоскости. В n-мерном случае термин «поместить внутри» понимается так же, как и раньше.)

Обобщение в сравнении с теоремой 1 предыдущего параграфа состоит не только в переходе в пространство любого числа измерений, но ещё в том, что для конечных граней допускаются два предположения. В связи с этим ту же теорему можно пересказать для многогранников с границей.

Теорема 1а. *Пусть два конечных выпуклых многогранника, ограниченные каждый одной замкнутой ломаной, имеют сферические изображения, содержащиеся в полусфере. Пусть плоскости их крайних граней совпадают, а для пар параллельных внутренних, т. е. не подходящих к краю, граней имеет место хотя бы одно из двух: либо их плоскости совпадают, либо ни одну из этих граней нельзя поместить внутри другой параллельным переносом.*

Тогда плоскости всех граней совпадают, и следовательно, внутренние грани совпадают полностью, а крайние грани могут быть продолжены до совпадения.

Теорема 1 о бесконечных многогранниках, очевидно, содержится в данном утверждении; стоит лишь, отрезав от бесконечных многогранников достаточно далёкие части, перейти к многогранникам с границей.

Для того чтобы убедиться, что, и обратно, данное утверждение вытекает из теоремы 1, достаточно продолжить крайние грани многогранников так, что получатся бесконечные многогранники. Это возможно потому, что их сферические изображения содержатся в полусфере. Бесконечное продолжение может оказаться возможным не для всех крайних граней; но это не играет никакой роли. Очевидно, для полученных бесконечных многогранников условия предыдущей теоремы будут выполнены.

Заметим, что, как можно убедиться на простых примерах, указанный результат не распространяется на такие конечные многогранники с границей, у которых сферические изображения не помещаются в полусфере. Поэтому сущность результата состоит в теореме 1 о бесконечных многогранниках.

2. Мы докажем теорему 1 для многогранников, у которых сферическое изображение содержится внутри полусферы. (Этим в трёхмерном случае исключаются не только многогранники, у которых все бесконечные рёбра параллельны, но и такие, которые имеют параллельные бесконечные грани.) В этом предположении доказательство оказывается особенно простым. Общий случай будет коротко рассмотрен дополнительно.

Допустим, вопреки доказываемому, что имеются два несовпадающих бесконечных многогранника P_1 и P_2 со сферическими изображениями внутри полусферы, удовлетворяющие условиям теоремы. Из этих условий вытекает, что их сферические изображения совпадают и нормали к их опорным плоскостям, будучи отложены из одной точки, заполняют выпуклый телесный угол V.

Обозначим $h_1(\boldsymbol{n})$, $h_2(\boldsymbol{n})$ опорные функции многогранников P_1, P_2, т. е. расстояния их опорных плоскостей от начала, взятые с соответствующим знаком, как функции единичного вектора внешней нормали $\boldsymbol{n}$.

Если бы было $h_1(\boldsymbol{n}) = h_2(\boldsymbol{n})$ при всех $\boldsymbol{n}$, то многогранники совпадали бы. Поэтому имеется множество W векторов $\boldsymbol{n}$ из угла V, для которых $h_1(\boldsymbol{n}) - h_2(\boldsymbol{n}) > 0$ (или < 0). Не ограничивая общности, можно считать, что в угле V найдутся единичные векторы, для которых $h_1(\boldsymbol{n}) - h_2(\boldsymbol{n}) > 0$.

Рассмотрим функцию $\varphi(\boldsymbol{n})$, определённую для векторов $\boldsymbol{n}$ из W равенством

$$\varphi(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{h_1(\boldsymbol{n}) - h_2(\boldsymbol{n})}. \tag{1}$$

Интерпретируем эту функцию геометрически, поставив в соответствие каждому $\boldsymbol{n}$ конец вектора $\varphi(\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$, отложенного из начала. Геометрическое место этих точек есть некоторый многогранник R с краем в бесконечности, расположенный внутри угла V вне шара радиуса

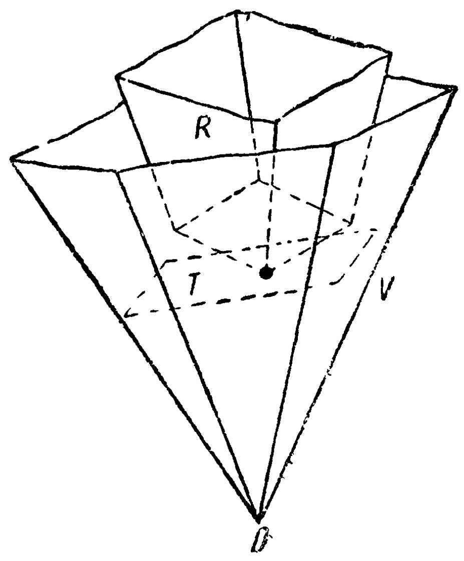
$$r = \frac{1}{\sup\limits_{\boldsymbol{n}\in W} [h_1(\boldsymbol{n}) - h_2(\boldsymbol{n})]}.$$

Для доказательства заметим, что если A — вершина многогранника P_1 (или P_2) и $\boldsymbol{a}$ — идущий в неё вектор, то для нормалей $\boldsymbol{n}$ к опорным плоскостям в вершине A $h_1(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{an}$. Нормали в вершине образуют выпуклый телесный угол. Весь угол V разбивается на такие углы V_1^i для многогранника P_1 и V_2^l для P_2. Рассмотрим разбиение угла V на углы V^k, являющиеся пересечениями углов V_1^i и V_2^j. В каждом угле V_1^i $h_1(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{a}_1^i\boldsymbol{n}$ и в угле V_2^j $h_2(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{a}_2^j\boldsymbol{n}$. Поэтому в $V^k = V_1^i V_2^j$ $h_1(\boldsymbol{n}) - h_2(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{a}^k\boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{a}^k = \boldsymbol{a}_1^i - \boldsymbol{a}_2^j$. Если $h_1(\boldsymbol{n}) - h_2(\boldsymbol{n}) \neq 0$, то соответственно $\varphi(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{\boldsymbol{a}^k\boldsymbol{n}}$ и $\boldsymbol{a}^k\boldsymbol{n}\,\varphi(\boldsymbol{n}) = 1$, т. е. концы векторов $\varphi(\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$, идущих в угле V^k, принадлежат плоскости

$$\boldsymbol{a}^k\boldsymbol{x} = 1. \tag{*}$$

Следовательно, множество концов всех этих векторов есть многогранник с гранями на плоскостях (*). Мы ограничиваемся его частью R, лежащей в угле W, где $h_1(\boldsymbol{n}) - h_2(\boldsymbol{n}) = 0$. На границе угла W имеем $h_1(\boldsymbol{n}) - h_2(\boldsymbol{n}) = 0$ (на границе угла V это равенство вытекает из условия совпадения плоскостей бесконечных граней). Поэтому при приближении к границе угла W $\varphi(\boldsymbol{n}) \to \infty$, т. е. край многогранника R лежит в бесконечности. То, что R лежит вне некоторого шара, ясно из того, что ввиду ограниченности функций $h_1(\boldsymbol{n})$ и $h_2(\boldsymbol{n})$ функция $\varphi(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{h_1(\boldsymbol{n}) - h_2(\boldsymbol{n})}$ при $h_1 - h_2 > 0$ ограничена снизу положительным числом.

Благодаря такому расположению многогранника R существует плоскость T, не проходящая через начало, содержащая только одну вершину многогранника, причём весь многогранник лежит по одну сторону от этой плоскости, а именно — по ту, где не лежит начало координат (черт. 129). (Такая плоскость заведомо существует. Действительно, согласно сделанному вначале предположению сферические изображения многогранников P_1 и P_2 содержатся внутри полусферы. Поэтому телесный угол V, образованный нормалями, имеет опорные плоскости, проходящие только через его вершину. Плоскость, параллельная такой плоскости и упирающаяся в многогранник R, касается его по конечной «грани». Если эта «грань» не сводится к вершине, то малым поворотом плоскости можно добиться того, что она будет касаться R уже только в вершине.)



Черт. 129.

Пусть m — нормаль к плоскости T, а p — расстояние этой плоскости от начала. Тогда расстояние от начала до плоскости T в направлении данного вектора n будет

$$r(n) = \frac{p}{nm}. \qquad (2)$$

Так как многогранник R лежит за плоскостью T, то $\varphi(n) \geqslant r(n)$, или вследствие (1) и (2)

$$h_1(n) - h_2(n) \leqslant n \cdot \frac{m}{p}. \qquad (3)$$

А так как только одна вершина многогранника лежит в плоскости T, то равенство достигается здесь только для единичного вектора n_0, направленного в эту вершину.

Параллельным переносом многогранника P_2 можно добиться того, что неравенство (3) перейдёт в

$$h_1(n) - h_2'(n) \leqslant 0, \qquad (4)$$

где $h_2'(n)$ — опорная функция многогранника P_2 после переноса*).

Так как для n_0 достигается равенство $h_1(n) = h_2'(n)$, то опорные плоскости с нормалью n_0 у многогранников P_1 и P_2 теперь совпадают,

*) Действительно, как известно из аналитической геометрии и легко убедиться непосредственно, опорное число плоскости с нормалью n есть $h(n) = nx$, где x — вектор из начала координат в любую точку данной плоскости. Поэтому, если плоскость переносится на вектор a, то новое опорное число будет $h'(n) = nx + na$. Перенося многогранник P_2 параллельно на вектор $\frac{m}{p}$, получим $h_2'(n) = h_2(n) + n\frac{m}{p}$ и, следовательно, $h_1(n) - h_2'(n) = h_1(n) - h_2(n) - n\frac{m}{p} \leqslant 0$ (в силу неравенства (3)).

Пусть G_1, G_2 — грани многогранников P_1, P_2, лежащие в этой общей опорной плоскости; заранее не исключено, что они могут быть любого числа измерений от 0 до $n-1$.

По неравенству (4) $h_1(\boldsymbol{n}) < h_2'(\boldsymbol{n})$ при $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{n}_0$, т. е. опорные плоскости многогранника P_1 сдвинуты внутрь P_2 *). Отсюда, очевидно, следует, во-первых, что грань G_1 содержится внутри G_2. Во-вторых, отсюда следует, что грань G_2 должна быть $(n-1)$-мерной: иначе, сдвигая внутрь многогранника P_2 все подходящие к ней опорные плоскости, мы немедленно привели бы её к исчезновению. А сдвигаются все эти опорные плоскости потому, что $h_1(\boldsymbol{n}) < h_2'(\boldsymbol{n})$ для всех $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{n}_0$ (и близких $\boldsymbol{n}_0$, поскольку все $\boldsymbol{n}$, для которых верно (4), лежат внутри угла W).

Однако условие теоремы состоит в том, что никакая $(n-1)$-мерная грань G_2 не может содержать внутри себя грань G_1, лежащую в параллельной опорной плоскости. Полученное противоречие показывает, что таких векторов $\boldsymbol{n}$, для которых $h_1(\boldsymbol{n}) \neq h_2(\boldsymbol{n})$, нет. Поэтому все опорные плоскости многогранников P_1 и P_2 должны совпадать, т. е. совпадают сами многогранники. Тем самым теорема доказана.

3. Теперь дадим доказательство теоремы 1 для общего случая в трёхмерном пространстве.

Снова допустим, что существуют два различных бесконечных многогранника P_1 и P_2, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда их опорные функции не совпадают, и мы рассмотрим те векторы $\boldsymbol{n}$, для которых $h_1(\boldsymbol{n}) - h_2(\boldsymbol{n}) > 0$ (или $h_1 - h_2 < 0$, если векторов с $h_1 - h_2 > 0$ нет). Опять строим геометрическое место R концов векторов $\varphi(\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$, где

$$\varphi(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{h_1(\boldsymbol{n}) - h_2(\boldsymbol{n})}.$$

Это будет многогранник, что доказывается, как и выше.

Так как $h_1 - h_2 > 0$ и векторы $\boldsymbol{n}$ идут в одно (замкнутое) полупространство, то многогранник R расположен по одну сторону от плоскости T_0, проходящей через начало и параллельной плоскости, ограничивающей названное полупространство. Поэтому многогранник R имеет опорную плоскость T, параллельную T_0. Пусть H — общая часть многогранника R и плоскости T.

Рассуждая, как и раньше (формулы (2) — (4)), придём к тому, что для векторов $\boldsymbol{n}$, близких к векторам, направленным в H,

$$h_1(\boldsymbol{n}) - h_2'(\boldsymbol{n}) \leqslant 0, \tag{4}$$

где $h_2'(\boldsymbol{n})$ — опорная функция многогранника P_2, перенесённого соответствующим образом, причём равенство достигается только для векторов, направленных в H.

Если H — точка (или хотя бы содержит изолированную точку), то повторяется предыдущее рассуждение, и мы приходим к противоречию.

Допустим поэтому, что H содержит ребро или грань многогранника R. Область H не может простираться на всю плоскость T, потому что тогда для всех $\boldsymbol{n}$ было бы $h_1(\boldsymbol{n}) = h_2'(\boldsymbol{n})$ *), т. е. многогранники P_1 и P_2 совпадали

---

*) Здесь, конечно, $\boldsymbol{n}$ входит в W. Важно, что $\boldsymbol{n}_0$ — внутри W, и потому наше заключение верно для всех опорных плоскостей, близких к плоскости с нормалью $\boldsymbol{n}_0$.

бы, вопреки предположению. Следовательно, область H имеет границу. Дальнейшее состоит в том, чтобы это также привести к противоречию.

Пусть A — точка на границе области H и n_0 — вектор, направленный в эту точку.

Пусть L_1, L_2 — опорные плоскости многогранников P_1, P_2 с одной и той же нормалью n_0. Тогда могут представиться следующие возможности:

a) Плоскости L_1, L_2 содержат только вершины B_1, B_2 многогранников P_1, P_2.

b) Плоскость L_1 содержит ребро K_1 многогранника P_1, а L_2 — ребро K_2 (или вершину) многогранника P_2.

c) Плоскость L_1 содержит грань G_1 многогранника P_1, а L_2 — грань G_2 (или ребро или вершину) многогранника P_2.

Все другие возможности получаются из b) и c), если поменять ролями многогранники P_1 и P_2.

A) В случае a) окрестность точки на многограннике R будет плоской. (Действительно, если в вершину B_1 идёт вектор a_1, то в этой вершине $h_1(n) = a_1 n$. Поэтому $h_1(n) - h_2(n) = (a_1 - a_2) n = an$ и поэтому $an\varphi(n) = 1$, т. е. концы векторов $\varphi(n) n$ лежат в плоскости.)

Так как точка A лежит на границе области H, то, следовательно, случай a) исключается.

C) В случае c) замечаем, что неравенство (4) означает, что опорные плоскости многогранника P_2 или совпадают с опорными плоскостями P_1, или сдвинуты внутрь P_1, а потому грань G_2 содержится в G_1. Но (так как мы рассматриваем векторы n, для которых $h_1(n) \neq h_2(n)$) по условию теоремы это возможно лишь в том случае, если грани G_1 и G_2 совпадают. Тогда, очевидно, для векторов, близких к n_0, $h_1(n) = h_2'(n)$. А так как $h_2'(n)$ отличается от $h_2(n)$ на слагаемое вида an, соответствующее произведённому переносу многогранника P_2, то $h_1(n) - h_2(n) = an$.

Это, так же как в случае A), означает, что окрестность точки A многогранника R — плоская, вопреки предположению, что A лежит на границе области H.

B) Случай b) возможен лишь тогда, когда рёбра K_1, K_2 параллельны либо одно из них есть точка.

Действительно, так как $h_1(n_0) - h_2'(n_0) = 0$, то рёбра K_1, K_2 лежат в общей опорной плоскости. Если они не параллельны, то многогранники P_1, P_2 пересекаются, и разность $h_1(n) - h_2(n)$, очевидно, меняет знак для векторов n, сколь угодно близких к n_0. Поэтому неравенство (4) оказывается невозможным.

Но если рёбра K_1, K_2 параллельны (или одно из них есть точка), то они имеют общий пучок опорных плоскостей. Нормали n к этим плоскостям лежат в одной плоскости. Соответственно и концы векторов $\varphi(n) n$, идущих в точки многогранника R, лежат в такой же плоскости S. Пересечение плоскостей S и T есть прямая, и потому на многограннике R мы имеем ребро r. Таким образом, точка A на границе области H должна лежать внутри ребра r многогранника R.

Но A — любая точка на границе области H, и потому оказывается, что на этой границе вовсе не может быть вершин. Граница эта состоит из прямых.

---

*) Действительно, если бы было $H = T$, то весь многогранник R сводился бы к плоскости T, и тогда функция $n\varphi(n)$ удовлетворяла бы уравнению плоскости $\frac{na}{h_1(n) - h_2(n)} = p$, где a — некоторый вектор, а p — некоторое постоянное число. Иначе говоря, функция $h_1(n) - h_2(n)$, а следовательно, и $h_1(n) - h_2'(n)$ была бы линейной. Но при наличии неравенства $h_1(n) - h_2'(n) \leqslant 0$ это возможно лишь в том случае, когда $h_1(n) = h_2'(n)$.

Иными словами, ребро r многогранника R должно быть бесконечным в обе стороны. Векторы n, направленные в его точки, описывают полуокружность. Это означает, что нормали n к опорным плоскостям многогранников P_1, P_2, проходящим через их рёбра K_1, K_2, описывают полуокружность. Но в таком случае многогранники вырождаются в плоские фигуры.

Следовательно, и здесь приходим к противоречию. Тем самым теорема доказана.

В n-мерном пространстве нужно, пользуясь аналогичными соображениями, рассматривать n возможностей, аналогичных случаям a), b), c).

4. В § 3 на простом примере было показано, что многомерное обобщение доказанной там теоремы о замкнутых многогранниках невозможно. Поэтому и доказательство, аналогичное только что изложенному, не может быть проведено для указанной теоремы, если только не привлечь каких-то дополнительных соображений, действительных лишь для трёхмерного пространства. В изложенном доказательстве было существенно, что векторы n, для которых $h_1(n) - h_2(n) > 0$ (или < 0), идут в одно полупространство и потому многогранник R заведомо имел опорную плоскость. В случае же замкнутых многогранников P_1, P_2 векторы n с $h_1(n) - h_2(n) > 0$ могут не идти в одно полупространство, и рассуждение отпадает в самом начале.

Тем не менее можно быть уверенным, что доказательство, основанное на рассмотрении разности опорных функций $h_1(n) - h_2(n)$, возможно и для теоремы о замкнутых многогранниках. Эта уверенность основана, между прочим, на том, что именно таким путём доказывается аналогичная теорема для кривых поверхностей. Сама эта теорема формулируется в § 6. Осуществление такого доказательства теоремы о замкнутых многогранниках представляет интересную задачу.

Интерес её состоит в усовершенствовании метода. Общая его идея: по двум данным поверхностям образовать третью, изображающую в некотором смысле их разность, и, установив у этой поверхности существование опорных плоскостей, привести это обстоятельство к противоречию. В этом общем виде метод применяется также в доказательствах теорем о неизгибаемости поверхностей, начиная с первой работы Либмана 1899 г., где была впервые доказана неизгибаемость сферы.

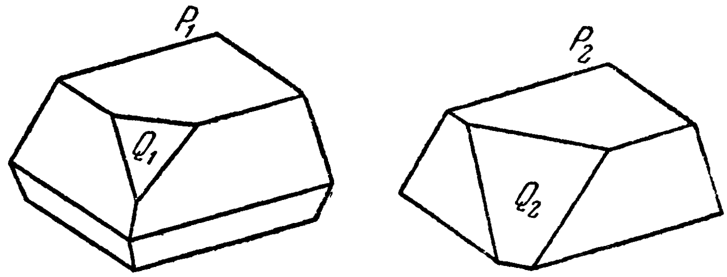
Особой силы этот метод достиг в руках Погорелова: именно этим методом он доказал свои теоремы о неизгибаемости выпуклых поверхностей, упомянутые в § 6 главы III. В этой связи представляло бы также значительный интерес найти доказательство теоремы единственности замкнутого выпуклого многогранника с данной развёрткой, аналогичное доказательству, данному Погореловым для соответствующей теоремы о кривых поверхностях с ограниченной кривизной.

5. Приведём ещё одну теорему о конечных многогранниках с границей при условии, что граница многогранника представляет собой одну замкнутую ломаную без кратных точек.

Теорема 2. *Пусть даны два конечных выпуклых многогранника, ограниченных каждый одной замкнутой ломаной. Пусть они удовлетворяют следующим условиям:* 1) *Каждой грани одного из них соответствует параллельная грань другого и обратно, причём ни одну из этих граней нельзя поместить внутри другой параллельным переносом,* 2) *У каждой крайней грани Q любого из данных многогранников все её граничные рёбра образуют одну ломаную, а на параллельной ей грани Q' другого многогранника либо вовсе нет граничных рёбер, либо все они соответственно параллельны граничным рёбрам грани Q. При этом все граничные рёбра грани Q не больше или, напротив, не меньше параллельных им рёбер грани Q'.*

При этих условиях многогранники равны и параллельно расположены.

Здесь, как всегда, параллельными считаются грани с параллельными внешними нормалями, и одна из параллельных друг другу граней может вырождаться в ребро. Вырождение в вершину исключено, так как одну точку всегда можно поместить внутри грани. Во втором условии под параллельными рёбрами понимаются рёбра также с параллельными внешними нормалями, но речь идёт о нормалях в плоскостях граней Q, Q'. При этом, как и всюду выше, считается, что если на грани Q' (или Q) нет ребра, параллельного данному ребру грани Q (или Q'), то оно есть, но имеет нулевую длину. Во втором условии также допускается, что грань Q', параллельная грани Q, может вырождаться в ребро. На черт. 130 все грани многогранника P_2, параллельные крайним граням многогранника P_1, вырождаются в рёбра. Грань Q_1 многогранника P_1, параллельная крайней грани Q_2 многогранника P_2, не имеет с границей P_1 общих точек. На этом чертеже второе условие теоремы выполнено; не выполнено, очевидно, первое условие.



Черт. 130.

В простейшем случае крайние грани многогранников соответственно параллельны, не вырождаются и имеют соответственно параллельные граничные рёбра. Важно, что на одной грани все эти рёбра не больше (или не меньше), чем на другой. В частности, это условие заведомо выполнено, если на каждой крайней грани есть только одно граничное ребро и на параллельных крайних гранях эти рёбра параллельны.

6. Наметим доказательство формулированной теоремы, опуская его детали, которые, впрочем, можно восполнить без особого труда.

Пусть P_1, P_2 — многогранники, удовлетворяющие условиям теоремы. Построим их выпуклые оболочки $\overline{P}_1$ $\overline{P}_2$. Это будут телесные выпуклые многогранники и P_1, P_2 будут частями их границ. Построим полусумму $\overline{P}$ многогранников $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$:

$$\overline{P}=\frac{1}{2}\,(\overline{P}_1+\overline{P}_2).$$

Нас будет занимать не весь многогранник $\overline{P}$, а только часть P его поверхности, составленная гранями, которые являются полусуммами граней или рёбер исходных многогранников P_1, P_2. Можно убедиться, что P есть выпуклый многогранник, также ограниченный одной замкнутой ломаной. Все его граничные рёбра суть полусуммы параллельных граничных рёбер (или рёбер и вершин) многогранников P_1, P_2. Грани многогранника P могут быть тех же трёх типов, что в случае теоремы 1 § 3:

1) Полусуммы параллельных настоящих граней многогранников P_1 и P_2.

2) Полусуммы настоящей грани Q одного из них и ребра другого, причём это ребро лежит в опорной плоскости, параллельной грани Q.

3) Полусуммы непараллельных рёбер, лежащих в параллельных опорных плоскостях (например, рёбер q_1, q_2 черт. 127, стр. 264). Эти грани суть параллелограммы.

Каждое ребро p многогранника P есть полусумма параллельных рёбер p_1 и p_2 многогранников P_1 и P_2, причём одно из этих рёбер может вырождаться в вершину.

Отнесём каждому ребру p многогранника P знак разности p_1-p_2; если же $p_1-p_2=0$, то оставим ребро p неотмеченным. Тогда, используя лемму 3 § 1 буквально так же, как в доказательстве теоремы 1 § 3, убеждаемся, что если какая-нибудь грань на P имеет отмеченные рёбра, то число перемен их знаков при обходе этой грани не меньше четырёх. В частности, вокруг каждой грани третьего типа всегда имеются четыре перемены знака.

Вследствие условия 2) теоремы граничные рёбра любой крайней грани Q многогранника P образуют одну ломаную. По тому же условию все граничные рёбра одной крайней грани многогранника P_1 не больше или не меньше рёбер параллельной крайней грани многогранника P_2. Поэтому в последовательности граничных рёбер грани Q нет перемен знака. Это тем более верно, если Q есть грань третьего типа: в этом случае она — параллелограмм и имеет только одно граничное ребро.

Возьмём теперь второй экземпляр P' того же многогранника P, с той же расстановкой знаков на его рёбрах. Отождествим его граничные рёбра с соответствующими граничными рёбрами многогранника P. После этого исключим отождествлённые граничные рёбра, а также их концы, так что пары рёбер многогранников P и P', подходивших к их границам, сольются в одно ребро, если только их концы — свободные, т. е. принадлежат лишь одному неограниченному ребру. Полученный таким образом абстрактный многогранник $P \dotplus P'$, очевидно, гомеоморфен сфере и не имеет вершин, в которых сходилось бы только по два ребра.

У многогранника $P \dotplus P'$ имеются грани двух видов: одни соответствуют граням на P или P', не имевшим граничных рёбер; другие образованы каждая из двух экземпляров одной и той же граничной грани многогранника P: один экземпляр принадлежит P, другой — P'; они слились в одну грань вследствие отождествления и последующего исключения граничных рёбер.

Допустим, что на $P \dotplus P'$ есть грань с отмеченными рёбрами. Если это — грань первого вида, то вокруг неё имеется не менее четырёх перемен знака.

Пусть теперь она будет гранью второго вида; тогда её можно обозначить $Q \dotplus Q'$, где Q и Q' — образующие её граничные грани многогранников P и P'. При образовании $Q \dotplus Q'$ были исключены граничные рёбра грани Q. Но, как было отмечено, на этих рёбрах нет перемен знака, а потому, исключив их, мы исключили самое большее две перемены знака: одну при переходе к этим рёбрам, другую — при переходе от них к следующим. Следовательно, в остающейся части контура грани Q остаётся не менее двух перемен знака. А так как грань Q' есть лишь второй экземпляр той же грани Q, то для неё верно то же самое. В результате при обходе вокруг $Q \dotplus Q'$ мы будем иметь не менее четырёх перемен знака.

Таким образом, вокруг каждой грани многогранника $P \dotplus P'$, имеющей отмеченные рёбра, должно быть не менее четырёх перемен знака. Но так же как в доказательстве теоремы 1 § 3, переходя к двойственному многограннику, убедимся, что вследствие леммы Коши отмеченных рёбер не должно быть вовсе, т. е. все рёбра исходных многогранников P_1 и P_2 должны быть соответственно равны. (В частности, граней третьего типа, образованных полусуммой непараллельных рёбер, нет вовсе.) Отсюда немедленно следует, что многогранники P_1 и P_2 равны и параллельно расположены, что и требовалось доказать.

Никакие другие теоремы подобного рода для многогранников с границей, кроме теорем 1а, 2, нам не известны.

§ 6. Обобщения

1. Теореме § 3 о замкнутых многогранниках соответствует в случае кривых поверхностей следующая теорема:

Если две аналитические замкнутые поверхности со всюду положительной кривизной обладают тем свойством, что их индикатрисы Дюпена в любой паре точек с параллельными внешними нормалями нельзя поместить одну внутри другой путём параллельного переноса, то поверхности равны и параллельно расположены.

Иначе говоря, две аналитические замкнутые поверхности со всюду положительной кривизной либо равны и параллельно расположены, либо содержат такие точки с параллельными нормалями, в которых индикатрисы Дюпена могут быть помещены одна внутри другой параллельным переносом.

Индикатриса Дюпена в точке A поверхности F есть, говоря несколько неточно, фигура, получаемая в сечении поверхности F плоскостью, параллельной и бесконечно близкой к касательной плоскости в точке A. Сечение многогранника плоскостью, параллельной и бесконечно близкой к плоскости грани, есть, очевидно, сама эта грань. Из этого сопоставления аналогия теоремы о поверхностях с теоремой о многогранниках становится особенно ясной.

Доказательство теоремы исходит из рассмотрения разности опорных функций двух поверхностей и основано по существу на простых геометрических соображениях, которые, однако, приводят к результату только благодаря предположению аналитичности поверхностей *). Задача освобождения от этого тяжёлого требования представляется важной, но и трудной. Тем более было бы замечательно формулировать и доказать такую теорему, которая, будучи верной для любых замкнутых выпуклых поверхностей без каких бы то ни было условий регулярности, содержала бы как частные случаи данную теорему об аналитических поверхностях, и теорему § 3 о многогранниках.

Теореме о поверхностях можно дать несколько более слабую аналитическую формулировку.

Пусть $f(x, y; n)$ — функция единичного вектора n и двух численных переменных, определённая в области $x \geqslant y$ и монотонная, т. е. при всяком n $f(x_1, y_1; n) > f(x_2, y_2; n)$, если $x_1 > x_2$, $y_1 \geqslant y_2$ или $x_1 \geqslant x_2$, $y_1 > y_2$. Пусть F_1, F_2 — две регулярные замкнутые выпуклые поверхности и $R_1 \geqslant R'_1$, $R_2 \geqslant R'_2$ — их главные радиусы кривизны в точках с параллельными внешними нормалями n. Если при всяком n, т. е. для каждой пары таких точек, $f(R_1, R'_1; n) = f(R_2, R'_2; n)$, то поверхности равны и параллельно расположены **). Иными словами, поверхность определяется заданием $f(R, R'; n)$ как функции нормали (т. е. $f = g(n)$, однозначно с точностью до переноса).

Связь этой формулировки с первоначальной геометрической выясняется из следующего соображения. Если $f(R_1, R'_1; n) = f(R_2, R'_2; n)$ и, скажем, $R_1 > R_2$, то ввиду монотонности функции f должно быть $R'_1 < R'_2$. Но, как известно, главные радиусы кривизны равны квадратам полуосей того эллипса, каким является индикатриса Дюпена. Если же у двух эллипсов разности осей — разных знаков, то эти эллипсы непомещаемы один в другом путём переноса. (Важно, что сравниваются большая ось с большой и малая ось с малой, потому что по условию $R \geqslant R'$.) Обратное заключение, вообще говоря, неверно, и потому геометрическая формулировка — существенно более общая, чем аналитическая.

Данная теорема содержит неограниченное множество частных теорем, получающихся при специальном выборе функции $f(x, y; n)$. Первая из таких частных теорем была доказана Христоффелем в 1867 г.; в ней $f = x + y$, т. е. речь идёт о равенстве поверхностей с равными суммами главных радиу-

---

*) См. А. Д. Александров, О теоремах единственности для замкнутых поверхностей, Доклады Акад. наук СССР, 1939, т. 22, № 3. В этой работе теорема доказывается в иной формулировке, эквивалентной, однако, данной здесь.

**) Здесь можно рассматривать и не выпуклые поверхности, но такие, что каждая из них есть огибающая семейства плоскостей $nx = h(n)$, где $h(n)$ есть функция единичного вектора n, определённая для всех n, однозначная и аналитическая. У такой поверхности нормали n к её касательным плоскостям однозначно покрывают всю сферу. Поэтому, если она — не выпуклая, то имеет рёбра возврата. Это не исключается; в соответствующих точках радиусы кривизны существуют, но хотя бы один из них обращается в нуль.

сов кривизны. Следующий результат — теорема Минковского 1899 г., где $f = xy$, т. е. речь идёт о равенстве поверхностей с равными произведениями главных радиусов кривизны, или, что равносильно, с равными гауссовыми кривизнами. Эта теорема примыкает к теореме Минковского о равенстве многогранников с равновеликими гранями, потому что гауссова кривизна равна отношению бесконечно малых площадок на сферическом изображении и на поверхности, т. е. она определяет зависимость площадей на поверхности от сферического изображения; этим её задание выполняет ту же роль, какую играет задание площади грани как функции нормали.

Можно назвать ещё некоторые более поздние частные результаты, так сказать, поглощённые нашей теоремой.

Данная аналитическая формулировка допускает ряд вариантов в зависимости от условий регулярности, налагаемых на функцию f и поверхности F_1, F_2.

Если требовать аналитичности поверхностей F_1, F_2, то функция $f(x, y; n)$ может быть совершенно произвольной, не считая, конечно, обязательного условия монотонности по x, y; например, она может быть даже неизмеримой по n.

Если потребовать, чтобы функция f была трижды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяла требованию «существенной» монотонности: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$, то от поверхностей F_1, F_2 достаточно требовать четырёхкратной дифференцируемости *).

Я сохраняю убеждение, что функция f может быть совершенно произвольной, а от поверхностей достаточно требовать двукратной дифференцируемости, лишь бы существовали главные радиусы кривизны. Однако попытки доказать теорему в таком общем виде остались пока безрезультатными.

Теорема в её аналитической форме приводится к вопросу о единственности решения дифференциального уравнения в частных производных. В качестве функции, задающей поверхность, берём опорную функцию для единичных векторов $h(n) = h(\xi, \eta)$, т. е. расстояние от начала до касательной плоскости, как функцию нормали n или координат ξ, η на единичной сфере. Главные радиусы кривизны выражаются через $h(\xi, h)$ и её производные до второго порядка **). Поэтому задание $f(R, R'; n)$ как функции нормали, т. е. $f(R, R'; n) = g(n)$, равносильно дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$\Phi(h_{\xi\xi}, \ldots, h; \xi, \eta) = g(\xi, \eta).$$

Речь идёт о единственности решения этого уравнения на всей сфере с точностью до слагаемого an, соответствующего переносу. Это — уравнение достаточно общего вида, поскольку функция f подчинена лишь условию существенной монотонности $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$. Из этого условия вытекает, что уравнение будет эллиптического типа ***).

*) Это — наибольшее достигнутое пока ослабление условий, налагаемых на поверхности, установлено А. В. Погореловым; см. его заметку «Распространение общей теоремы единственности А. Д. Александрова...», Доклады Акад. наук СССР, т. 62, вып. 3 (1943), стр. 297. Результат с более сильными требованиями получен впервые мной в работе «Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей», Доклады АН СССР, т. 19 (1938), стр. 233. Другое доказательство дано мной в статье «О работах Кон-Фоссена», Успехи матем. наук, т. II, вып. 3 (19), (1947), стр. 115—120.

**) См., например, Бляшке, Дифференциальная геометрия, § 94.

***) См. А. В. Погорелов, цит. выше заметка в Докладах Акад. наук СССР.

2. Для поверхностей с границей и бесконечных поверхностей можно формулировать теоремы, вполне аналогичные теоремам 1 и 1а § 5. Так, аналогично теореме 1а имеем:

Пусть F_1 и F_2 — две выпуклые поверхности с общим сферическим изображением, содержащимся внутри полусферы. Пусть у этих поверхностей 1) касательные плоскости в точках границы совпадают, 2) во внутренних точках с параллельными внешними нормалями индикатрисы Дюпена не помещаются одна внутри другой. Тогда поверхности совпадают (с точностью до их частей, лежащих в плоскостях, касательных в точках границы).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 § 5.

Обозначая $h_1(n)$, $h_2(n)$ опорные функции поверхностей F_1, F_2, строим для каждого единичного вектора n точку, являющуюся концом вектора $\varphi(n)\,n$, где $\varphi(n)=\dfrac{1}{h_1(n)-h_2(n)}$. Геометрическое место R этих точек с $\varphi(n)>0$ (или <0) должно иметь опорные плоскости. Оно оказывается, однако, поверхностью неположительной кривизны и не может иметь опорных плоскостей, кроме того случая, когда само вырождается в плоскость. А тогда $h_1(n)=h_2(n)$, и поверхности совпадают.

Теорема вместе с намеченным доказательством буквально обобщается на поверхности в n-мерном пространстве. В отличие от случая замкнутой поверхности предположения регулярности не играют здесь никакой роли.

Распространяется ли данная теорема также на поверхности, сферическое изображение которых содержится в замкнутой полусфере, но не внутри неё,— не известно. Для поверхностей со сферическим изображением, не лежащим в полусфере, она, надо думать, не верна; впрочем, для подтверждения этого нужно найти соответствующий пример.

3. Теоремы о замкнутых поверхностях, приведённые в n° 1, не удаётся обобщить на многомерные пространства. Вызвано ли это недостатком метода или самое обобщение невозможно,— остаётся неизвестным. Невозможность обобщения теоремы § 3 о замкнутых многогранниках была уже установлена на примере в § 3. Там же было указано, что тем не менее теорема Минковского о равенстве многогранников с попарно параллельными и равновеликими гранями верна в пространстве любого числа измерений. Никаких других теорем такого рода с другими монотонными функциями граней вместо площади не известно *).

Для замкнутых выпуклых поверхностей n-мерного пространства можно формулировать достаточно общую теорему. Для регулярных поверхностей она сводится к утверждению:

Если у двух замкнутых выпуклых поверхностей в точках с параллельными внешними нормалями данные элементарные симметрические функции главных радиусов кривизны равны, то поверхности равны и параллельно расположены. (Элементарная симметрическая функция от $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ есть коэффициент многочлена с корнями $R_1, \ldots, R_{n-1}$.)

Вводя вместо функций радиусов кривизны соответствующие функции множества на сфере, эту теорему можно обобщить на выпуклые поверхности,

*) Некоторое обобщение теоремы Минковского можно получить, если предполагать заранее, что многогранники P и P' имеют одинаковое строение. Однако этот результат не кажется нам интересным. Условие равенства состоит здесь в равенстве смешанных площадей граней многогранников P, P' и данных многогранников $P_1, \ldots, P_m$ того же строения:

$$F_j(\underbrace{P \ldots P}_{n-m-1} P_1 \ldots P_m)=F_j(\underbrace{P' \ldots P'}_{n-m-1}, P_1 \ldots P_m)$$

(см. § 2 гл. VII). Без предположения об одинаковости строения теорема не верна.

не подчинённые никаким условиям регулярности. Именно в такой общей форме эта теорема была впервые установлена мной *).

В частности, интеграл от произведения главных радиусов кривизны поверхности Φ по множеству нормалей, т. е. по множеству на единичной сфере, есть площадь соответствующего множества на поверхности. Рассматриваемая как функция множества на сфере, она будет «поверхностной функцией» $F_{\Phi}(M)$. Общее определение этой функции дано в n° 2 § 7 главы II.

Упомянутая только что теорема содержит утверждение, что произвольные замкнутые выпуклые поверхности с равными поверхностными функциями равны и параллельно расположены.

Это есть прямое обобщение теоремы Минковского о многогранниках на произвольные выпуклые поверхности.

Доказательства упомянутых теорем основаны на так называемой теории смешанных объёмов, первоначальное понятие о которой даётся в § 3 главы VIII.

4. На первый взгляд обобщение теорем этой главы на многогранники в неэвклидовом пространстве может показаться вовсе бессмысленным ввиду отсутствия в таком пространстве параллельного переноса. Однако если понятие параллельности определить в проективных терминах, то задача представится не столь уж нелепой. Именно, на проективном языке попарная параллельность граней означает, что плоскости граней попарно пересекаются по прямым, лежащим в одной (бесконечно удалённой) плоскости. Это условие можно уже переносить в сферическое пространство и пространство Лобачевского. Тогда можно поставить, например, такой вопрос. Пусть у двух сферических многогранников грани подчинены соответствующему условию расположения и имеют соответственно равные площади. Имеется ли тогда некоторое простое преобразование, переводящее один многогранник в другой, так же как это осуществляет перенос в эвклидовом пространстве? Этот вопрос уже не кажется бессмысленным. Однако может оказаться, что такого простого преобразования не бывает, и тогда вопрос сделается неинтересным.

---

*) А. Д. Александров, К теории смешанных объёмов выпуклых тел, часть II, Матем. сборник, т. 2 (34), вып. 6 (1937). В третьей части этой работы, Матем. сборник, т. 3 (35), вып. 1 (1938), установлен даже существенно более общий результат.

ГЛАВА VII

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ МНОГОГРАННИКОВ С ДАННЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ ГРАНЕЙ

§ 1. Существование многогранника с данными площадями граней

1. Мы докажем здесь теорему Минковского

Теорема. *Если $n_1, \ldots, n_m$ — некомпланарные единичные векторы и $F_1, \ldots, F_m$ — такие положительные числа, что $\sum_{i=1}^{m} F_i n_i = 0$, то существует замкнутый выпуклый многогранник, у которого n_i и F_i суть внешние нормали и площади его граней.* (В силу теоремы 1 § 3 гл. VI такой многогранник — единственный с точностью до параллельного переноса.) Здесь и всюду дальше без особых оговорок подразумевается, что все векторы n_i различны.

Как уже было отмечено в n° 3 § 2 главы II, условия, наложенные на векторы n_i и числа F_i, очевидно необходимы для того, чтобы эти векторы и числа могли служить соответственно нормалями и площадями граней замкнутого выпуклого многогранника. В частности, условие $\sum_{i=1}^{m} F_i n_i$ означает равенство нулю векторной площади замкнутого многогранника. Теорема Минковского утверждает вместе с тем достаточность этих условий.

Заметим важное для дальнейшего обстоятельство: *из условий, наложенных на n_i и F_i, следует, что векторы n_i не направлены в одно полупространство.* Иначе вектор $\sum_{i=1}^{m} F_i n_i$ не мог бы равняться нулю, так как все $F_i > 0$.

В соответствии с этим в теореме Минковского можно заранее потребовать, чтобы векторы n_i не были направлены в одно (замкнутое) полупространство, а тогда они не будут также компланарными.

2. Прежде чем приступить к доказательству теоремы Минковского докажем две леммы.

Лемма 1. *Каковы бы ни были некомпланарные векторы n_i, существует выпуклый многогранник, у которого эти векторы являются нормалями его граней. Если векторы n_i не направлены в одно* *замкнутое полупространство, то всякий такой многогранник — замкнутый, в противном случае он — бесконечный.*

Проведём из некоторой точки лучи l_i в направлении векторов n_i и каждый луч l_i пересечём плоскостью Q_i, ему перпендикулярной. Эти плоскости ограничат некоторый телесный многогранник. Однако при произвольном выборе плоскостей Q_i некоторые из них могут и не касаться многогранника P. Если же плоскости Q_i выбрать так, чтобы они касались какого-либо шара с центром в точке O, то, как очевидно, каждая плоскость Q_i даст на многограннике P_0 грань, так что такой многогранник, описанный около шара, будет иметь все грани с нормалями n_i. Так как векторы n_i не компланарны, то этот многогранник не сводится к бесконечной призме.

Если векторы n_i, а тем самым и лучи l_i не направлены в одно замкнутое полупространство, то для всякого луча l, проведённого из точки O, найдётся луч l_i, образующий с l острый угол. В таком случае плоскость Q_i пересекает луч l. Следовательно, многогранник P, ограниченный этими плоскостями, не содержит никакого луча и тем самым он — конечный. Если же лучи l_i направлены в одно полупространство, то луч l, перпендикулярный к граничной плоскости этого полупространства и направленный в противоположное полупространство, образует со всеми l_i тупые или прямые углы. Поэтому никакая плоскость Q не может пересечь такого луча l. Следовательно, многогранник P содержит луч l и тем самым этот многогранник — бесконечный.

Лемма 2. *У всякого замкнутого выпуклого многогранника, площадь которого не больше данного F, а площадь каждой грани не меньше данного $f > 0$, опорные числа ограничены в зависимости только от F и f, если начало взято внутри многогранника.*

Эта лемма может быть доказана разными способами; она, в частности, легко выводится из максимального свойства шара иметь при заданном объёме наименьшую площадь *). Однако, во-первых, указан-

---

*) В силу этого свойства шара для всякого выпуклого тела имеет место известное неравенство между площадью F и объёмом V:

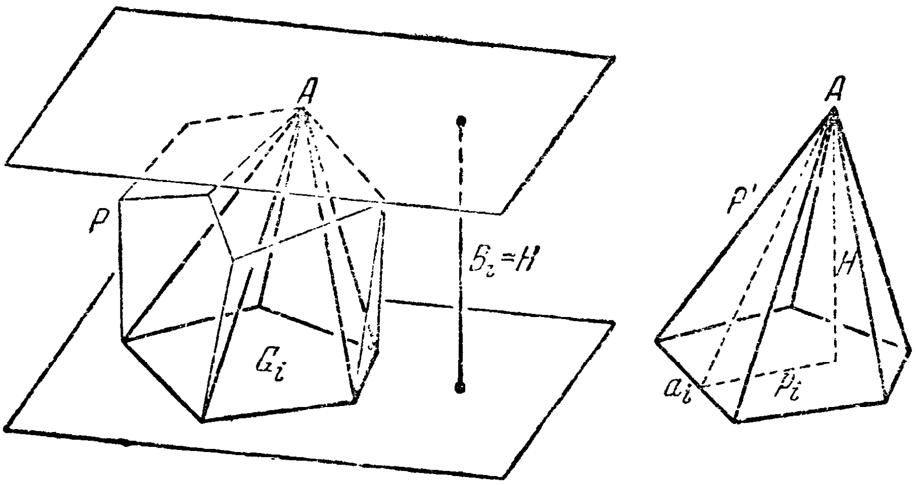
$$36\pi V^2 \leqslant F^3. \qquad (*)$$

Пусть начало лежит внутри данного многогранника P и пусть F_i — площадь, а h_i — опорное число какой-либо грани этого многогранника. Тогда он содержит пирамиду с высотой h_i и основанием F_i; и потому его объём $V \geqslant \frac{1}{3} h_i F_i$. С другой стороны, по неравенству (*) $V \leqslant \frac{F^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{\pi}}$. Поэтому $h_i \leqslant \frac{F^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi} F_i}$, так что если $F_i > f$, то

$$h_i < \frac{F^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\pi f}} \qquad (**)$$

при любом i, что и требовалось доказать. Однако из следующей далее теоремы ное свойство шара доказывается сложно и, во-вторых, из него выводится грубая оценка для опорных чисел многогранника в зависимости от F и f. Поэтому мы получим лемму 2 как следствие теоремы, которая при элементарности доказательства даёт точную оценку для опорных чисел (вернее ширины) многогранника.

Теорема. *Назовём шириной многогранника в данном направлении расстояние между его опорными плоскостями, перпендикулярными к этому направлению.*



Черт. 131.

Пусть F — площадь замкнутого выпуклого многогранника P, F_i — площадь какой-либо его грани, B_i — его ширина в направлении, перпендикулярном к этой грани. Имеет место неравенство

$$B_i < \frac{F - F_i}{\sqrt{\pi F_i}} \tag{1}$$

(причём это неравенство — точное в том смысле, что существуют многогранники, для которых дробь $\frac{\sqrt{\pi}\, B_i \sqrt{F_i}}{F - F_i}$ сколь угодно близка к единице).

Пусть G_i — выбранная грань многогранника P. Пусть A — точка, в которой его касается опорная плоскость, параллельная, но противоположная G_i. Построим пирамиду P' с основанием G_i и вершиной A (черт. 131). Её ширина в направлении, перпендикулярном к грани G_i, очевидно, — та же самая B_i, что и у исходного многогранника P; грань G_i у P и P' — общая, но вся площадь F' пирамиды P' не больше, чем

мы получим оценку $h_i < \frac{F}{\sqrt{\pi F_i}}$ при любом i и, следовательно, $h_i < \frac{F}{\sqrt{\pi f}}$ или

$$h_i < \frac{F\sqrt{f}}{\sqrt{\pi} f}. \tag{***}$$

Но $f < \frac{1}{4} F$, потому что число граней не меньше четырёх; поэтому оценка (***) точнее, чем (**); если же f мало в сравнении с F, что заведомо имеет место, когда число граней велико, то оценка (***) будет гораздо более точной, чем (**).

площадь многогранника P. Поэтому, если мы установим неравенство (1) для пирамиды P', то оно тем более будет верно для многогранника P.

Этим доказано, что неравенство (1) достаточно доказать для пирамиды, причём под F_t и B_t нужно понимать, соответственно, площадь S её основания G_t и высоту H.

Итак, рассмотрим пирамиду P'. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — стороны её основания, а $p_1, \ldots, p_n$ — их расстояния от проекции вершины пирамиды на плоскость основания. Тогда высота i-й боковой грани равна $\sqrt{H^2+p_i^2}$, а её площадь $\frac{1}{2}a_i\sqrt{H^2+p_i^2}$. Поэтому площадь боковой поверхности пирамиды (полная площадь F за вычетом основания S) будет

$$F-S=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i\sqrt{H^2+p_i^2}, \tag{2}$$

откуда

$$\frac{F-S}{H\sqrt{S}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\sqrt{H^2+p_i^2}}{2H\sqrt{S}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\sqrt{1+\frac{p_i^2}{H^2}}}{2\sqrt{S}}. \tag{3}$$

Но, очевидно, $\sum_{i=1}^{n}a_i\sqrt{1+\frac{p_i^2}{H^2}}>\sum_{i=1}^{n}a_i=L$, где L — периметр основания пирамиды. Поэтому (3) даёт

$$\frac{F-S}{H\sqrt{S}}>\frac{L}{2\sqrt{S}}. \tag{4}$$

А так как при данном периметре наибольшую площадь имеет круг, для которого $L^2=4\pi S$, то всегда *)

$$\frac{L}{2\sqrt{S}}>\sqrt{\pi}, \tag{5}$$

и из (4) следует, что

$$\frac{F-S}{H\sqrt{S}}>\sqrt{\pi}. \tag{6}$$

Это и есть требуемое неравенство (1) для $S=F_t$ и $H=B_t$.

---

*) Для получения более грубой оценки можно обойтись и без указанного максимального свойства круга. Многоугольник с периметром L заведомо можно поместить в квадрате со стороной $\frac{1}{2}L$, потому что его максимальная ширина не может быть больше половины периметра. Поэтому для его площади имеем: $S<\frac{1}{4}L^2$ или $\frac{L}{2\sqrt{S}}>1$. Таким образом, этот уже совершенно элементарный вывод даёт $\frac{F-S}{H\sqrt{S}}>1$. Аналогично в n-мерном пространстве получим $F-S>HS^{\frac{n-2}{n-1}}$.

Из этого вывода ясно, что в каждом из неравенств (4), (5), (6) можно сколь угодно близко подойти к равенству, стоит лишь взять правильную пирамиду с достаточно большим числом сторон и достаточно большой высотой. Тем самым дополнительное утверждение о точности неравенства (1) также доказано.

Формулированная выше лемма 2 уже заключается в неравенстве (1). Действительно, если начало лежит в многограннике P, то опорное число h_i грани G_i будет не больше ширины многогранника в направлении, перпендикулярном к грани G_i, а так как в силу (1) $B_i < \frac{F}{\sqrt{\pi F_i}}$, то тем более $h_i < \frac{F}{\sqrt{\pi F_i}}$. Если же площади всех граней не меньше f, то заключаем, что опорные числа всех граней удовлетворяют одному и тому же неравенству

$$h_i < \frac{F}{\sqrt{\pi f}},$$

как то и утверждает лемма 2.

3. Теперь докажем теорему Минковского, пользуясь леммой об отображении (гл. II, § 2).

Пусть $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ — данные единичные векторы, не направленные в одно замкнутое полупространство. По лемме 1 существуют замкнутые выпуклые многогранники, для которых эти векторы суть нормали к граням. Каждый такой многогранник задаётся m своими опорными числами $h_1, \ldots, h_m$ и потому его можно представить точкой в m-мерном пространстве R^m с координатами $h_1, \ldots, h_m$.

При достаточно малых параллельных перемещениях плоскостей, ограничивающих многогранник, ни одна из его граней, очевидно, не исчезает. Поэтому, если $h_1^0, \ldots, h_m^0$ — опорные числа какого-либо данного многогранника, то числа $h_1, \ldots, h_m$, достаточно близкие к этим $h_1^0, \ldots, h_m^0$, также будут опорными числами некоторого из рассматриваемых многогранников. Следовательно, совокупность всех рассматриваемых многогранников изображается открытым множеством $\boldsymbol{P}_0$ в нашем m-мерном пространстве R^m.

Однако мы не должны различать многогранники, получающиеся один из другого параллельным перенесением, потому что нормали и площади граней задают многогранник лишь с точностью до переноса. Поэтому мы должны рассматривать не самое множество $\boldsymbol{P}_0$, а многообразие $\boldsymbol{P}$ классов равных и параллельных многогранников. Определим это многообразие.

Если плоскость с нормалью $\boldsymbol{n}$ перенести на вектор $\boldsymbol{a}$, то её расстояние от начала получает слагаемое $\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}$. Поэтому при переносе многогранника на вектор $\boldsymbol{a}$ каждое его опорное число h_i получает слагаемое $\boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_i$. Следовательно, класс равных и параллельных многогранников характеризуется тем, что их опорные числа имеют вид

$h_i^0 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{n}_i$, где h_i^0 $(i=1, \ldots, m)$ — опорные числа одного из многогранников этого класса, а $\boldsymbol{x}$ — произвольный вектор. Равенства

$$h_i = h_i^0 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{n}_i = h_i^0 + xn_{ix} + yn_{iy} + zn_{iz} \qquad (i=1, \ldots, m)$$

при данных h_i^0 определяют в пространстве R^m трёхмерное пространство. Всё R^m может быть разложено на такие трёхмерные пространства; все они параллельны между собой и образуют $(m-3)$-мерное многообразие R^{m-3}. Можно представить себе, что R^m проектируется в R^{m-3} вдоль этих трёхмерных пространств *). Тогда множество многогранников $\boldsymbol{P}_0$ проектируется в множество $\boldsymbol{P}$ классов равных и параллельных многогранников. Так как $\boldsymbol{P}_0$ открыто, то $\boldsymbol{P}$ также открыто и, следовательно, представляет собой $(m-3)$-мерное многообразие в смысле принятого нами определения (n° 6 § 8 гл. II). Это многообразие $\boldsymbol{P}$ мы и будем рассматривать.

Конечно, вместо того, чтобы рассматривать классы многогранников, можно выбирать по многограннику из каждого класса и иметь дело с этими многогранниками.

Рассмотрим теперь множество всех совокупностей положительных чисел $F_1, \ldots, F_m$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{m} F_i \boldsymbol{n}_i = 0. \tag{7}$$

Это векторное равенство даёт три линейных уравнения и потому выделяет в m-мерном пространстве с координатами F_i $(m-3)$-мерное подпространство. А условие, что все $F_i > 0$, выделяет в m-мерном пространстве положительный координатный угол. Пересечение его с указанным подпространством представляет собой, очевидно, открытое выпуклое $(m-3)$-мерное множество. Это множество и будет многообразием $\boldsymbol{F}$ допустимых значений чисел $F_1, \ldots, F_m$.

Так как существуют многогранники с нормалями $\boldsymbol{n}_i$, а площади их граней положительны и удовлетворяют условию (7), то тем самым многообразие $\boldsymbol{F}$ не пусто. А так как оно есть выпуклое множество, то оно к тому же связно.

4. Многообразия $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{F}$ имеют одно и то же число измерений. Далее, мы имеем естественное отображение φ многообразия $\boldsymbol{P}$ в $\boldsymbol{F}$. Именно, каждому многограннику P (или классу) из $\boldsymbol{P}$ ставится в соответствие совокупность площадей его граней $(F_1, \ldots, F_m)$. Если мы докажем, что φ есть отображение многообразия $\boldsymbol{P}$ на всё $\boldsymbol{F}$, то теорема Минковского будет доказана. А для этого достаточно установить, что φ удовлетворяет всем условиям леммы об отображении (§ 2 гл. II). Проверим выполнение этих условий по порядку.

*) Это подобно тому, как трёхмерное пространство разлагается на параллельные плоскости, образующие одномерное многообразие. Вдоль этих плоскостей пространство проектируется в прямую.

Условие первое требует, чтобы в каждой связной компоненте многообразия $\boldsymbol{F}$ были образы точек из $\boldsymbol{P}$. В данном случае $\boldsymbol{F}$ связно, т. е. состоит из одной компоненты, и условие выполнено, потому что в $\boldsymbol{F}$ содержится образ многообразия $\boldsymbol{P}$.

Второе условие требует взаимной однозначности отображения φ. Но по доказанному в § 3 главы VI замкнутый выпуклый многогранник определяется направлениями и площадями своих граней однозначно с точностью до переноса. А это и означает, что соответствие φ между классами равных и параллельных многогранников с данными нормалями $\boldsymbol{n}_i$, с одной стороны, и совокупностями площадей их граней $(F_1, \ldots, F_m)$, с другой стороны, взаимно однозначно.

Третье условие — непрерывность отображения φ — выполняется очевидным образом: при непрерывном изменении многогранника путём смещения плоскостей его граней площади их меняются непрерывно.

Остаётся четвёртое условие: если точки $F^k = (F_1^k, \ldots, F_m^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ из многообразия $\boldsymbol{F}$ являются образами точек P^k из $\boldsymbol{P}$ и F^k сходятся к точке $F = (F_1, \ldots, F_m)$, то в $\boldsymbol{P}$ существует точка P, которая отображается в F, и имеется подпоследовательность P^{k_i} из точек P^k, сходящаяся к P. Иными словами: если площади граней $F_1^k, \ldots, F_m^k$ некоторых многогранников P^k сходятся к некоторым положительным числам $F_1, \ldots, F_m$ *), то имеется подпоследовательность P^{k_i} из многогранников P^k, сходящаяся к многограннику P, который как раз имеет площади граней $F_1, \ldots, F_m$.

То, что это условие выполняется, немедленно следует из леммы 2. Действительно, раз числа F_i^k сходятся к положительным числам F_i, то все они заключены в некоторых положительных границах. Поэтому площади многогранников P^k, равные $\sum\limits_{i=1}^{m} F_i^k$, не превосходят некоторого F, а площади F_i^k каждой грани не меньше некоторого $f > 0$. А в таком случае, перенеся многогранники P^k так, чтобы начало лежало внутри их всех, получим вследствие леммы 2, что их опорные числа ограничены в совокупности. Так как мы рассматриваем многогранники лишь с точностью до переноса, то указанный выбор их положения вполне возможен. Но когда все опорные числа ограничены, то из них можно выбрать сходящуюся последовательность. Тем самым будут сходиться плоскости граней соответствующих многогранников P^{k_i}, т. е. будут сходиться сами многогранники. Предельный многогранник P будет иметь, очевидно, предельные значения площадей граней F_i.

---

*) По условию совокупность $(F_1, \ldots, F_m)$ должна принадлежать $\boldsymbol{F}$ и, следовательно, все F_i должны быть положительны; а равенство $\sum\limits_{i=1}^{m} \boldsymbol{n}_i F_i = 0$ для чисел F_i следует из того, что этому равенству удовлетворяют числа F_i^k, сходящиеся к F_i.

Итак, последнее условие леммы об отображении также выполнено, и, применяя эту лемму, мы видим, что каждой допустимой совокупности чисел $F_1, \ldots, F_m$ отвечает многогранник с такими площадями граней; теорема Минковского доказана.

5. Заметим, что все наши рассуждения дословно повторяются в пространстве любого числа измерений, если воспользоваться теоремой об определяемости многогранника направлениями и площадями граней в n-мерном случае. Эта n-мерная теорема единственности будет доказана в § 3 гл. VIII.

§ 2. Существование многогранника с данными площадями граней по Минковскому

1. Здесь мы воспроизведём доказательство той же теоремы Минковского о существовании замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней, предложенное самим Минковским. Оно замечательно своей простотой и выгодно отличается от доказательства, данного в предыдущем параграфе, тем, что не опирается на соответствующую теорему единственности. Оно проводится совершенно одинаково в пространстве любого числа измерений. Однако метод Минковского в отличие от нашего метода леммы об отображении приспособлен именно к данной теореме, и применение аналогичной идеи к доказательству других теорем существования представляет совершенно открытую проблему. О ней мы ещё скажем несколько слов в заключение этого параграфа.

2. Начнём с некоторых простых замечаний. В начале § 1 было указано, что в теореме Минковского можно заранее требовать, чтобы данные векторы $\boldsymbol{n}_i$ не были направлены в одно замкнутое полупространство. Поэтому будем считать, что нам даны попарно различные единичные векторы $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$, удовлетворяющие этому условию.

Проведём из начала координат O лучи l_i в направлении данных векторов $\boldsymbol{n}_i$ и каждый луч пересечём плоскостью Q_i, ему перпендикулярной и удалённой от O на положительное расстояние h_i. Как показано в лемме 1 § 1, эти плоскости ограничивают некоторый конечный телесный многогранник P. Поскольку лучи l_i заданы, многогранник P полностью определяется расстояниями h_i плоскостей Q_i от начала O. Вообще говоря, при произвольных h_i не каждая плоскость Q_i будет касаться многогранника P, так что он может и не иметь всех граней с нормалями $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$.

Будем рассматривать все многогранники P независимо от наличия у них всех граней с нормалями $\boldsymbol{n}_i$. Объём многогранника P есть функция расстояний h_i ограничивающих его плоскостей от начала O.

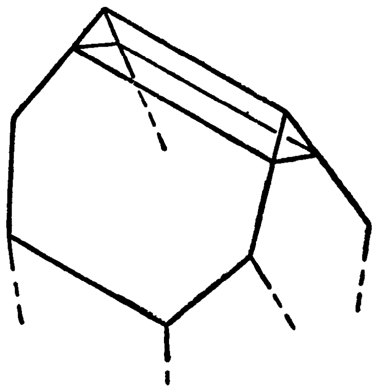
Лемма. *Объём V многогранника P есть дифференцируемая функция чисел h_i, причём $\frac{\partial V}{\partial h_i} = F_i$, где F_i — площадь соответствующей грани многогранника P или нуль, если плоскость Q_i не даёт на многограннике P никакой грани.*

Пусть плоскость Q_i даёт на многограннике P грань с площадью F_i. Сместим эту плоскость параллельно на малое расстояние Δh_i, т. е. дадим числу h_i приращение Δh_i. Тогда, если $\Delta h_i > 0$, то к многограннику прибавится некоторая часть с высотой Δh_i, которая с точностью до малых высшего порядка представляет собой призму с основанием F_i. Поэтому главная часть приращения объёма многогранника будет $dV = F_i \Delta h_i$. Аналогично, при $\Delta h_i < 0$ от многогранника отнимается часть, мало отличающаяся от призмы. Поэтому вообще $dV = F_i \Delta h_i$ и, следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial h_i} = F_i.$$

Если плоскость Q_i вовсе не касается многогранника P, то малое её смещение не меняет его, а потому в этом случае $\frac{\partial V}{\partial h_i} = 0$.

Пусть теперь плоскость Q_i касается многогранника по ребру L. Тогда при смещении её от многогранника, т. е. при $\Delta k_i > 0$, многогранник не меняется и $\Delta V = 0$. Если же плоскость Q_i смещать внутрь многогранника, т. е. взять $\Delta h_i < 0$, то от многогранника отнимется брусок с длиной, равной длине ребра L, и с поперечным сечением, площадь которого будет, как очевидно, величиной порядка $(\Delta h_i)^2$ (черт. 132). Поэтому объём бруска, т. е. убыль объёма многогранника, будет порядка $(\Delta h_i)^2$, так что $dV = 0$. Следовательно, независимо от знака Δh_i получаем, что $\frac{\partial V}{\partial h_i} = 0$.



Черт. 132.

Если, наконец, плоскость Q_i касается многогранника P в вершине, то опять-таки при $\Delta h_i > 0$ будет $\Delta V = 0$, а при $\Delta h_i < 0$ от многогранника отнимется пирамида высотой $|\Delta h_i|$ и объём её $|\Delta V|$ будет порядка $|\Delta h_i|^3$. Поэтому и в этом случае $\frac{\partial V}{\partial h_i} = 0$.

Если плоскость Q_i не даёт на многограннике P никакой грани, то естественно считать, что такая грань всё же есть, но имеет нулевую площадь. При этом условии формула $\frac{\partial V}{\partial h_i} = F_i$ верна без оговорок.

3. Теперь обратимся непосредственно к теореме Минковского. Пусть $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ — данные единичные векторы, не направленные в одно полупространство, и $F_1^0, \ldots, F_m^0$ — данные положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{m} F_i^0 \boldsymbol{n}_i = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим все многогранники P, ограниченные плоскостями Q_i, так же как в n° 2. Расстояния h_i этих плоскостей от начала положительны.

Среди этих многогранников выделим те, которые ограничены плоскостями Q_i с расстояниями от начала h_i, подчинёнными условию

$$\sum_{i=1}^{m} h_i F_i^0 = 1. \tag{2}$$

Покажем, что среди этих многогранников есть многогранник наибольшего объёма.

Если числа h_i достаточно малы, то $\sum\limits_{i=1}^{m} h_i F_i^0 < 1$, если же они велики, то, по положительности всех F_i^0, $\sum\limits_{i=1}^{m} h_i F_i^0 > 1$. Отсюда ясно, что с непрерывным увеличением чисел h_i, начиная от малых значений, получим такие числа, что условие (2) будет выполнено. Следовательно, многогранники с условием (2) существуют.

Значения чисел h_i, удовлетворяющих условию (2), ограничены, потому что все они положительны, а также все $F_i^0 > 0$, так что каждое $h_i^0 < \frac{1}{F_i^0}$. Поэтому многогранники P с условием (2) ограничены в совокупности и для них существует точная верхняя граница объёмов. Так как объём зависит от многогранника, т. е. от чисел h_i, непрерывно, то эта верхняя граница достигается для некоторого многогранника P^0. Однако этот многогранник мог бы иметь не все $h_i^0 > 0$, т. е. некоторые h_i^0 могли бы равняться нулю; тогда он не принадлежал бы рассматриваемой совокупности многогранников. Покажем, что всё же максимум объёма достигается также для многогранников, у которых все $h_i > 0$.

Для этого заметим, что если сместить плоскости Q_i^0, ограничивающие многогранник P^0, на один и тот же вектор $\boldsymbol{a}$, то многогранник P^0 также сместится на вектор $\boldsymbol{a}$ и объём его не изменится. Поэтому, выбрав смещение так, чтобы начало оказалось внутри смещённого многогранника, получим многогранник P^1 с тем же объёмом и со всеми $h_i^1 > 0$. Покажем, что этот многогранник принадлежит рассматриваемой совокупности, т. е. удовлетворяет условию (2).

Действительно, если плоскость Q_i^0 с нормалью $\boldsymbol{n}_i$ перемещается на некоторый вектор $\boldsymbol{a}$, то её расстояние от начала h_i^0 заменяется на $h_i^0 + \boldsymbol{n}_i\boldsymbol{a}$. Поэтому после смещения сумма (2) заменится на

$$\sum_{i=1} (h_i^0 + \boldsymbol{n}_i\boldsymbol{a}) F_i^0 = \sum_i h_i^0 F_i^0 + \boldsymbol{a} \sum_i \boldsymbol{n}_i F_i^0.$$

Но по условию (1), наложенному на числа F_i^0, $\sum\limits_i \boldsymbol{n}_i F_i^0 = 0$, а многогранник P^0 удовлетворяет условию (2), так что $\sum\limits_i h_i^0 F_i^0 = 1$. Следовательно,

$$\sum_i (h_i^0 + n_i a) F_i = 1,$$

т. е. для смещённого многогранника P^1 условие (2) также выполнено.

Итак, мы доказали, что среди многогранников P с условием (2) и со всеми $h_i > 0$ существует многогранник наибольшего объёма.

Так как по лемме, доказанной в n° 2, объём многогранника P есть дифференцируемая функция чисел $h_1, \ldots, h_m$, то речь идёт о максимуме дифференцируемой функции $V(h_1, \ldots, h_m)$ при условии (2). А в таком случае согласно известному правилу Лагранжа при максимуме должно быть

$$\frac{\partial}{\partial h_i}\left[V(h_1, \ldots, h_m) + \lambda \sum_i F_i^0 h_i\right] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{3}$$

где λ — некоторый численный множитель *).

Если F_i^1 — площади граней многогранника P^1 с наибольшим объёмом, то согласно лемме $\frac{\partial V}{\partial h_i} = F_i^1$ (помня условие о гранях нулевой площади). Поэтому из (3) следуют равенства

$$\mu F_i^1 = F_i^0 \qquad (i = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

где $\mu = -\frac{1}{\lambda}$.

Равенства (4) означают, что площади граней многогранника P^1 пропорциональны данным числам F_i^0 и потому все положительны. Если увеличить многогранник P^1 подобно в $\sqrt{\mu}$ раз, то площади его граней станут равными $\mu F_i^1 = F_i^0$. Тем самым в $\sqrt{\mu}$ раз увеличенный многогранник P^1 имеет данные площади граней F_i^0, и теорема доказана.

Всё это рассуждение верно, конечно, в пространстве любого числа измерений n, стоит лишь заменить коэффициент подобия $\sqrt{\mu}$ на $\sqrt[n-1]{\mu}$.

4. Идея изложенного доказательства используется во многих доказательствах существования и, например, в применении к дифференциальным уравнениям она была предложена ещё Риманом. Пусть требуется доказать существование какого-то объекта A, удовлетворяющего данным условиям B_0. Подбирается такая функция f объекта A, необходимые условия экстремума которой приводят чисто формальным путём к тому, что если $f(A)$ имеет при $A = A_0$ экстремум, то A_0 удовлетворяет условиям B_0, или, как в теореме Минковского, — условиям, просто связанным с B_0 (равенства (4)). Тогда задача сводится к доказательству того, что функция $f(A)$ действительно достигает максимума (минимума) и что к ней приложимы формальные необходимые условия экстремума. В том случае, когда объект A задаётся конечным числом параметров, как, например, многогранник, существование максимума (минимума) обеспечивается непрерывностью функции f, а приложимость условий экстремума — её дифференцируемостью. Если же объект A задаётся бесконечным числом параметров (или функцией), как, например, произвольное выпуклое тело, то доказательство обоих этих пунктов оказывается делом

---

*) См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, n° 202, стр. 536 (1948).

гораздо более сложным. Обобщение теоремы Минковского на любые выпуклые тела было доказано мной*) на основании этой идеи. Формулировка этого обобщения даётся дальше в n°2 § 6. Бляшке и Герглотц**) наметили доказательство теоремы Вейля (см. n° 3 § 3 гл. V), основанное на той же идее экстремума, но осуществить его им не удалось: оба отмеченных нами пункта остались у них недоказанными.

Остроумие исследователя состоит в том, чтобы для данной области объектов A и условий B подобрать соответствующую функцию $f(A)$. Интересной, но, повидимому, трудной задачей представляется найти на этом пути доказательство других теорем существования для выпуклых многогранников, т. е. подобрать для каждой из них соответствующую функцию многогранника $f(A)$. Если бы это удалось, то метод максимума оказался бы столь же общим, как и наш метод отображений. Я не могу здесь высказать никаких гипотез по поводу возможного решения поставленной задачи; единственным указанием для случая теоремы существования многогранника с данной развёрткой может служить работа Бляшке и Герглотца. Но в ней речь идёт об аналитических поверхностях и аппарате римановой геометрии. Понятия, аналогичные понятиям этой геометрии, вообще пока ещё не перенесены на многогранники. Сама по себе задача такого перенесения имеет чрезвычайное значение.

§ 3. Существование бесконечного многогранника с данными площадями граней

1. В этом и следующем параграфах будут доказаны теоремы существования бесконечного выпуклого многогранника с данными площадями конечных граней и данными плоскостями бесконечных граней. Задание этих последних равносильно заданию того, что выше, в § 4 главы VI было названо бесконечной частью многогранника, т. е. остатка многогранника после исключения всех его конечных граней и произвольно больших кусков его бесконечных граней. Два многогранника имеют одну и ту же бесконечную часть, если их бесконечные грани в достаточно далёкой области полностью совпадают, а это, очевидно, будет тогда и только тогда, когда совпадают плоскости этих граней. Условия, при которых заданные плоскости будут плоскостями бесконечных граней какого бы то ни было бесконечного выпуклого многогранника, будут выяснены в § 5 (теорема 4 § 5; они формулированы также в § 4 гл. II). Здесь же будет заранее предполагаться, что данные плоскости дают бесконечную часть какого-нибудь выпуклого многогранника, и мы будем поэтому говорить о существовании многогранника с данными площадями конечных граней и с данной бесконечной частью.

Как было показано ещё в § 5 главы I, сферическое изображение бесконечного выпуклого многогранника представляет собой выпуклый сферический многоугольник, причём сферические изображения его

*) А. Д. Александров, К теории смешанных объёмов... III, Матем. сборник, т. 3, вып. 1 (1938).

**) W. Blaschke und G. Herglotz, Ueber die Verwirklichung einer geschlossenen Fläche mit vorgeschriebenem Bogenelement ..., Sitz. Berichte Bayer. Akad. Wiss. 1937, Heft 2, стр. 229—230.

бесконечных граней лежат на границе этого многоугольника. Вершины этого многоугольника суть сферические изображения граней с непараллельными бесконечными рёбрами. Если все бесконечные рёбра многогранника параллельны, то его сферическое изображение представляет собой полусферу.

Из этого замечания следует, что если задана бесконечная часть многогранника, то задана граница его сферического изображения и тем самым задано также само сферическое изображение. Исключение представляет случай, когда граница сферического изображения есть большой круг, потому что он делит сферу на две полусферы, которые обе выпуклы. Однако, если задана бесконечная часть многогранника с параллельными бесконечными рёбрами, то определено направление этих рёбер в бесконечность, и сферическое изображение такого многогранника должно совпадать с той полусферой, в которую идёт вектор, противоположный направлению бесконечных рёбер.

Итак, *если задана бесконечная часть многогранника, то задано его сферическое изображение и тем самым определено, внутрь какой части сферы могут направляться нормали его конечных граней.* Здесь, как и всюду дальше, имеются в виду *внешние* нормали.

Лемма. *Пусть Q — бесконечная часть какого-либо выпуклого многогранника и S — его сферическое изображение. Пусть $\boldsymbol{n}_1, \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{n}_m$ — любые попарно различные единичные векторы, направленные внутрь сферического многоугольника S. Тогда существуют выпуклые многогранники с бесконечной частью Q, конечные грани которых имеют внешние нормали $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$.*

Пусть P_0 — любой бесконечный многогранник с бесконечной частью Q. Так как векторы $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ идут внутрь его сферического изображения S, то тем самым он имеет опорные плоскости $R_1^0, \ldots, R_m^0$ с нормалями $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$, причём эти плоскости не касаются его вдоль его бесконечных граней или рёбер: иначе $\boldsymbol{n}_i$ лежали бы на границе сферического многоугольника S. Поэтому плоскость R_1^0 можно вдвинуть внутрь многогранника P_0 столь далеко, что она отсечёт от него все его конечные грани. В результате получим многогранник P_1 с той же бесконечной частью Q и с единственною конечною гранью G_1, имеющею нормаль $\boldsymbol{n}_1$.

Так как P_1 имеет ту же бесконечную часть Q, то его сферическое изображение есть тоже S и потому он имеет опорные плоскости $R_2, \ldots, R_m$ с нормалями $\boldsymbol{n}_2, \ldots, \boldsymbol{n}_m$. Вдвигая плоскость R_2 внутрь многогранника P_1 так, чтобы не отсечь полностью его грань G_1, получим многогранник P_2, у которого есть ещё грань G_2 с нормалью $\boldsymbol{n}_2$. Повторяя эту операцию, придём к многограннику, у которого будут все конечные грани с данными нормалями $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ и никаких других.

2. В этом параграфе мы рассмотрим многогранники с параллельными бесконечными рёбрами; многогранники с непараллельными бесконечными рёбрами будут рассматриваться в следующем параграфе. Результаты, получаемые для тех и других, принципиально различны.

Теорема. *Пусть задана бесконечная часть выпуклого многогранника с параллельными бесконечными рёбрами. Она будет бесконечной в одну сторону призмой* П. *Пусть* $\boldsymbol{n}$ — *единичный вектор, противоположный направлению этих рёбер в бесконечность, а* $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ — *любые различные единичные векторы, образующие с* $\boldsymbol{n}$ *острые углы; тем самым они направлены внутрь той полусферы, ограниченной экватором, перпендикулярным к* $\boldsymbol{n}$, *в какую направлен* $\boldsymbol{n}$. *Пусть, наконец,* $F_1, \ldots, F_m$ — *такие положительные числа, что*

$$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_i) F_i = F, \tag{1}$$

где F — *площадь поперечного сечения призмы* П, *перпендикулярного к бесконечным рёбрам. Тогда существует выпуклый многогранник с бесконечной частью* П, *конечные грани которого имеют внешние нормали* $\boldsymbol{n}_i$ *и площади* F_i (черт. 68, стр. 107).

Необходимость условия, наложенного на векторы $\boldsymbol{n}_i$, была только что выяснена. Необходимость условия (1) для чисел F_i очевидна: скалярное произведение $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_i$ есть косинус угла между плоскостью грани с нормалью $\boldsymbol{n}_i$ и плоскостью поперечного сечения призмы П, поэтому равенство (1) выражает тот факт, что площадь F этого сечения равна сумме площадей проекций конечных граней соответствующего многогранника.

Заметим ещё, что согласно доказанному в § 4 главы VI многогранник с указанными в теореме данными: П, $\boldsymbol{n}_i$, F_i — единственный с точностью до переноса вдоль его бесконечных рёбер.

Докажем нашу теорему, пользуясь леммой об отображении. Прежде всего рассмотрим все многогранники P с данной бесконечной частью П и с данными нормалями $\boldsymbol{n}_i$.

Согласно доказанной выше лемме такие многогранники существуют. Каждый такой многогранник определяется опорными числами $h_1, \ldots, h_m$ его конечных граней. А так как при малых параллельных смещениях граней ни одна из них не исчезает, то числа $h_1, \ldots, h_m$ допускают произвольные изменения в достаточно малой окрестности их значений, соответствующих любому данному многограннику P. Следовательно, совокупность всех возможных значений опорных чисел $h_1, \ldots, h_m$, а вместе с ней и совокупность всех многогранников P, изобразится открытым множеством $\boldsymbol{P}_0$ в m-мерном эвклидовом пространстве с координатами $h_1, \ldots, h_m$.

Однако мы не должны различать многогранники, получающиеся один из другого параллельным переносом вдоль рёбер призмы П, потому что ни одно из данных: П, $\boldsymbol{n}_i$, F_i, при этом не изменяется. Поэтому мы должны рассматривать не само множество $\boldsymbol{P}_0$, а многообразие $\boldsymbol{P}$ классов многогранников, получающихся друг из друга указанными переносами. Так как перенос в данном направлении зависит от одного параметра — величины переноса, то, отождествляя многогранники, совмещаемые таким переносом, мы исключаем одну переменную. Поэтому многообразие $\boldsymbol{P}$ будет $(m-1)$-мерным. Точное определение этого многообразия повторяет определение соответствующего многообразия в доказательстве теоремы Минковского в § 1 *).

Рассмотрим теперь множество всех совокупностей по m положительных чисел $F_1, \ldots, F_m$, удовлетворяющих условию теоремы

$$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_i) F_i = F. \tag{1}$$

Это условие — линейное, а потому определяет в m-мерном пространстве с координатами $F_1, \ldots, F_m$ $(m-1)$-мерную плоскость. Условие, что все $F_i > 0$, выделяет в m-мерном пространстве положительный координатный угол. Его пересечение с указанной плоскостью будет, очевидно, выпуклым $(m-1)$-мерным множеством. Оно и есть многообразие $\boldsymbol{F}$ допустимых значений чисел $F_1, \ldots, F_m$. Так как по доказанной выше лемме многогранники с нормалями $\boldsymbol{n}_i$ существуют и, как было показано, площади их граней необходимо удовлетворяют условию (1), то тем самым многообразие $\boldsymbol{F}$ не пусто. А так как оно есть выпуклое множество, то оно к тому же связно.

Итак, мы имеем многообразия $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{F}$ одного и того же числа измерений $m-1$. Сопоставляя каждому многограннику, точнее классу многогранников из $\boldsymbol{P}$, площади его граней $F_1, \ldots, F_m$, получаем однозначное отображение φ многообразия $\boldsymbol{P}$ в $\boldsymbol{F}$. Остаётся доказать, что φ удовлетворяет условиям леммы об отображении.

1) Так как $\boldsymbol{F}$ связно, то условие, что в *каждой* связной компоненте $\boldsymbol{F}$ содержатся образы элементов из $\boldsymbol{P}$, выполняется автоматически.

2) Так как по доказанному в § 4 главы VI многогранник с данной бесконечной частью и с данными площадями граней — единственный с точностью до переноса вдоль бесконечных рёбер, то каждой

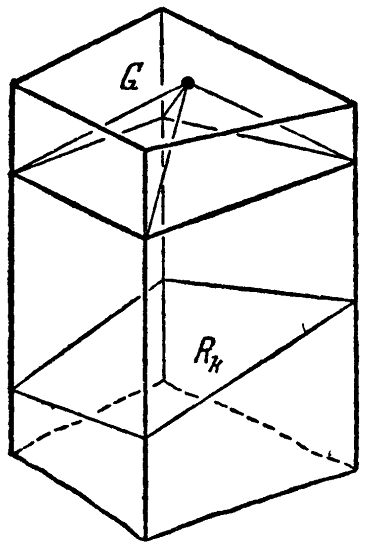
---

*) Если $\boldsymbol{a}$ — вектор переноса, то расстояние от начала до плоскости с нормалью $\boldsymbol{n}_i$ получает при таком переносе слагаемое $\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{a}$. Поэтому опорные числа h_i^0 заменяются на $h_i = h_i^0 + \boldsymbol{n}_i\boldsymbol{a}$. Так как перенос возможен лишь в направлении данного вектора $\boldsymbol{n}$, то $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{n}$. Следовательно, $h_i = h_i^0 + (\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{n})\, a$ $(i = 1, \ldots, m)$. При данных h_i и переменном a эти уравнения определяют в m-мерном пространстве с координатами h_i прямую. Так как коэффициенты при a постоянны, то все эти прямые параллельны. Точки этой прямой, попадающие в область $\boldsymbol{P}_0$, изображают многогранники, получаемые друг из друга переносами вдоль $\boldsymbol{n}$, и потому подлежат отождествлению. Это отождествление сводится, очевидно, к проектированию области $\boldsymbol{P}_0$ на $(m-1)$-мерную плоскость вдоль указанных прямых. Проекция открытого множества есть открытое множество. Следовательно, указанное отождествление даёт открытое множество $\boldsymbol{P}$ на $(m-1)$-мерной плоскости, т. е. $(m-1)$-мерное многообразие

совокупности чисел $(F_1, \ldots, F_m)$ из $\boldsymbol{F}$ отвечает один класс многогранников из $\boldsymbol{P}$. Таким образом, отображение φ взаимно однозначно.

3) Непрерывность отображения φ очевидна, потому что она сводится к утверждению, что при непрерывном изменении опорных чисел площади граней меняются непрерывно.

4) Остаётся четвёртое условие: если элементы $F^i = (F_1^i, \ldots, F_m^i)$, являющиеся образами элементов P^i из $\boldsymbol{P}$, сходятся к элементу $F^0 = (F_1^0, \ldots, F_m^0)$, принадлежащему $\boldsymbol{F}$, то из $\boldsymbol{P}$ можно выбрать сходящуюся последовательность так, что предел её будет элементом P^0, отображающимся в F^0, т. е. если у многогранников P^i площади граней $F_1^i, \ldots, F_m^i$ сходятся к положительным пределам, то существует подпоследовательность многогранников P^i, сходящаяся к многограннику с предельными площадями граней.



Черт. 133.

Рассмотрим все многогранники P с бесконечной частью Π и нормалями $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$. Передвинем все эти многогранники вдоль бесконечных рёбер так, чтобы они имели общую опорную плоскость R, перпендикулярную к их бесконечным рёбрам. Тогда все они окажутся заключёнными в бесконечной в одну сторону призме Π, касаясь её основания G на плоскости R. Покажем, что в таком случае все их опорные числа ограничены в совокупности.

Действительно, поскольку все многогранники P содержатся в призме $\overline{\Pi}$, плоскости их граней её пересекают. Вместе с тем, если одна из этих плоскостей R_k пересекает призму $\overline{\Pi}$ очень далеко, то она полностью отсекает от неё основание G (черт. 133). А в таком случае многогранник с такой плоскостью k-й грани не может касаться основания G. Следовательно, ни одна из плоскостей R_k не может пересекать призму Π_k очень далеко, а это означает, что расстояния этих плоскостей от начала координат, т. е. опорные числа, ограничены. Но раз опорные числа ограничены, то из любой последовательности многогранников P^i можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Площади граней этих многогранников сходятся и предельный многогранник будет иметь как раз предельные площади граней. Это означает, что и последнее условие леммы об отображении выполнено.

Итак, все условия леммы об отображении выполнены, а тогда верен и её результат: всякая совокупность чисел $F_1, \ldots, F_m$, входящая в многообразие $\boldsymbol{F}$, отвечает некоторому классу многогранников из многообразия $\boldsymbol{P}$. Тем самым теорема доказана.

3. Наметим ещё одно доказательство той же теоремы, опирающееся на существование замкнутого многогранника с данными нормалями и площадями граней.

Пусть, как и раньше (см. черт. 68 на стр. 107), П — бесконечная призма, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, обратно параллельный её рёбрам, $\boldsymbol{n}_1 \ldots, \boldsymbol{n}_m$ — единичные векторы, образующие с $\boldsymbol{n}$ острые углы, F — площадь поперечного сечения призмы П и, наконец, $F_1, \ldots, F_m$ — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_i) F_i = F. \tag{1}$$

Пусть ещё $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \ldots, \boldsymbol{m}_k$ — нормали к граням призмы П, а $l_1, \ldots, l_k$ — ширина её граней, т. е. длины сторон её поперечного сечения. Тогда из замкнутости многоугольника со сторонами $l_1, \ldots, l_k$ следует, что

$$\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{m}_j l_j = 0. \tag{2}$$

Легко убедиться в возможности подобрать такие числа $g_1, \ldots, g_k$, что будет выполнено равенство*)

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{n}_i F_i + \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{m}_j g_j - \boldsymbol{n}F = 0. \tag{3}$$

Тогда, если положить

$$H_j = g_j + e_j M \qquad (j = 1, \ldots, k), \tag{4}$$

где M — любое положительное число, то в силу равенства (2) будем иметь

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{n}_i F_i - \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{m}_j H_j - \boldsymbol{n}F = 0. \tag{5}$$

Возьмём M столь большим, чтобы все H_j были положительными. Тогда, поскольку все векторы $\boldsymbol{n}_i$, $\boldsymbol{m}_i$, $-\boldsymbol{n}$ не направлены в одно полупространство, существует замкнутый выпуклый многогранник P_M с нормалями $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$, $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_k$, $-\boldsymbol{n}$ и площадями граней $F_1, \ldots, F_m$, $H_1, \ldots, H_k$, F. Так будет при любом достаточно большом $M > 0$.

Этот многогранник состоит из «шапки» с нормалями $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$, «основания» с нормалью $-\boldsymbol{n}$ и «боковых» граней с нормалями $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_k$; эти грани параллельны граням призмы П. Если M бесконечно увеличивать, то «боковые» грани этого многогранника будут увеличиваться, а так как площади других граней заданы, то эти грани могут только бесконечно вытягиваться. Относительные разности их длин будут стремиться к нулю, а потому их площади H_l будут относиться примерно, как их ширины. Вместе с тем из (4) следует, что при большом M отношения площадей H_l близки к отношениям ширин l_l граней призмы П. Следовательно, при $M \to \infty$ боковые грани многогранника P_M сходятся к боковым граням призмы П. Поэтому, если с увеличением числа M «основание» многогранника P_M отодвигать в бесконечность, то в пределе получим бесконечный многогранник P_∞ с бесконечной частью П и с данными нормалями $\boldsymbol{n}_l$ и площадями F_l конечных граней.

---

*) Выбирая оси прямоугольных координат с основными векторами $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, убеждаемся, что в силу условия (1) нужно удовлетворить только двум равенствам: $\Sigma \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}_l F_l + \Sigma \boldsymbol{a}\boldsymbol{m}_l g_l = 0$ и то же с $\boldsymbol{b}$ вместо $\boldsymbol{a}$. Так как число граней призмы П есть $k \geqslant 3$, то имеем два уравнения с не менее чем тремя неизвестными $g_1, \ldots, g_k$, так что удовлетворить им всегда возможно.

Намеченное доказательство интересно в том отношении, что оно не зависит от соответствующей теоремы единственности и обобщается в пространство любого числа измерений вместе с обобщением теоремы существования для замкнутого многогранника. Осуществление такого обобщения мы предоставляем читателю, считая теоремы о замкнутом многограннике уже известными.

§ 4. Общая теорема существования для бесконечного многогранника

1. В этом параграфе рассматриваются бесконечные многогранники, у которых имеются непараллельные бесконечные рёбра. Для таких многогранников можно доказать теорему гораздо более общую, чем просто теорема существования многогранника с данными площадями конечных граней и данной бесконечной частью. Именно, вместо площади можно рассматривать любую функцию многоугольника, удовлетворяющую следующим условиям:

1) Функция $f(Q)$ определена для всех конечных выпуклых многоугольников, включая предельные случаи отрезка и точки. При этом для равных и параллельно расположенных многоугольников она принимает равные значения.

2) $f(Q)$ монотонна, т. е. если Q_1 содержится в Q_2, то $f(Q_1) \leqslant f(Q_2)$ *).

3) $f(Q)$ непрерывна, т. е. если $Q_n \to Q$, то $f(Q_n) \to f(Q)$.

4) Если площади многоугольников $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ безгранично возрастают, то и $f(Q_n) \to \infty$.

Примерами таких функций могут служить площадь, периметр, диаметр (т. е. наибольшее расстояние между точками многоугольника), радиус наименьшего содержащего многоугольник круга и т. д. Последние три из названных функций не обращаются в нуль для многоугольника, выродившегося в отрезок. Периметр, например, равен тогда удвоенной длине отрезка.

В связи с этим условимся, что если у многогранника нет грани с данной нормалью $\boldsymbol{n}$, то будем считать, что она есть, но вырождается в отрезок или точку. Впрочем, вырождение в точку можно исключить, потому что любая функция $f(Q)$ имеет для всех точек одно и то же значение, которое можно принять равным нулю, стоит лишь вычесть его из функции f.

Пусть Q_0 — бесконечная часть какого-либо бесконечного многогранника с непараллельными бесконечными рёбрами. Продолжая её грани, мы естественно получим бесконечный выпуклый многогранник, не имеющий конечных граней. Очевидно, задание Q_0 эквивалентно заданию такого многогранника Q.

---

*) Монотонность в этом смысле слабее, чем в том смысле, в каком она понимается в гл. VI: там требовалось, чтобы $f(Q_1) < f(Q_2)$, если Q_1 содержится в Q_2 и не совпадает с Q_2. Например, диаметр многоугольника не будет монотонной функцией в таком более сильном смысле (можно отрезать от многоугольника часть, не уменьшая диаметра), но будет монотонной функцией в смысле сформулированного сейчас условия 2).

Пусть R — опорная плоскость многогранника Q с нормалью $\boldsymbol{n}$, упирающаяся в Q не вдоль бесконечного ребра или грани. Она может касаться многогранника Q либо в вершине, либо по конечному ребру. Значение функции f для этой общей части RQ мы назовём её значением для многогранника Q, соответствующим нормали $\boldsymbol{n}$. Если f — площадь, то это значение заведомо равно нулю. Если же f — периметр, то это значение равно нулю, когда RQ — вершина, а если RQ — ребро, то $f(RQ)$ есть удвоенная длина этого ребра.

Теорема. *Пусть Q — бесконечный выпуклый многогранник, не имеющий конечных граней. Пусть $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ — векторы, направленные внутрь его сферического изображения. Пусть, далее, $f_1, \ldots, f_m$ — функции многоугольника, удовлетворяющие формулированным выше условиям. И пусть, наконец, $a_1, \ldots, a_m$ — значения этих функций для многогранника Q, отвечающие, соответственно, нормалям $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ (функции f_i нормалей $\boldsymbol{n}_i$).*

Тогда, каковы бы ни были числа $b_1, \ldots, b_m$ такие, что $a_1 < b_1, \ldots, a_m < b_m$, существует выпуклый многогранник, у которого 1) *бесконечная часть — та же, что у Q;* 2) *конечные грани имеют нормали $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$;* 3) *при каждом i ($i = 1, 2, \ldots, m$) функция f_i принимает для грани с нормалью $\boldsymbol{n}_i$ значение b_i.*

Согласно принятому условию здесь допускается, что некоторые грани могут вырождаться в рёбра *).

Теорема эта принадлежит Погорелову и данное им доказательство её очень просто. Пусть обозначения Q, $\boldsymbol{n}_i$, f_i, a_i имеют смысл, указанный в формулировке теоремы. Проведём опорные плоскости к многограннику Q с нормалями $\boldsymbol{n}_i$ и вдвинем их внутрь Q. Тогда получим многогранник, конечные грани которого имеют нормали $\boldsymbol{n}_i$ (см. лемму n°1 § 3). При малых смещениях указанных плоскостей значения функции f_i для этих граней будут близки к числам a_i, как это ясно из определения этих чисел и непрерывности функций f_i.

Отсюда следует, что, каковы бы ни были числа $b_i > a_i$ ($i = 1, \ldots, m$), существуют многогранники с той же бесконечной частью Q и конечными гранями Q_i с нормалями $\boldsymbol{n}_i$, причём

$$f_i(Q_i) \leqslant b_i \qquad (i = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

Рассмотрим все многогранники P, удовлетворяющие этим условиям. Каждый из них определяется опорными числами h_i его конечных граней. Поэтому совокупность многогранников P изобразится

*) Пример. Пусть все функции f_i представляют собой периметр. (Тогда по теореме 2 § 4 гл. VI многогранник с данными Q, $\boldsymbol{n}_i$, $f_i(Q_i) = b_i$ — единственный.) Возьмём любой бесконечный многогранник P и добавим к его нормалям ещё нормаль $\boldsymbol{n}$ к опорной плоскости, проходящей через одно из его рёбер. Считая это ребро гранью, получим многогранник с некоторыми Q, $\boldsymbol{n}_i$, $f_i(Q_i)$. По теореме 2 § 4 гл. VI многогранник с такими данными — единственный. Следовательно, другого с такими же данными, но с невырождающейся гранью с нормалью $\boldsymbol{n}$ нет.

множеством P в m-мерном пространстве с координатами $h_1, \ldots, h_m$. Из неравенств (1) и непрерывности функций f_i следует, что это множество замкнуто. Покажем, что оно также ограничено.

Допустим противное; тогда существуют многогранники P^n, у которых плоскости граней Q_i^n пересекают многогранник Q в сколь угодно далёких частях. Но многогранник Q расширяется в бесконечность, и потому у таких многогранников P^n площади хотя бы некоторых граней Q_i^n должны принимать сколь угодно большие значения. А тогда в силу условия 4), наложенного на функции f_i, будет $f_i(Q_i^n) \longrightarrow \infty$. Но это противоречит неравенствам (1), и тем самым ограниченность множества P доказана.

Поскольку множество P замкнуто и ограничено, среди многогранников P существует многогранник P^0 с минимальными опорными числами, т. е. такой, что ни для какого P с условиями (1) не может быть $h_i \leqslant h_i^0$ для всех i и $h_i < h_i^0$ хотя бы для одного i *). Иными словами, плоскость ни одной из граней многогранника P нельзя вдвинуть внутрь него, не нарушая условий (1).

У этого многогранника функции f_i имеют как раз требуемые значения b_i. Действительно, допустим, например, что $f_1(Q_1) < b_1$. Тогда при малом смещении грани Q_1 это неравенство не нарушится; а если грань Q_1 сдвинуть внутрь многогранника, то грани, смежные с Q_1, уменьшатся и по монотонности функций f_i условие (1) для них не нарушится. Следовательно, при малом смещении грани Q_1 внутрь многогранника P^0 мы получим многогранник P с теми же условиями (1). Это, однако, противоречит определяющему минимальному свойству многогранника P^0.

Таким образом, многогранник P^0 с наименьшими опорными числами даёт требуемые значения $f_i(Q_i) = b_i$, и теорема доказана.

Из доказательства ясно, что оно дословно обобщается на пространство любого числа измерений.

2. Рассмотренная теорема не может быть доказана с помощью леммы об отображении, потому что ей не отвечает теорема единственности. В общей теореме единственности, установленной в § 4 гл. VI, функции f_i должны быть строго монотонными (т. е. $f(Q_1) < f(Q_2)$, если Q_1 содержится в Q_2, но не совпадает с Q_2), в то время как здесь требуется лишь их обычная монотонность. То, что при этом более слабом условии единственность может не иметь места, показывает следующий тривиальный пример. Определим функцию $f(Q)$ условиями: $f(Q) = 1$, если площадь многоугольника Q меньше единицы, и $f(Q)$ равно площади в противном случае. Такая функция удовлетворяет, очевидно, всем требуемым в теореме условиям, но теоремы единственности с такой функцией, т. е. когда все f_i суть такие f, нет: у всех многогранников с площадями граней, меньшими единицы, значения функции f для граней одни и те же: $f(Q) = 1$.

Потребуем, чтобы функции f_i, фигурирующие в теореме, удовлетворяли двум дополнительным условиям:

а) f_i строго монотонны;

*) Очевидно, он не обязан быть единственным.

б) если Q — отрезок, то $f_i(Q)=0$.

В силу условия б) все числа a_i, фигурирующие в теореме 1, равны нулю; поэтому приписываемые функциям f_i значения b_i подчиняются условию быть положительными и все грани многогранника не вырождаются.

При таких дополнительных условиях наша теорема может быть доказана с помощью леммы об отображении.

Пусть $\boldsymbol{P}$ — многообразие многогранников с данной бесконечной частью Q и с нормалями $\boldsymbol{n}_i$ к конечным граням. Оно изображается открытым множеством в m-мерном пространстве с координатами $h_1, \ldots, h_m$, где h_i — опорные числа конечных граней. (Многогранники с гранями, вырождающимися в рёбра, исключаются, и только в силу этого указанное множество оказывается открытым.)

Все совокупности положительных чисел $b_1, \ldots, b_m$ образуют в m-мерном пространстве с координатами $b_1, \ldots, b_m$ положительный координатный угол, т. е. открытое выпуклое множество. Многообразие $\boldsymbol{B}$ всех таких совокупностей $B=(b_1, \ldots, b_m)$ m-мерно и вследствие выпуклости связно.

Сопоставим каждому многограннику P совокупность чисел $(b_1, \ldots, b_m)$ по правилу: число b_i есть значение функции f_i для грани с нормалью $\boldsymbol{n}_i$. Тогда получим однозначное отображение φ многообразия $\boldsymbol{P}$ в $\boldsymbol{B}$. При этом в силу связности многообразия $\boldsymbol{B}$ первое условие леммы об отображении выполнено автоматически. Далее, взаимная однозначность отображения φ следует из единственности многогранника с данной бесконечной частью Q, нормалями $\boldsymbol{n}_i$ и значениями функций f_i (теорема 2 § 4 гл. VI). Непрерывность отображения φ очевидна, потому что с непрерывным изменением опорных чисел грани меняются непрерывно, а функции f_i по условию непрерывны.

Остаётся последнее условие леммы об отображении. В данном случае оно сводится к следующему. Пусть числа $b_1^j, \ldots, b_m^j$ $(j=1, 2, \ldots)$ являются значениями функций $f_1, \ldots, f_m$ для граней многогранников P^j и сходятся соответственно к положительным числам $b_1^0, \ldots, b_m^0$. Тогда из последовательности многогранников P^j можно выбрать сходящуюся подпоследовательность P^i так, что граням предельного многогранника будут отвечать значения функций f_k, равные $b_1^0, \ldots, b_m^0$.

Поскольку числа $b_1^j, \ldots, b_m^j$ сходятся, они ограничены в совокупности. А отсюда, как уже показано в проведённом выше доказательстве теоремы, следует ограниченность опорных чисел многогранников P^j. Поэтому из многогранников P^i можно выбрать сходящуюся последовательность. Вследствие непрерывности функций f_k предельный многогранник будет давать предельные значения этих функций $f_k=b_k^0$.

Следовательно, последнее условие леммы об отображении также выполнено, и, применяя эту лемму, получаем доказательство теоремы.

3. Первое доказательство нашей теоремы, конечно, лучше: во-первых, оно не требует знания теоремы единственности, а во-вторых, оно не использует ничего, кроме элементарных соображений и основных свойств непрерывных функций. Поэтому сама теорема оказывается почти столь же банальной, как теорема о том, что непрерывная функция принимает все промежуточные значения.

Таким образом, в этом пункте бесконечные многогранники с непараллельными бесконечными рёбрами существенно отличаются от многогранников замкнутых и бесконечных с параллельными бесконечными рёбрами. Для этих последних мы получили гораздо более частные теоремы, в которых функции f_i означают площадь, в то время как доказательства этих теорем принципиально сложнее. Такая резкая разница имеет достаточно ясную причину.

В случае бесконечных многогранников с непараллельными бесконечными рёбрами единственное условие, налагаемое на предписываемые значения площади, — это условие положительности. В двух же других случаях имеются ещё дополнительные условия; так, в случае замкнутого многогранника — условие замкнутости

$$\sum_{i=1}^{m} F_i n_i = 0. \qquad (2)$$

В силу этого условия число произвольно задаваемых чисел F_i оказывается не m, а $m-3$. Так оно и должно быть, потому что многогранник с m гранями, рассматриваемый с точностью до параллельного переноса, задаётся $m-3$ параметрами!

Следовательно, замкнутому многограннику можно приписывать сколько-нибудь произвольно значения какой-либо функции f лишь для $m-3$ граней. Для трёх остальных граней значения функций f должны определяться через эти $m-3$. Но, например, беря за f периметр, мы не видим никакого условия, которое, подобно (2), позволяло бы по периметрам некоторых $m-3$ граней найти периметры трёх других.

В невозможности найти и формулировать такие условия и заключается причина того, что теорема о замкнутых многогранниках не может быть соответствующим образом обобщена. Конечно, можно было бы наличие такого условия потребовать в формулировке обобщённой теоремы, и тогда она доказывалась бы буквально так же, как доказана в § 1 теорема существования многогранника с данными площадями граней. Но мы не можем дать ни одного конкретного примера функции многоугольника, которая, не будучи функцией только площади, обладала бы требуемым свойством, т. е. чтобы был указан способ по её значениям для всех граней, кроме трёх, вычислить её значения также и для этих трёх граней. А без такого примера общая теорема оказывается как бы пустой, хотя мы можем и формулировать и доказать её.

Совершенно аналогичные замечания можно сделать по поводу обобщения теоремы о бесконечных многогранниках с параллельными бесконечными рёбрами.

Всё сказанное, естественно, приводит к задаче: найти примеры функций многоугольника, не являющихся функциями одной площади, для которых можно было бы явно определить $(m-3)$-мерное многообразие допустимых значений в случае замкнутого многогранника с m гранями и $(m-1)$-мерное — в случае бесконечного многогранника с параллельными бесконечными рёбрами и m конечными гранями.

Признаться, мы не видим никакого подхода к решению этой задачи. А может быть, только функции площади допускают явное аналитическое определение указанных многообразий, если ещё наложить на это определение какие-нибудь естественные простые условия?

§ 5. Существование выпуклого многогранника с данными опорными числами

1. Если в пространстве выбрано начало координат, то положение любой плоскости определяется единичным вектором $\boldsymbol{n}$ её нормали и опорным числом h. Уравнение такой плоскости Q будет $\boldsymbol{nx} = h$, где $\boldsymbol{x}$ — вектор из начала в переменную точку плоскости.

Ограниченное плоскостью полупространство, для которого $\boldsymbol{n}$ служит внешней нормалью, задаётся неравенством $\boldsymbol{nx} \leqslant h$, т. е. оно есть геометрическое место концов векторов $\boldsymbol{x}$, отложенных от начала и удовлетворяющих этому неравенству. Мы будем говорить, что полупространство ограничено плоскостью Q, всегда имея в виду именно то полупространство, для которого $\boldsymbol{n}$ является внешней нормалью.

Всякий выпуклый многогранник есть общая часть полупространств, ограниченных плоскостями его граней (теорема 2 § 2 гл. I). Здесь, как и всюду в этом параграфе, под выпуклым многогранником подразумевается телесный выпуклый многогранник, не исключая заранее, что он может быть бесконечной в обе стороны призмой (к призмам присоединяются также двугранные углы, слои между парами параллельных плоскостей и просто полупространства).

Главной целью данного параграфа является выяснение условий, при которых общая часть полупространств, ограниченных наперёд заданными плоскостями Q_i, оказывается выпуклым многогранником, для которого плоскости Q_i будут плоскостями его граней. Иными словами, речь идёт об условиях, которые нужно наложить на внешние нормали $\boldsymbol{n}_i$ и опорные числа h_i, для того чтобы они были внешними нормалями и опорными числами граней некоторого выпуклого многогранника.

Никаких условий на сами нормали $\boldsymbol{n}_i$ не нужно накладывать, так как согласно лемме 1 § 1 при любых $\boldsymbol{n}_i$ существует выпуклый многогранник с такими внешними нормалями. Если векторы $\boldsymbol{n}_i$ компланарны, то этот многогранник будет, очевидно, бесконечной в обе стороны призмой. Если они идут в одно полупространство, то многогранник — бесконечный, в противном случае он — конечный. Таким образом, речь должна идти об условиях, налагаемых на опорные числа h_i при заданных внешних нормалях $\boldsymbol{n}_i$.

Наперёд заданные полупространства могут вовсе не иметь общей части. Если же они имеют общую часть, содержащую внутренние точки, то она есть выпуклый многогранник (теорема 4 § 2 гл. I). Но в этом случае может ещё оказаться, что не все плоскости, ограничивающие данные полупространства, будут плоскостями граней этого многогранника: некоторые из них могут вовсе его не касаться или касаться лишь по ребру или в вершине.

В связи с этим наша задача разделяется на две: 1) найти условия, при которых данные полупространства имеют общую часть P с внутренними точками; 2) найти условия, при которых все плоскости, ограничивающие эти полупространства, будут плоскостями граней многогранника P.

Ответ даётся следующими далее двумя теоремами. В этих теоремах речь идёт о разложении любого из векторов нормалей $\boldsymbol{n}_k$ по некоторым другим из них:

$$\boldsymbol{n}_k = \sum_i \nu_{ki} \boldsymbol{n}_i. \tag{1}$$

При этом рассматриваются только такие разложения, в которых 1) векторы $\boldsymbol{n}_i$ линейно независимы и 2) коэффициенты ν_{ki} либо все положительны, либо все отрицательны.

(Разложение вектора по линейно независимым возможно единственным образом. А так как число всех задаваемых векторов $\boldsymbol{n}_j$ конечно, то и число подлежащих рассмотрению разложений также конечно. В пространстве максимум три вектора могут быть линейно независимыми.

Поэтому речь идёт о разложениях максимум по трём векторам. Так как число разложений (1), принимаемых во внимание в следующих далее теоремах 1 и 2, конечно, то и число условий, в них фигурирующих, всегда конечно, так что они всегда доступны действительной проверке.)

Теорема 1. *Для того чтобы общая часть данных полупространств $n_i x \leqslant h_i$ $(i=1, \ldots, m)$ имела внутренние точки, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для всякой нормали n_k, допускающей разложение* (1) *по другим линейно независимым нормалям n_i с отрицательными коэффициентами $\nu_{ki}<0$, соответствующие опорные числа должны удовлетворять неравенству*

$$h_k > \sum_i \nu_{ki} h_i. \tag{2}$$

(Если ни один из векторов n_k не допускает разложения по другим с отрицательными коэффициентами, то условие становится беспредметным, т. е. оно автоматически выполняется. Тогда полупространства наверное имеют общие внутренние точки. Это, как легко видеть, будет заведомо в том случае, если все векторы n_i направлены внутрь одного полупространства. Вместе с тем можно убедиться, что если они не идут внутрь одного полупространства, то всегда найдётся среди них вектор, допускающий разложение по другим с отрицательными коэффициентами. В крайнем случае возможно «разложение» по одному вектору, т. е. $n_k = -n_j$.)

Теорема 2. *Если общая часть полупространств $n_i x \leqslant h_i$, ограниченных плоскостями Q_i, имеет внутренние точки и тем самым представляет собой некоторый выпуклый многогранник P, то для того, чтобы все плоскости Q_i были плоскостями граней этого многогранника, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для всякой нормали n_k, допускающей разложение* (1) *по другим линейно независимым нормалям n_i с положительными коэффициентами $\nu_{ki}>0$, соответствующие опорные числа должны удовлетворять неравенству*

$$h_k < \sum_i \nu_{ki} h_i \text{ *)}. \tag{3}$$

В теоремах 1 и 2 непосредственно содержится ответ на основной вопрос о существовании многогранника с данными опорными числами.

Теорема 3. *Для того чтобы данные единичные векторы n_j и данные числа h_j были, соответственно, внешними нормалями и опорными числами граней некоторого выпуклого многогранника, необходимо и достаточно выполнение условий обеих теорем* 1 *и* 2.

---

*) В теореме 1 можно считать, что среди векторов n_j $(j=1, \ldots, m)$ имеются одинаковые (плоскости с параллельными нормалями). В теореме 2 это исключается. Если, например, $n_1 = n_2$, то это равенство можно рассматривать как разложение n_1 по n_2, и тогда согласно (3) должно быть $h_1 < h_2$. Но $n_2 = n_1$ есть также разложение n_2 по n_1, а потому должно быть также $h_2 < h_1$. Получается противоречие.

Для того чтобы лучше уяснить условия теорем 1 и 2, докажем сразу их необходимость.

2. Теорема 1а. *Если общая часть полупространств* $n_i x \leqslant h_i$ *имеет внутренние точки, то для любого вектора* n_k, *допускающего разложение* (1) *по другим с отрицательными коэффициентами, соответствующие опорные числа удовлетворяют неравенству* (2).

(Это утверждение содержит даже больше, чем просто необходимость условий теоремы 1, потому что в нём мы не ограничиваемся разложениями по линейно независимым векторам n_i, но допускаем любые разложения с отрицательными коэффициентами.)

Доказательство. Пусть a — вектор, идущий из начала координат в одну из внутренних точек общей части данных полупространств. Так как эта точка лежит внутри всех этих полупространств, то при всех i

$$n_i a < h_i. \tag{4}$$

Пусть вектор n_k может быть разложен по другим с отрицательными коэффициентами:

$$n_k = \sum_{i \neq k} \nu_{ki} n_i \qquad (\nu_{ki} < 0). \tag{5}$$

Умножая неравенство (4) на соответствующие ν_{ki} и помня, что при умножении на отрицательное число неравенство обращается, получим после сложения

$$\sum_i \nu_{ki} n_i a > \sum_i \nu_{ki} h_i,$$

или в силу равенства (5)

$$n_k a > \sum_i \nu_{ki} h_i. \tag{6}$$

Но при $i = k$ неравенство (4) даёт $n_k a < h_k$. Поэтому из (6) следует

$$h_k > \sum_i \nu_{ki} h_i,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2а. *Если плоскости* Q_i *с нормалями* n_i *и опорными числами* h_i *являются плоскостями граней выпуклого многогранника, то для всякого разложения одного из векторов* n_k *по другим с положительными коэффициентами* ν_{ki} *соответствующие опорные числа удовлетворяют неравенству* (3), *т. е.* $h_k < \sum_i \nu_{ki} h_i$.

(Эта теорема, аналогично теореме 1а, также содержит несколько больше, чем просто необходимость условия теоремы 2: здесь нет ограничения разложениями по не более чем трём векторам n_i.)

Доказательство. Пусть вектор a идёт из начала во внутреннюю точку k-й грани данного многогранника P. Конец его лежит поэтому на плоскости Q_k, так что

$$n_k a = h_k. \tag{7}$$

Вместе с тем, поскольку конец вектора $\boldsymbol{a}$ лежит внутри грани, он не лежит ни на одной из других плоскостей Q_i, т. е. оказывается внутри ограниченных ими полупространств. Поэтому

$$\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{a} < h_i \quad \text{при всех} \quad i \neq k. \tag{8}$$

Пусть вектор $\boldsymbol{n}_k$ разлагается по некоторым другим с положительными коэффициентами:

$$\boldsymbol{n}_k = \sum_{i \neq k} \nu_{ki}\boldsymbol{n}_i \qquad (\nu_{ki} > 0). \tag{9}$$

Умножая соответствующие неравенства (8) на коэффициенты ν_{ki} и складывая, получим

$$\sum_i \nu_{ki}\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{a} < \sum_i \nu_{ki}h_i$$

или в силу (9)

$$\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{a} < \sum_i \nu_{ki}h_i. \tag{10}$$

Но в силу равенства (7) $\boldsymbol{n}_k\boldsymbol{a} = h_k$, так что (10) даёт

$$h_k < \sum_i \nu_{ki}h_i,$$

что и требовалось доказать.

3. Для доказательства достаточности условий теорем 1 и 2 нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Если выпуклый многогранник P лежит в полупространстве $\boldsymbol{nx} \leqslant h$, то он имеет опорную плоскость с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$.*

Если многогранник P — конечный, то утверждение тривиально, так как конечный многогранник имеет опорные плоскости любого направления. Если многогранник P — бесконечный, то рассуждаем следующим образом.

Бесконечные рёбра многогранника P лежат в полупространстве $\boldsymbol{nx} \leqslant h$, а потому каждое из них либо удаляется от ограничивающей это полупространство плоскости Q, либо в крайнем случае параллельно ей. Поэтому и каждая бесконечная грань многогранника P либо удаляется от плоскости Q, либо ей параллельна. Так как прямая или плоскость, параллельная данной плоскости Q, проходит от Q на постоянном расстоянии, то отсюда очевидно, что в конечной части многогранника P найдётся точка A, ближайшая к плоскости Q. Надвигая Q на эту точку, получим опорную плоскость многогранника P с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$.

Лемма 2. *Если выпуклый многогранник P лежит в полупространстве $\boldsymbol{nx} \leqslant h_0$, то можно указать три или меньше линейно независимых нормалей $\boldsymbol{n}_j$ к его граням так, что имеют место: 1) разложение $\boldsymbol{n} = \sum_j \nu_j\boldsymbol{n}_j$ со всеми $\nu_j > 0$ и 2) неравенство $h_0 \geqslant \sum_j \nu_j h_j$, где h_j — опорные числа граней с нормалями $\boldsymbol{n}_j$.* (В частности, если плоскость $\boldsymbol{nx} = h_0$ — опорная к P, то заведомо имеет место равенство $h_0 = \sum_j \nu_j h_j$.)

Пусть выпуклый многогранник P лежит в полупространстве $\boldsymbol{nx} \leqslant h_0$. Тогда в силу леммы 1 P имеет опорную плоскость Q с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$. Пусть уравнение плоскости Q будет $\boldsymbol{nx} = h$, так что $\boldsymbol{nx} \leqslant h$ будет полупространством, ограниченным этой плоскостью. Так как нормаль $\boldsymbol{n}$ — внешняя, то это полупространство содержит многогранник P. Вместе с тем P содержится в полупространстве $\boldsymbol{nx} \leqslant h_0$, а потому это последнее содержит также и полупространство $\boldsymbol{nx} \leqslant h$. Отсюда следует, что

$$h \leqslant h_0. \tag{11}$$

Если плоскость Q касается многогранника P по грани и $\boldsymbol{n}_j$ — нормаль к этой грани, то, очевидно, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_j$ и $h = h_j$, т. е. в силу (11) $h_0 \geqslant h_j$. Соотношения $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_j$ и $h_0 \geqslant h_j$ показывают, что в этом случае утверждение леммы выполняется; только число нормалей $\boldsymbol{n}_j$, по которым разлагается $\boldsymbol{n}$, сводится здесь к единице.

Рассмотрим общий случай. Пусть плоскость Q касается многогранника в какой-то точке A, в вершине, на ребре или на грани — безразлично. Пусть W — телесный угол, заполняемый лучами, идущими из A по внешним нормалям к опорным плоскостям в точке A. Как было указано ещё в § 5 главы I, W есть выпуклый многогранный угол с рёбрами, идущими по нормалям к граням, сходящимся в точке A. Если точка A лежит внутри ребра, то W сводится к плоскому углу, а если A — внутри грани, то W сводится к одному лучу. Нормаль $\boldsymbol{n}$ опорной плоскости Q идёт в угле W. Если этот угол — действительно телесный, то, разбивая его на трёхгранные углы диагональными плоскостями, убеждаемся, что $\boldsymbol{n}$ идёт в каком-то трёхгранном угле с рёбрами по нормалям $\boldsymbol{n}_{j_1}$, $\boldsymbol{n}_{j_2}$, $\boldsymbol{n}_{j_3}$ к граням многогранника.

Вектор же, идущий таким образом, очевидно, разлагается по векторам $\boldsymbol{n}_{j_1}$, $\boldsymbol{n}_{j_2}$, $\boldsymbol{n}_{j_3}$ с неотрицательными коэффициентами:

$$\boldsymbol{n} = \nu_{j_1}\boldsymbol{n}_{j_1} + \nu_{j_2}\boldsymbol{n}_{j_2} + \nu_{j_3}\boldsymbol{n}_{j_3} \qquad (\nu_{j_1}, \nu_{j_2}, \nu_{j_3} \geqslant 0). \tag{12}$$

Если же W вырождается в плоский угол или луч, то такое же разложение получаем по двум или одному вектору. Допуская значения коэффициентов ν_{j_i}, равные нулю, эти случаи можно включить в формулу (12).

Итак, требуемое теоремой разложение вектора $\boldsymbol{n}$ найдено и остаётся только доказать неравенство

$$h_0 \geqslant \nu_{j_1}h_{j_1} + \nu_{j_2}h_{j_2} + \nu_{j_3}h_{j_3}. \tag{13}$$

Пусть $\boldsymbol{a}$ — вектор, проведённый из начала в точку A, в которой плоскость Q касается многогранника P. Эта точка лежит на плоскостях сходящихся в ней граней и на плоскости Q; поэтому $\boldsymbol{a}$ удовлетворяет уравнениям этих плоскостей

$$\boldsymbol{n}_{j_1}\boldsymbol{a} = h_{j_1}, \; \boldsymbol{n}_{j_2}\boldsymbol{a} = h_{j_2}, \quad \boldsymbol{n}_{j_3}\boldsymbol{a} = h_{j_3} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{na} = h. \tag{14}$$

Умножая первые три уравнения на соответствующие ν_{j_p} и складывая, получим вследствие равенства (12)

$$\sum_p h_{j_p}\nu_{j_p} = a\sum_p \nu_{j_p}n_{j_p} = an = h. \tag{15}$$

А так как $h \leqslant h_0$, то отсюда следует неравенство (13), и лемма доказана. (Последнее утверждение леммы, сделанное в скобках, содержится в формуле (15), потому что, если плоскость $nx = h_0$ — опорная, то она и есть Q, т. е. $h = h_0$.)

4. Теперь покажем, что лемма 2 уже содержит достаточность условий теоремы 2, т. е. докажем следующее предложение:

Теорема 2б. *Если многогранник P есть пересечение полупространств $n_i x \leqslant h_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, то при условиях теоремы* 2 *(т. е. если при $n_k = \sum_i \nu_{ki}n_i$, где n_i линейно независимы и все $\nu_{ki} > 0$, будет $h_k < \sum_i \nu_{ki}h_i$) каждая плоскость $n_i x = h_i$ даёт на P целую грань.*

Допустим, что многогранник P не имеет грани с нормалью n_k. Так как по самому его определению он лежит в полупространстве $n_k x \leqslant h_k$, то по лемме 2 найдутся линейно независимые векторы n_j, являющиеся нормалями граней P, такие, что имеют место формулы

$$n_k = \sum_j \nu_{kj}n_j \qquad (\nu_j > 0) \tag{16}$$

и

$$h_k \geqslant \sum_j \nu_{kj}h_j\ ^{*)}. \tag{17}$$

Но при равенстве (16) условие теоремы 2 требует как раз обратного:

$$h_k < \sum_j \nu_{kj}h_j.$$

Полученное противоречие показывает, что многогранник P имеет грани с любой из нормалей n_i, и теорема 2б доказана.

5. Докажем теперь достаточность условий теоремы 1.

Теорема 1б. *Если числа h_i, отнесённые векторам n_i, таковы, что выполнено условие теоремы* 1 *(т. е. если при $n_k = \sum_i \nu_{ki}n_i$, где n_i линейно независимы и все $\nu_{ki} < 0$, будет $h_k > \sum_i \nu_{ki}h_i$), то пересечение полупространств $n_i x \leqslant h_i$ имеет внутренние точки.*

Если нам дан только один вектор n_i, то теорема сводится к тривиальности. Поэтому будем доказывать её индукцией по числу векторов n_i и допустим, что она верна для $m-1$ векторов.

Пусть $n_1, \ldots, n_m$ и $h_1, \ldots, h_m$ — векторы и числа, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда по сделанному предположению о верности

*) Особый случай леммы 2, когда вектор $n = n_k$ «разлагается» по одной нормали, здесь отпадает, потому что предположено, что n_k не есть нормаль к грани.

теоремы для $m-1$ векторов пересечение $m-1$ полупространств

$$\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{x} \leqslant h_i \qquad (i=1, \ldots, m-1)$$

имеет внутреннюю точку. Оно будет выпуклым телесным многогранником P, который может оказаться призмой или даже полупространством.

Допустим, что вместе с тем пересечение всех m полупространств $\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{x} \leqslant h_i$, т. е. пересечение многогранника P с m-м полупространством $\boldsymbol{n}_m\boldsymbol{x} \leqslant h_m$, не имеет внутренних точек и может быть даже пусто. Это, очевидно, обозначает, что P не имеет точек внутри m-го полупространства $\boldsymbol{n}_m\boldsymbol{x} \leqslant h_m$.

Поскольку многогранник P не имеет точек внутри полупространства $\boldsymbol{n}_m\boldsymbol{x} \leqslant h_m$, он содержится в дополнительном полупространстве $\boldsymbol{n}_m\boldsymbol{x} \geqslant h_m$ или, что то же самое,

$$-\boldsymbol{n}_m\boldsymbol{x} \leqslant -h_m.$$

Это дополнительное полупространство имеет внешнюю нормаль $-\boldsymbol{n}_m$, а расстояние ограничивающей его плоскости от начала равно $-h_m$. Так как оно содержит многогранник P, то можно воспользоваться леммой 2. По этой лемме найдётся не более трёх таких линейно независимых векторов $\boldsymbol{n}_j$, что

$$-\boldsymbol{n}_m = \sum_j \nu_{mj}\boldsymbol{n}_j \qquad (\nu_{mj} > 0) \tag{18}$$

и

$$-h_m \geqslant \sum_j \nu_{mj}h_j. \tag{19}$$

Но так как все $\nu_{mj} > 0$, то (18) даёт вместе с тем разложение вектора $\boldsymbol{n}_m$ по $\boldsymbol{n}_j$ с отрицательными коэффициентами $-\nu_{mj}$. А тогда по условию теоремы должно быть

$$h_m > \sum_j -\nu_{mj}h_j. \tag{20}$$

Но это противоречит неравенству (19). Тем самым предположение о том, что пересечение всех m полупространств $\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{x}_i \leqslant h_i$ не имеет внутренних точек, невозможно, и теорема 1б доказана.

6. Из теорем 1 и 2 сразу вытекают условия, характеризующие бесконечную часть выпуклого многогранника:

Теорема 4. *Для того чтобы плоскости $\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{x}_i = h_i$ были плоскостями бесконечных граней выпуклого многогранника с внешними нормалями $\boldsymbol{n}_i$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:* 1) *числа h_i удовлетворяют условиям теорем* 1 *и* 2, 2) *векторы $\boldsymbol{n}_i$ направлены в одно полупространство и таковы, что если отложить их из одной точки, то ни один из них не идёт внутрь натянутого на них выпуклого многогранного угла, или, что то же самое, все их концы должны лежать на границе натянутого на* *них выпуклого сферического многоугольника; векторов n_i должно быть не менее трёх, потому что у бесконечного многогранника (не сводящегося к двугранному углу) должно быть не менее трёх бесконечных граней.*

Необходимость условия 1) содержится в необходимости условий теорем 1 и 2, а необходимость условия 2) вытекает из соответствующего свойства сферического изображения бесконечного многогранника (гл. I, § 5, n° 3). Точно так же доказывается достаточность этих условий. Именно, при условии 1) теорема 3 показывает, что существует многогранник P, у которого плоскости $n_i x = h_i$ суть плоскости граней. Так как по условию 2) векторы n_i направлены в одно полупространство, то многогранник P будет бесконечным. Ни одна его грань не будет конечной, потому что сферическое изображение конечной грани лежит внутри сферического изображения многогранника.

Условиям теоремы 4 можно придать форму, в которой они допускают особенно простую проверку, когда векторы n_i и числа h_i фактически заданы.

1) *Для того чтобы векторы n_i были направлены в одно полупространство, необходимо и достаточно, чтобы ни один из них не разлагался по некомпланарным трём другим с отрицательными коэффициентами. (Для того же, чтобы они были направлены внутрь полупространства, необходимо и достаточно, чтобы ни один не разлагался по другим в любом числе с отрицательными коэффициентами.)*

2) *Для того чтобы ни один из векторов n_i, идущих в одно полупространство, не шёл внутри многогранного угла, натянутого на остальные векторы, необходимо и достаточно, чтобы ни один из векторов n_i не допускал разложения по некомпланарным трём другим с положительными коэффициентами.*

3) *Из 1) и 2) следует, что в теореме 4 условия теорем 1 и 2 для чисел h_i нужно проверять только для разложений векторов n_i по не более чем двум другим.*

Утверждение 1) доказывается индукцией по числу векторов n_i. Утверждение 2) очевидно, потому что, если вектор n идёт внутри многогранного угла V, то он идёт внутри одного из трёхгранных углов, на которые можно разбить V, и, следовательно, разлагается по векторам вдоль рёбер этого трёхгранного угла с положительными коэффициентами.

7. Замечания и задачи. 1) Все выводы этого параграфа буквально распространяются на пространство любого числа измерений. Разница состоит лишь в том, что в n-мерном пространстве может иметься n линейно независимых векторов. Осуществить соответствующие изменения в выводах данного параграфа не представляет труда.

2) Для пересечения P заданных полупространств $n_i x_i \leq h_i$ возможны четыре случая:

а) P пусто;

б) P не пусто, но не имеет внутренних точек;

в) P имеет внутренние точки и, следовательно, есть выпуклый многогранник, но не все плоскости Q_i, ограничивающие данные полупространства, являются плоскостями его граней;

г) P есть выпуклый многогранник, и все плоскости Q_i суть плоскости его граней.

Теоремы 1 и 2 дают условия, характеризующие случаи в) и г).

Доказать, что случаи а) и б) характеризуются следующими необходимыми и достаточными условиями, и выяснить наглядный смысл этих условий:

а) Среди векторов $\boldsymbol{n}_i$ есть такой $\boldsymbol{n}_k$, который допускает разложение по некоторым другим с отрицательными коэффициентами: $\boldsymbol{n}_k=\sum\limits_i \nu_{ki}\boldsymbol{n}_i$ ($\nu_{ki}<0$), а соответствующие опорные числа удовлетворяют неравенству

$$h_k<\sum \nu_{ki}h_i. \tag{а}$$

б) Ни одно из неравенств (а) не имеет места, но имеется вектор $\boldsymbol{n}_k$, допускающий разложение $\boldsymbol{n}_k=\sum \nu_{ki}\boldsymbol{n}_i$ с отрицательными коэффициентами, а соответствующее опорное число удовлетворяет равенству

$$h_k=\sum_i \nu_{ki}h_i. \tag{б}$$

Эти две теоремы вместе с теоремами 1 и 2 дают полное разделение всех четырёх случаев а) — г).

3) Выяснить смысл тех случаев, когда одно или несколько из неравенств (2) и (3) в теоремах 1 и 2 обращаются в равенства.

4) а) Доказать, что для того, чтобы данные векторы не были направлены внутрь одного полупространства, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из них разлагался по некоторым другим с отрицательными коэффициентами.

б) Доказать, что для того, чтобы данные векторы не были направлены в одно полупространство (но не обязательно внутрь его!), необходимо и достаточно, чтобы хотя один из них разлагался по трём другим линейно независимым с отрицательными коэффициентами.

в) Доказать, что если вектор $\boldsymbol{n}$ разлагается по векторам $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ ($\boldsymbol{n}=\lambda_1\boldsymbol{n}_1+\ldots+\lambda_m\boldsymbol{n}_m$) с отрицательными (положительными) коэффициентами, то среди векторов $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ есть линейно независимые, по которым $\boldsymbol{n}$ допускает разложение с коэффициентами того же знака.

5) Теорема Хелли. По теореме 1 вектор $\boldsymbol{n}_k$ разлагается по трём линейно независимым с отрицательными коэффициентами ν_{ki} и $h_k>\sum \nu_{ki}h_i$, если соответствующие четыре полупространства имеют общие внутренние точки. Вместе с тем по теореме 1 выполнение таких условий достаточно для того, чтобы любое число полупространств имело общие внутренние точки.

Отсюда немедленно вытекает теорема:

Если среди конечного числа данных полупространств каждые четыре имеют общие внутренние точки, то и все полупространства имеют общие внутренние точки.

Так как всякий выпуклый многогранник есть пересечение конечного числа полупространств, то отсюда следует теорема:

Если среди конечного числа выпуклых многогранников каждые четыре имеют общие внутренние точки, то и все многогранники имеют общие внутренние точки.

То же верно в пространстве любого числа измерений n с заменой числа четыре на $n+1$.

Из сказанного легко вывести, что если из конечного числа выпуклых многогранников каждые четыре, или $(n+1)$, имеют общие точки (не обязательно внутренние), то и все многогранники имеют хотя бы одну общую точку.

Далее, если из конечного числа выпуклых тел каждые четыре, или $(n+1)$, имеют общие точки, то и все эти тела имеют хотя бы одну общую точку. (Достаточно приближаться к данным телам содержащими их выпуклыми многогранниками, и тогда эта теорема будет следовать из предыдущей.)

Можно доказать, что тот же результат верен также для произвольного бесконечного множества конечных выпуклых тел: *если каждые четыре*, или $(n+1)$, *из них имеют общие точки, то и все они имеют хотя бы одну общую точку*. Это и есть теорема Хелли. Её совсем простое доказательство можно найти в статье Хелли в «Успехах математических наук», вып. 2. Впрочем, центр тяжести вывода лежит именно в случае конечного числа тел.

Легко убедиться, что для бесконечных выпуклых тел такая общая теорема уже не имеет места.

6) Теорему 3 можно доказать, пользуясь леммой об отображении. В применении к данному случаю лемма об отображении сводится к следующему простому утверждению: если открытое множество P m-мерного эвклидова пространства содержится в другом открытом и связном множестве H того же пространства и притом так, что P замкнуто относительно H, то $P=H$. Это следует из самого определения связности (гл. II, § 8, n° 4). В качестве множества H следует рассматривать множество точек в m-мерном пространстве, координаты которых $h_1, \ldots, h_m$ удовлетворяют условиям теорем 1 и 2, когда векторы $n_1, \ldots, n_m$ заданы. А за множество P нужно принять множество тех точек $(h_1, \ldots, h_m)$, для которых пересечение полупространств $n_i x_i \leqslant h_i$ будет выпуклым многогранником.

Предлагаем осуществить такое доказательство теоремы 3. Оно не содержит никаких принципиальных трудностей, хотя строгое его проведение требует некоторых деталей, не лишённых известного интереса.

§ 6. Обобщения

1. Все теоремы этой главы вместе с их доказательствами переносятся в эвклидово пространство любого числа измерений. Все они, далее, обобщаются путём предельного перехода на любые выпуклые тела, также в пространстве любого числа измерений. Такое обобщение предполагает, однако, введение общих понятий для любых выпуклых тел, заменяющих соответствующие элементарные понятия, относящиеся к многогранникам.

Выпуклое тело задаётся уже не конечным числом опорных чисел, а «опорной функцией», введённой и исследованной Минковским *).

Пусть $ux=H(u)$ есть уравнение опорной плоскости выпуклого тела H, имеющей внешнюю нормаль u, причём u не обязана быть единичной. Если $u=n$ — единичный вектор, то $H(u)=h(n)$ есть расстояние от начала до рассматриваемой плоскости, взятое с соответствующим знаком. Вообще, очевидно, что

$$H(u)=|u|\,H\left(\frac{u}{|u|}\right),$$

где $\frac{u}{|u|}$ — уже единичный вектор.

Функция $H(u)$, определённая для всех векторов u, и называется *опорной функцией* тела H (Строго говоря, $H(u)$ не определена для $u=0$, но естественно считается $H(0)=0$.) Она, конечно, полностью определяется своими значениями для единичных векторов n (или, как часто бывает удобно считать, — точек на единичной сфере).

---

*) H. Minkowski, Theorie der konvexen Körper. Ges. Abh. Bd. 2; см. также Bonnesen und Fenchel, Theorie der konvexen Körper (Springer, 1934).

Имеет место теорема:

Для того чтобы функция $H(\boldsymbol{u})$ была опорной функцией выпуклого тела (может быть, вырождающегося в плоскую область, отрезок или точку), необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) $H(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda H(\boldsymbol{u})$ *при всяком* $\lambda \geqslant 0$ (*условие «положительной однородности первой степени»*);

2) $H(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \leqslant H(\boldsymbol{u}) + H(\boldsymbol{v})$ *при любых* $\boldsymbol{u}$ *и* $\boldsymbol{v}$ (*условие выпуклости*).

Условие невырождаемости выпуклого тела с опорной функцией $H(\boldsymbol{u})$ *будет:*

3) *при всяких некомпланарных* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$

$$\sum H(\boldsymbol{u}_i) > -H\left(-\sum \boldsymbol{u}_i\right).$$

Это аналогично условию теоремы 1 § 5 *).

Эта теорема впервые доказана Минковским и потом доказывалась разными способами многими авторами. Её можно получить предельным переходом из теоремы 1 § 5. Она соответствует теореме 3 § 5 об опорных числах, потому что опорное число есть значение опорной функции для нормали к соответствующей грани. Опорная функция выпуклого многогранника кусочно линейна и определяется поэтому её значениями для этих нормалей. Именно, она линейна в телесном угле, заполняемом нормалями к опорным плоскостям в одной вершине. (Если $\boldsymbol{a}$ — вектор, идущий в точку A, то уравнение плоскости, проходящей через точку A и имеющей нормаль $\boldsymbol{u}$, будет $\boldsymbol{ux} = \boldsymbol{ua}$, и следовательно, опорная функция точки A есть $H(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{au}$, откуда и следует наше утверждение об опорной функции многогранника.)

Условия теоремы 3 § 5, т. е. объединённые условия теорем 1 и 2 (с допущением в неравенствах знака равенства), легко выводятся из условий приведённой выше теоремы об опорной функции **). Однако теорему 3 § 5 нельзя рассматривать как частный случай этой последней, хотя бы уже потому, что по данным числам h_i, отнесённым векторам $\boldsymbol{n}_i$, можно построить, вообще говоря, не одну кусочно-линейную функцию $H(\boldsymbol{u})$ такую, что $H(\boldsymbol{n}_i) = h_i$. (Такая функция определяется разбиением пространства на трёхгранные углы с рёбрами вдоль векторов $\boldsymbol{n}_i$. В силу кусочной линейности она определяется в каждом таком угле её значениями на её рёбрах. Однако разбиение пространства на трёхгранные углы с рёбрами вдоль $\boldsymbol{n}_i$, вообще говоря, вовсе не однозначно. Тогда вопрос встаёт о выделении разбиения, для которого построенная функция удовлетворяет условию выпуклости.)

2. Обобщения теорем §§ 1—4 на любые выпуклые тела в n-мерном эвклидовом пространстве формулируются с помощью понятия поверхностной функции выпуклой поверхности, определение которой дано в n° 2 § 7 главы II. Напом-

---

*) См. следующую сноску. Достаточно заменить $-\sum\limits_i \boldsymbol{u}_i$ на $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{u}_i$ на $\nu_i \boldsymbol{n}_i$ с $\nu_i < 0$.

**) Пусть $\boldsymbol{n} = \sum\limits_i \nu_i \boldsymbol{n}_i$, где все $\nu_i < 0$. Тогда по условию 2) $H(-\boldsymbol{n}) = H\left(-\sum \nu_i \boldsymbol{n}_i\right) \leqslant \sum H(-\nu_i \boldsymbol{n}_i)$, а по условию 1), так как $-\nu_i > 0$, $H(-\nu_i \boldsymbol{n}_i) = -\nu_i H(\boldsymbol{n}_i)$, так что

$$H(-\boldsymbol{n}) \leqslant \sum_i -\nu_i H(\boldsymbol{n}_i). \ (*)$$

Но по условию 2) $H(-\boldsymbol{n}) + H(\boldsymbol{n}) \geqslant H(0)$, а $H(0) = 0$ (в силу условия 1)), где нужно взять $\lambda = 0$). Поэтому $H(-\boldsymbol{n}) \geqslant -H(\boldsymbol{n})$, что вместе с (*) даёт $H(\boldsymbol{n}) \geqslant \sum\limits_i \nu_i H(\boldsymbol{n})_i$, или в обозначениях § 5 $h \geqslant \sum \nu_i h_i$; а это и есть условие (2а) теоремы 1 § 5. Условие теоремы 2 выводится ещё проще.

ним, что поверхностная функция есть функция множества на единичной сфере E. Она определена для всех (борелевских) подмножеств на E, которые содержатся в сферическом изображении данной выпуклой поверхности. Если поверхность замкнута, — это будет любое множество на сфере E. Если же поверхность бесконечна, то её сферическое изображение S содержится в полусфере. В этом случае поверхностная функция имеет заведомо конечные значения лишь для множеств, замыкание которых лежит внутри S; для других она может быть бесконечной.

Обобщение теоремы Минковского. *Для того чтобы функция $F(M)$ множества на единичной сфере E (определённая для любого борелевского множества на E) была поверхностной функцией какого-либо конечного выпуклого тела, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:*

1) *$F(M)$ конечна, неотрицательна и вполне аддитивна.*

2) $\int\limits_E \boldsymbol{n}F(dM) = 0$, *где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор, соответствующий точке на сфере E.*

3) *При всяком единичном векторе* $\boldsymbol{n}_0$ $\int\limits_E (\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n})F(dM) > 0.$

Второе условие есть условие равенства нулю векторной площади замкнутой поверхности; третье — означает, что площадь проекции выпуклого тела в любом направлении $\boldsymbol{n}_0$ не обращается в нуль.

Если функция $F(M)$ состоит из конечного числа точечных нагрузок *), то эта общая теорема сводится к теореме о многогранниках. Нормали к граням будут соответствовать тем точкам на сфере, где даны «нагрузки» функции $F(M)$. В этом случае третье условие сводится к требованию некомпланарности нормалей.

Доказательство данной общей теоремы проще всего осуществляется путём предельного перехода от многогранников **).

Обобщение теоремы § 3. *Пусть G — конечная выпуклая область (с исключённой границей) на плоскости T, $\boldsymbol{n}_0$ — нормаль к плоскости T, F — площадь области G. Для того чтобы функция $F(M)$ множества на сфере E, определённая для любого борелевского множества, заключающегося в открытой полусфере $E(\boldsymbol{n}_0)$ с центром в точке $\boldsymbol{n}_0$, была поверхностной функцией бесконечного выпуклого тела, проекция которого на плоскость T покрывает область G, необходимы и достаточны следующие условия:*

1) *$F(M)$ неотрицательна, вполне аддитивна и конечна для всякого M, замыкание которого содержится в $E(\boldsymbol{n}_0)$.*

2) $\int\limits_{E(\boldsymbol{n}_0)} (\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{n})F(dM) = F.$

Здесь выпуклое тело H имеет предельным конусом луч в направлении $\boldsymbol{n}_0$. Проекция тела H, покрывая область G, содержится в замыкании этой области.

Так как функция $F(M)$ определена лишь в открытой сфере $E(\boldsymbol{n}_0)$, то опорные плоскости, параллельные $\boldsymbol{n}_0$, исключаются из рассмотрения, хотя

---

*) То-есть существуют такие точки $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_m$ сферы, что $F(M) = 0$, если M не содержит ни одной из этих точек, и $F(M) > 0$, если M содержит хотя бы одну из них.

**) См. А. Д. Александров, О поверхностной функции выпуклого тела, Матем. сборник, т. 6 (48), вып. 1 (1939). Другое доказательство, прямо дающее теорему в её общем виде, включая многогранники, дано в моей работе: А. Д. Александров, К теории смешанных объёмов выпуклых тел, Матем. сборник, т. 3, вып. 1 (1938).

тело H может иметь такие плоскости, как, например, бесконечный в одну сторону цилиндр.

Значение функции $F(M)$ для всей полусферы $E(\boldsymbol{n}_0)$ есть не что иное, как площадь той части поверхности тела H, которая не имеет опорных плоскостей, параллельных $\boldsymbol{n}_0$.

Если функция $F(M)$ состоит из конечного числа точечных нагрузок, эта общая теорема сводится к теореме § 3 о многогранниках.

Обобщение теоремы § 4. *Пусть M_0 — (открытая) выпуклая область на сфере, отличная от полусферы. Пусть на границе области M_0 задана функция $h_0(\boldsymbol{n})$, представляющая расстояния опорных плоскостей некоторого выпуклого тела H_0 от начала координат (значения опорной функции для точек на границе области M_0). Пусть, наконец, $F(M)$ — неотрицательная вполне аддитивная функция множества, определённая для борелевских подмножеств области M_0 и конечная для всякого M, замыкание которого содержится в M_0.*

Тогда существует бесконечное выпуклое тело H, у которого:

1) *сферическое изображение покрывает M_0 и содержится в замыкании M_0;*

2) *значения опорной функции $h(\boldsymbol{n}_i)$ сходятся к $h_0(\boldsymbol{n})$, если точки $\boldsymbol{n}_i$ сходятся к точке $\boldsymbol{n}$ границы области M_0;*

3) *$F(M)$ есть поверхностная функция этого тела H (исключая, однако, область точек его поверхности, где нормали к опорным плоскостям идут к границе области M_0).*

Здесь тело H_0 играет роль бесконечной части тела H. Тело H может состоять из конечной части, как бы одетой на бесконечную часть, общую с H_0; сферическое изображение этой бесконечной части даёт тогда границу области M_0. В этом случае функция $F(M)$ имеет для всей области M_0 заведомо конечное значение. Однако тело H может и не иметь такой бесконечной части, а только асимптотически приближаться к ней.

Доказательство обобщений теорем §§ 3 и 4 осуществляется предельным переходом от многогранников (эти доказательства пока нигде не опубликованы).

3. Последняя теорема менее обща, чем теорема § 4, в том отношении, что здесь $F(M)$ есть площадь, в то время как в теореме § 4 фигурировали любые монотонные функции.

Полное обобщение теоремы § 4 на любые выпуклые тела нам не известно. В качестве гипотезы для случая выпуклых тел с регулярной поверхностью можно высказать следующую теорему.

Пусть M_0 — выпуклая область на сфере, отличная от полусферы. Пусть $h_0(\boldsymbol{n})$ — значения опорной функции некоторого выпуклого тела H_0 для точек $\boldsymbol{n}$ на границе области M_0. Пусть, далее, $f(x, y; \boldsymbol{n})$ — функция точки $\boldsymbol{n}$ в области M_0 и двух численных переменных x, y, определённая в области $x \geqslant y$ и монотонная (т. е. $f(x_1, y_1; \boldsymbol{n}) > f(x_2, y_2; \boldsymbol{n})$, если $x_1 \geqslant y_1$, $x_2 \geqslant y_2$ и хотя бы в одном случае равенство не имеет места). При этом функция f — «достаточно регулярная» (непрерывная или даже аналитическая). Тогда при всякой «достаточно регулярной» функции $g(\boldsymbol{n})$, определённой в M_0, существует бесконечная выпуклая поверхность H, у которой: 1) сферическое изображение покрывает область M_0 и содержится в замыкании этой области; 2) предельные значения опорной функции поверхности H на границе области M_0 дают заданную функцию $h_0(\boldsymbol{n})$; 3) если $\boldsymbol{n}$ есть нормаль в точке X поверхности H, а $R_1 \geqslant R_2$ — главные радиусы кривизны её в этой точке, то $f(R_1, R_2; \boldsymbol{n}) = g(\boldsymbol{n})$.

Эта теорема формулирована нами для поверхности в трёхмерном пространстве; в n-мерном пространстве функция f должна зависеть от $n-1$ численной переменной соответственно $n-1$ главному радиусу кривизны.

Эта теорема равносильна утверждению о разрешимости некоторого дифференциального уравнения. Действительно, главные радиусы кривизны выражаются через опорную функцию $h(\boldsymbol{n})$ и её производные первого и второго порядков. Поэтому условие 3) равносильно выполнению некоторого данного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Утверждение состоит в том, что такое уравнение всегда имеет решение в виде «выпуклой функции» $h(n)$, принимающей на границе данной области M_0 наперёд заданные значения $h_0(n)$, удовлетворяющие, конечно, необходимому условию выпуклости.

Наличие общей теоремы § 4 для многогранников и метод приближения многогранниками внушают надежду, что такая теорема действительно имеет место. Однако мы не знаем её доказательства. Если идти от многогранников, то трудность состоит в «приближении» функции $f(x, y; n)$ некоторыми функциями многоугольников — граней многогранника.

Случаю площади отвечает $f(x, y; n) = xy$, потому что произведение R_1R_2 есть как раз предел отношения площади области на поверхности к площади её сферического изображения. Но тогда «приближение» делается очевидным.

Было бы чрезвычайно интересно доказать высказанную общую теорему хотя бы в некоторых частных предположениях о функции $f(x, y; n)$, прежде всего для случая, когда она вовсе не зависит от n.

4. Никаких результатов для многогранников в пространстве Лобачевского или в сферическом пространстве, аналогичных теоремам настоящей главы, не известно. Поиски таких результатов можно вести в направлении, намеченном в самом конце предыдущей главы, заменяя понятие данного направления грани каким-либо соответствующим понятием, обходящимся без параллельности в эвклидовом смысле.

Пусть, например, в пространстве Лобачевского даны точка O и прямые $l_1, \ldots, l_n$, проходящие через O. Пусть на этих прямых отмечены положительные направления, не идущие в одно полупространство. Рассмотрим многогранники P, ограничиваемые плоскостями Q_i, перпендикулярными к прямым l_i, так, что положительные направления на этих прямых оказываются идущими от полупространств, содержащих многогранник P. Тогда по аналогии с теоремами §§ 5 и 1 встают два вопроса:

1) Пусть $h_1, \ldots, h_n$ — расстояния плоскостей $Q_1, \ldots, Q_n$ от точки O. Каковы необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа h_i для того, чтобы плоскости Q_i были плоскостями граней многогранника P? (Расстояние h_i берётся, конечно, с соответствующим знаком.)

2) Каковы необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа $F_1, \ldots, F_n$ для того, чтобы существовал многогранник P с площадями граней F_i?

Первый вопрос можно решить, вероятно, без особого труда, в то время как второй представляется нам очень трудным.

Аналогичные задачи можно формулировать и для бесконечных выпуклых многогранников. Новое усложнение возникает при рассмотрении многогранников, имеющих несколько бесконечных частей. То, что в пространстве Лобачевского такие выпуклые многогранники существуют, было показано в n° 4 § 6 главы III.

ГЛАВА VIII

СВЯЗЬ УСЛОВИЯ РАВЕНСТВА МНОГОГРАННИКОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ С ДРУГИМИ ЗАДАЧАМИ

В этой главе под многогранником всегда понимается телесный конечный выпуклый многогранник.

Общее условие равенства многогранников с параллельными гранями, выведенное в § 3 главы VI, имеет существенные приложения в некоторых задачах, на первый взгляд никак с ним не связанных.

Собственно говоря, главные применения получает теорема Минковского о равенстве многогранников с параллельными и равновеликими гранями *).

Первый параграф этой главы, посвящённый разбиению пространства на равные многогранники, никак не связан со следующими. Параграфы же 2 и 3, напротив, относятся к одному кругу вопросов, который в общей постановке для любых выпуклых тел служит предметом изящной и богатой следствиями теории, называемой «теорией смешанных объёмов».

§ 1. Параллелоэдры

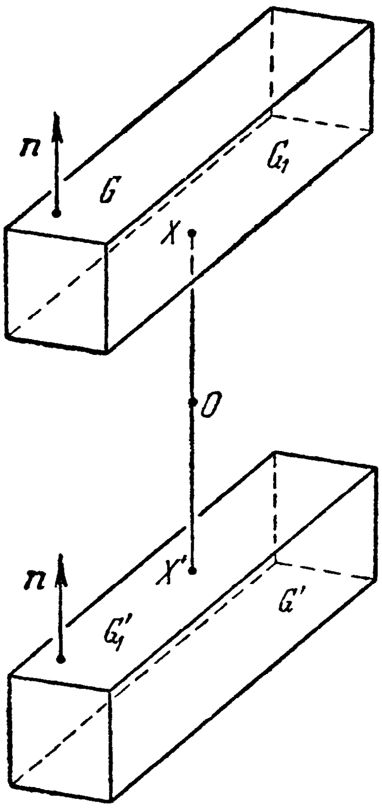
1. *Параллелоэдром* называется выпуклый многогранник, обладающий тем свойством что, прикладывая его экземпляры друг к другу в параллельном расположении по целым граням, можно заполнить без промежутков всё пространство. Простейшие примеры представляют куб и правильная шестигранная призма.

Задача состоит в том, чтобы найти все возможные параллелоэдры. Это означает, во-первых, найти все возможные их типы с точки зрения строения, а во-вторых, указать для каждого такого типа те метрические данные, при которых многогранник соответствующего строения будет параллелоэдром, т. е. будет допускать заполнение всего пространства путём параллельного прикладывания по целым граням.

Эта задача интересна не только сама по себе, но также ввиду её связи с кристаллографией и теорией чисел. Задача была решена впервые великим русским кристаллографом Е. С. Фёдоровым в 1890 г. Однако в его решении был существенный пробел: Фёдоров не доказал того, что

*) Это замечание существенно в том отношении, что теорема Минковского верна в пространстве любого числа измерений, а потому и следствия её, которые будут получены, обладают той же степенью общности.

всякий параллелоэдр имеет центр симметрии, хотя и пользовался этим фактом. Этот пробел был восполнен Минковским на основании его теоремы о равенстве многогранников с равновеликими и параллельными гранями. Известно, что Минковский пришёл к этой общей теореме в поисках доказательства существования центра у параллелоэдров.



Черт. 134.

Доказав существование центра, мы дадим потом вывод параллелоэдров по Б. Н. Делоне. Этот вывод Делоне представляется образцом красивого геометрического построения *).

2. Теорема 1. *Если грани выпуклого многогранника попарно равны и параллельны, т. е. совмещаются параллельным переносом, то как сам многогранник, так и все его грани имеют центры симметрии.*

Пусть P — многогранник, удовлетворяющий условиям теоремы, а P' — многогранник, симметричный с P относительно какой-либо точки O. Пусть G, G_1 — равные и параллельные грани на P, а G', G_1' — симметричные им грани на P'. Очевидно, грани G и G_1' (а также G_1 и G') имеют параллельные внешние нормали (черт. 134). Кроме того, они равновелики. Так как это верно для любой грани G многогранника P, то на основании теоремы Минковского заключаем, что многогранники P и P' равны и параллельно расположены. Но легко доказывается:

Если какая-либо фигура F равна и параллельна фигуре F', симметричной с F относительно какой-либо точки, то сама F имеет центр симметрии **). Следовательно, многогранник P имеет центр симметрии. Поэтому его грани G и G' не только равны и параллельны, но также симметричны относительно центра симметрии многогранника. Следовательно, по той же общей причине и каждая грань G многогранника P имеет центр симметрии.

---

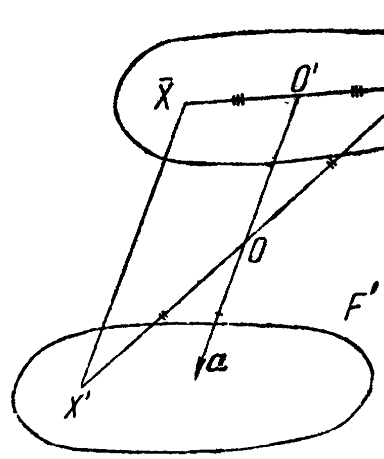
*) О связи параллелоэдров с геометрической кристаллографией см. книгу: Делоне, Падуров, Александров, Математические основы структурного анализа кристаллов, гл. III.

**) Доказательство очевидно из чертежа 135. Пусть фигуры F и F' симметричны относительно точки O и кроме того равны и параллельны, a — вектор переноса от F к F' и O' — такая точка, что $\overrightarrow{O'O}=\frac{a}{2}$. Пусть X — любая точка фигуры F, X' — симметричная ей точка фигуры F', а $\overline{X}$ — та точка фигуры F, которой X' соответствует по параллельному переносу. Тогда $O'O=\frac{1}{2}\overline{X}X'$, и потому $O'O$ есть средняя линия треугольника $XX'\overline{X}$. Следовательно, точки X и $\overline{X}$ симметричны относительно O'. Этим доказано, что в фигуре F каждой точке X отвечает точка $\overline{X}$, симметричная с X относительно O'. Следовательно, O' есть центр симметрии фигуры F.

Из теоремы 1 легко выводится

Теорема 2. *Всякий параллелоэдр и все его грани имеют центры симметрии.*

Действительно, рассмотрим какое-либо заполнение пространства параллелоэдрами. Пусть G_0 — грань параллелоэдра P_0; по ней к P_0 прилегает следующий параллелоэдр P_1. При параллельном переносе, переводящем P_0 в P_1, грань G_0 переходит в грань G_1 того же параллелоэдра P_1. Следовательно, каждой грани параллелоэдра отвечает на нём же равная и параллельная ей грань, откуда на основании теоремы 1 следует, что сам параллелоэдр и все его грани имеют центры симметрии.

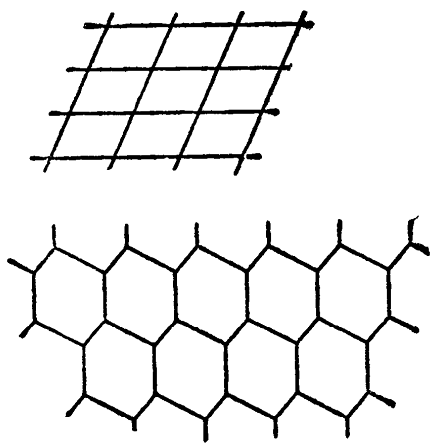


Черт. 135.

(Так как теорема Минковского верна в пространстве любого числа измерений, то тем же свойством обладают теоремы 1 и 2.)

3. Для того чтобы вывести все типы параллелоэдров трёхмерного пространства, нам нужно решить сначала аналогичную задачу для плоскости, т. е. найти все выпуклые многоугольники, которыми можно заполнять плоскость, прикладывая их параллельно друг другу по целым сторонам. Такие многоугольники называются *параллелогонами* (черт. 136).

Теорема 3. *Параллелогонами являются всякий параллелограмм и всякий шестиугольник с центром симметрии; других параллелогонов нет.*


Черт. 136.

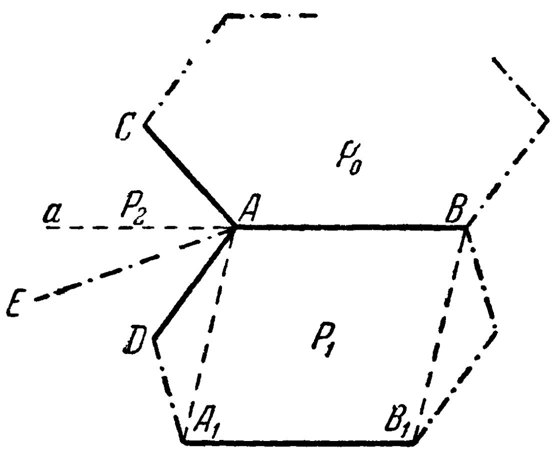
То, что всякий параллелогон имеет центр симметрии, доказывается так же, как теорема 2, с тем упрощением, что здесь нет надобности ссылаться на общую теорему 1. И без того очевидно, что многоугольник с попарно равными и параллельными сторонами имеет центр.

Рассмотрим какое-либо заполнение плоскости параллелогонами. Пусть P_0 — один из параллелогонов и P_1 — параллелогон, смежный с P_0 по стороне AB (черт. 137). Так как у P_1 есть равная и параллельная сторона A_1B_1 и P_1 — выпуклый многоугольник, то он содержит целый параллелограмм ABB_1A_1. Если P_1 сводится к этому параллелограмму, то осуществляется первая возможность, указанная в теореме.

Остаётся доказать, что в противном случае параллелогон будет шестиугольником.

Если P_1, а значит, и P_0 не сводятся к параллелограмму, то из вершины A у них исходят стороны AC, AD, не являющиеся одна продолжением другой*). Покажем, что в этом случае к вершине A может прилегать ещё только один параллелогон.

Допустим, что это не так; тогда к P_0 по стороне AC прилегает параллелогон P_2 со стороной AE, отличной от AD (см. черт. 137). Проведём продолжение a стороны AB. Сторона AE не может лежать на этом продолжении, так как тогда параллелогон P_2 не мог бы содержать параллелограмма, равного и параллельного параллелограмму ABB_1A_1. Далее, сторона AE не может лежать по ту же сторону от линии a, что и сторона AC, ибо тогда у параллелогона P_2 не могло бы быть стороны, параллельной AB (иначе он оказался бы невыпуклым).



Черт. 137.

Итак, сторона AE лежит по другую сторону от линии a. Но к параллелогону P_1 по стороне AD прилегает параллелогон P_3, для которого верно то же рассуждение. Следовательно, параллелогоны P_2 и P_3 перекрываются, а это возможно лишь, если они совпадают, т. е. если AE совпадает с AD.

Итак, параллелогон P_2 неизбежно прилегает к P_0 и P_1 по сторонам AC и AD. Но в таком случае, пользуясь тем, что все эти параллелогоны равны, параллельно расположены и имеют центры симметрии, мы немедленно убеждаемся в том, что они являются шестиугольниками. (Так как P_2 равен и параллелен P_0 и P_1, то у него есть углы, соответствующие их углам A. Так как P_2 имеет центр, то этим углам соответствуют симметричные. Тогда из выпуклости ясно, что P_2 не может иметь никаких других углов, кроме полученных шести.)

То, что всякий параллелограмм и всякий шестиугольник с центром действительно могут заполнять плоскость, проверяется непосредственно.

4. Обратимся теперь непосредственно к выводу параллелоэдров.

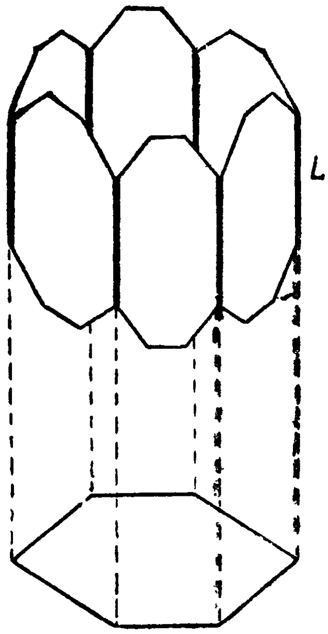
А) *Все грани одного параллелоэдра, параллельные любому данному его ребру L, образуют «замкнутую зону», т. е. циклическую последовательность граней, прилегающих одна к другой по рёбрам, параллельным L. Проекция параллелоэдра вдоль ребра L есть многоугольник, все стороны которого являются проекциями граней зоны.* Ребро L называется ребром зоны (черт. 138).

Пусть L_1 — ребро параллелоэдра P и G_1 — грань с этим ребром. Так как грань G_1 имеет центр симметрии, то у неё есть ещё ребро L_2, равное и параллельное L_1. К грани G_1 по ребру L_2 прилегает ещё грань G_2, у которой опять-таки есть ребро L_3, равное и параллельное L_2, и т. д.

*) Это становится совершенно очевидным, если вспомнить, что параллелогоны P_0 и P_1 содержат параллелограммы, прилегающие по стороне AB, в силу чего стороны AC и AD могут служить продолжением друг друга лишь тогда, когда они сами являются сторонами этих параллелограммов.

Ввиду конечности числа граней, получающихся таким образом, последовательность граней G_1, $G_2, \ldots$ должна замкнуться.

Если спроектировать параллелоэдр на плоскость вдоль ребра L, то все грани, параллельные этому ребру, спроектируются в прямолинейные отрезки, ни один из которых не будет лежать внутри проекции *): иначе параллелоэдр не лежал бы по одну сторону от соответствующей грани, вопреки его выпуклости. Поэтому проекции всех граней зоны должны лежать на границе проекции параллелоэдра, и так как зона замыкается, то все стороны проекции суть проекции последовательных граней зоны.

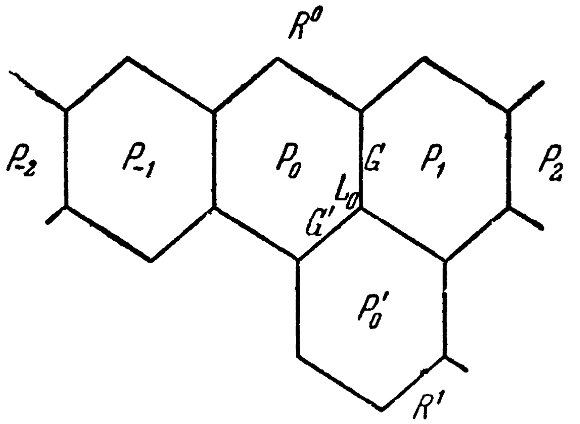


Черт. 138.

В) *В заполнении пространства параллелоэдры, смежные по граням одной зоны и её естественных продолжений, образуют непроницаемый слой, т. е. слой, разбивающий пространство. Проекция этого слоя вдоль ребра зоны даёт разбиение плоскости на параллелогоны.*

Рассмотрим разбиение пространства на параллелоэдры. Возьмём в нём какой-либо параллелоэдр P_0 и какое-либо его ребро L_0. По доказанному, ребру L_0 соответствует замкнутая зона граней. Бесконечную призму, ограниченную плоскостями этих граней, назовём зональной призмой. Сечение зональной призмы плоскостью и есть проекция параллелоэдра вдоль ребра L_0 на данную плоскость.

По грани G, содержащей ребро L_0, к параллелоэдру P_0 прилегает параллелоэдр P_1, а по грани, параллельной G, к P_0 прилегает параллелоэдр P_{-1}; далее, к P_1 и P_{-1} по граням, параллельным G, прилегают параллелоэдры P_2 и P_{-2}, и т. д. Таким путём получаем линейный ряд параллелоэдров и вместе с тем ряд R^0 их зональных призм Π_i. Этот ряд зональных призм разбивает пространство. (См. черт. 139, где изображены проекции параллелоэдров вдоль ребра L_0.)



Черт. 139.

По другой грани G', содержащей ребро L_0, к параллелоэдру P_0 прилегает параллелоэдр P'_0. Он прилегает также к P_1 по ребру L_0. Так как двугранные углы при общем ребре L_0 параллелоэдров P_0, P_1, P'_0 не входят друг в друга, то и зональные призмы также не входят друг в друга.

*) Здесь, как и всюду дальше, не обязательно, чтобы плоскость проекции была перпендикулярна к направлению проектирования.

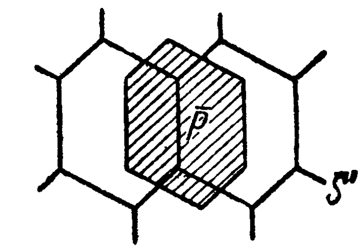
Прикладывая к параллелоэдру P_0' параллелоэдры P_1', P_{-1}' по граням, параллельным грани G, и т. д., получим новый линейный ряд параллелоэдров и соответственно ряд R^1 их зональных призм. Но легко убедиться в том, что *ряды R^0 и R^1 зональных призм прилегают друг к другу без просветов и налеганий.* Для этого рассмотрим все параллелоэдры, сходящиеся в ребре L_0. Каждый из них содержится в двугранном угле с ребром, содержащим L_0. В этом же двугранном угле содержится соответствующая зональная призма, и плоскости граней этой призмы, сходящиеся в L_0, совпадают с гранями указанного двугранного угла. Поэтому зональные призмы располагаются вокруг ребра, содержащего L_0, без просветов и налеганий. Так как параллелоэдры имеют центры симметрии, то зональные призмы также имеют центры симметрии и, следовательно, в сечении призм плоскостью, не параллельной ребру L_0, получаются центрально-симметричные многоугольники, располагающиеся вокруг общей вершины без просветов и налеганий. Кроме того, эти многоугольники, очевидно, равны и параллельно расположены. Но в таком случае, как мы убедились при выводе параллелогонов, имеются лишь две возможности: многоугольники являются либо параллелограммами, либо шестиугольниками. А отсюда непосредственно видно, что ряды призм R^0 и R^1 прилегают без просветов и налеганий.

Продолжая теперь прикладывание следующих рядов параллелоэдров в обе стороны от исходного ряда R_0, получим целый слой параллелоэдров. При этом по доказанному зональные призмы без просветов и налеганий заполнят всё пространство, а так как прилеганию призм соответствует прилегание параллелоэдров по граням зон, то построенный нами слой параллелоэдров будет непроницаемым. Кроме того, мы убедились в том, что, проектируя этот слой на плоскость вдоль ребра зоны, мы получаем разбиение плоскости на параллелогоны.

C) *Если параллелоэдры P и P' лежат в соседних слоях и их зональные проекции, т. е. проекции вдоль ребра зоны, перекрываются, то общая часть их проекций есть проекция их общей грани.*

Из предыдущего следует, что вся система параллелоэдров, заполняющих пространство, распадается на слои, образуемые параллелоэдрами, смежными по граням данной зоны и её естественных продолжений. Два слоя S и S', имеющие общие точки, должны полностью прилегать друг к другу, так что между ними уже нет пустот: иначе такая пустота заполнялась бы каким-то параллелоэдром, исходя из которого мы построили бы слой, который ввиду его непроницáемости разделил бы слои S и S'.

Пусть зональные проекции параллелоэдров P и P' из соседних слоёв S и S' перекрываются и пусть A — любая их общая внутренняя точка. Прямая l, проходящая через A параллельно ребру зоны, пересекает оба параллелоэдра и не пересекает других параллелоэдров из тех же слоёв, потому что проекции параллелоэдров одного слоя не перекрываются. А так как слои полностью прилегают друг к другу, то эта прямая, выходя из P в направлении P', сразу входит в P', так что P и P' имеют общую точку, проекцией которой является данная точка A. Следовательно, вся общая часть проекции этих параллелоэдров состоит из проекций их общих точек. Тем самым она является проекцией их общей грани, потому что параллелоэдры прилегают по целым граням.

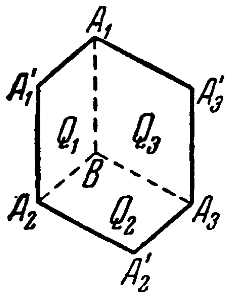


Черт. 140.

D) *Все типы параллелоэдров могут быть найдены посредством «слоевого построения»*, состоящего в следующем:

Выберем какую-либо замкнутую зону параллелоэдра (ребро этой зоны будем для удобства считать вертикальным). Тогда все его грани распадаются на три части: на зону и две симметричные друг другу «шапочки» — «верхнюю» и «нижнюю».

Пусть S и S' — два соседних слоя, соответствующих выбранной зоне, причём считаем, что S' лежит над S. Пусть $\overline{S}$ и $\overline{S'}$ — зональные проекции этих слоёв на одну и ту же плоскость. Вследствие B) эти проекции представляют собой два заполнения плоскости одинаковыми параллелогонами. Пусть P — параллелоэдр из слоя S и $\overline{P}$ — его проекция. Она покрыта проекциями параллелоэдров из слоя S' и согласно C) общая её часть с любой из этих проекций есть проекция некоторой грани параллелоэдра P (черт. 140).



Черт. 141.

Отсюда и следует *слоевое построение*:

Для того чтобы найти все возможные параллелоэдры, достаточно рассмотреть все возможные налегания друг на друга одинаковых разбиений плоскости на параллелогоны (это определит строение шапочки, а вместе с ним и строение зоны).

5. Теперь, чтобы завершить вывод, остаётся осуществить это слоевое построение.

Тут нужно различать два случая соответственно двум возможным видам параллелогонов.

Первый случай: параллелогоны суть шестиугольники. При наложении одного разбиения $\overline{S'}$ на другое могут представиться четыре возможности в зависимости от того, куда попадает данная вершина A разбиения $\overline{S'}$ (черт. 141):

I) внутрь одного из параллелограммов Q_1, Q_2, Q_3;

II) внутрь одной из сторон BA_i этих параллелограммов *);

III) в точку B;

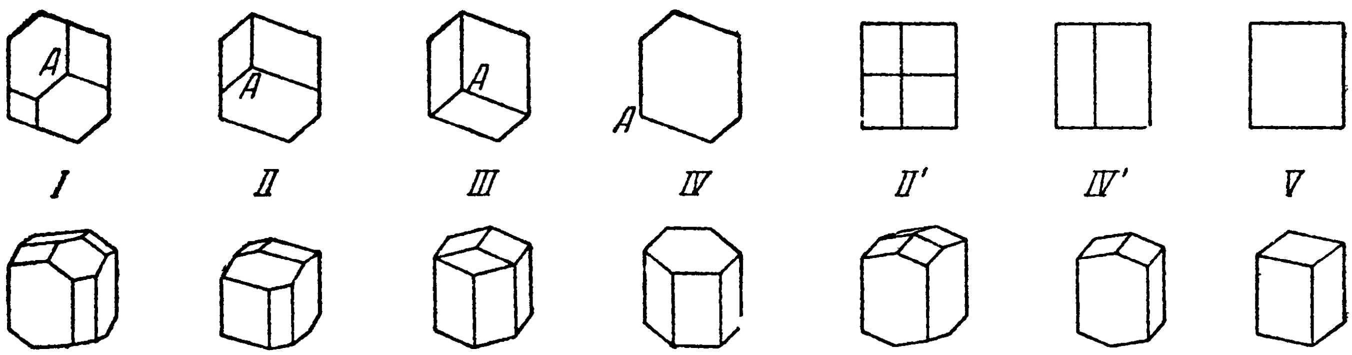
IV) в одну из точек A_1, A_2, A_3.

Этим четырём случаям отвечают четыре проекции шапочек параллелоэдров, изображённые на черт. 142, и соответственно четыре типа параллелоэдров, которые изображены так, что ребро зоны вертикально.

---

*) Легко видеть, что если A падает, например, на сторону A_1A_1', то это эквивалентно тому, что она падает на A_2B.

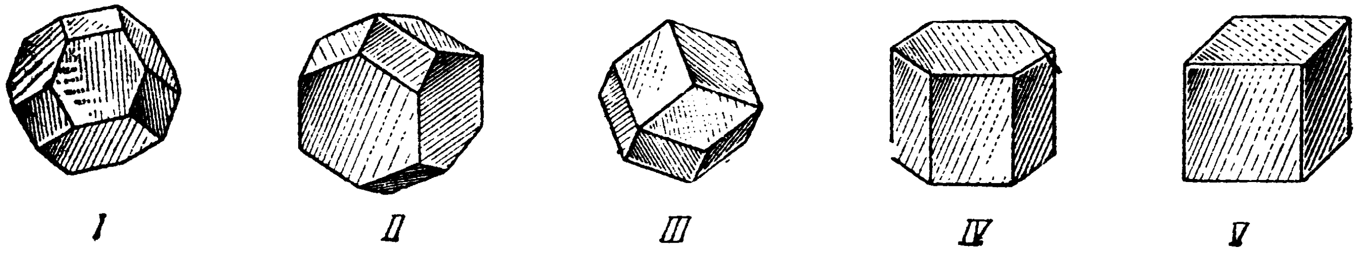
Второй случай: параллелогоны суть параллелограммы. Здесь для наложения одного разбиения на другое имеются, очевидно, лишь три возможности, изображённые на черт. 142 и обозначенные II′, IV′, V. Обозначение II′ и IV′ указывает на то, что соответствующие многогранники имеют то же строение, что многогранники II и IV. Разница



Черт. 142.

лишь в том, что берутся их проекции, соответствующие зонам, играющим разную роль в их топологическом строении.

Получается всего пять различных типов параллелоэдров (черт. 143): (I) Четырнадцатигранник; 8 граней шестиугольные, 6 — параллелограммы. (II) Двенадцатигранник; 4 грани шестиугольные, 8 — параллелограммы. (III) Двенадцатигранник, у которого все грани — параллелограммы. (IV) Шестигранная призма. (V) Параллелепипед. (Наиболее



Черт. 143.

симметричного вида четырнадцатигранный параллелоэдр представляет собой «кубо-октаэдр», т. е. многогранник, являющийся пересечением куба с октаэдром, оси которого перпендикулярны граням куба, причём шестиугольники, вырезаемые на гранях октаэдра, должны иметь центры симметрии.

Теперь можно формулировать окончательный результат:

Теорема 4. *Для того чтобы выпуклый многогранник был параллелоэдром, необходимо и достаточно, чтобы он имел строение одного из пяти указанных типов и чтобы как он сам, так и все его грани имели центры симметрии.*

(Можно показать, что требование наличия центра симметрии у самого многогранника лишнее: оно следует из наличия центров симметрии у граней.)

Необходимость этих условий доказана предыдущими рассуждениями; достаточность их получается непосредственно. Рассмотрим, например, многогранник первого типа. Выбрав одну его зону, построим слой таких многогранников, прилегающих по граням зоны. Такое построение возможно, так как зональная проекция представляет собой шестиугольник с центром, т. е. параллелогон. Построим затем другой такой же параллельный слой и положим его на предыдущий так, чтобы какая-нибудь грань нижней шапочки одного из его параллелоэдров совпала с соответствующей гранью верхней шапочки параллелоэдра из первого слоя. Тогда слои полностью налягут друг на друга, как это легко видеть на основании строения шапочек. Продолжая это наложение слоёв, получим заполнение всего пространства.

6. Основой проведённого вывода является существование замкнутой зоны, которое, в свою очередь, непосредственно вытекает из существования центра у параллелоэдра и его граней. Но в более чем трёхмерном пространстве такое же простое заключение невозможно, и там не обязательно все грани, параллельные какому-либо ребру, образуют замкнутую зону. То-есть грани $(n-1)$-мерной проекции n-мерного параллелоэдра вдоль ребра могут и не быть проекциями его $(n-1)$-мерных граней. Всё же в четырёхмерном пространстве Б. Н. Делоне удалось провести слоевое построение и найти все четырёхмерные параллелоэдры. Их оказалось 52 типа. В пространствах большего числа измерений слоевое построение не может дать всех параллелоэдров.

Наиболее глубокое исследование, касающееся n-мерных параллелоэдров, принадлежит Г. Ф. Вороному (1868—1908) *). Пусть E — параллелепипедальная система точек, или, как говорят, решётка (т. е. система концов векторов $\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i$, где $\boldsymbol{a}_i$ — данные векторы, а x_i — любые целые числа). Построим вокруг каждой точки A решётки E область ближайших точек, т. е. множество таких точек X, что расстояние AX не больше расстояния от X до любой другой точки решётки E. Легко доказывается, что эти области — выпуклые многогранники, смежные по целым граням **). *Они называются областями Вороного* решётки E. Из того, что решётка обладает параллельной повторяемостью, следует, что все её области Вороного равны и параллельно расположены. Следовательно, они представляют собой параллелоэдры. Легко доказать, что для того, чтобы параллелоэдр был областью Вороного какой-либо решётки, необходимо и достаточно, чтобы прямые из его центра в центры граней были перпендикулярны к граням.

Вороной высказал гипотезу, что всякий параллелоэдр можно путём афинного преобразования превратить в «область Вороного». Он сам доказал это для «примитивных» параллелоэдров, т. е. таких, которые

*) Изложение работ Г. Ф. Вороного см. в книге Б. Н. Делоне, Петербургская школа теории чисел (1947), стр. 268—321. Там же (стр. 295—297) указаны все дальнейшие работы о параллелоэдрах.

**) Они ограничиваются плоскостями, перпендикулярными к отрезкам, соединяющим данную точку с другими точками решётки, в серединах этих отрезков.

в заполнении пространства сходятся в вершинах в наименьшем возможном числе, именно $(n+1)$. При $n=3$ примитивен параллелоэдр лишь одного типа I — четырнадцатигранник. При $n=4$ примитивных параллелоэдров имеется три типа.

Теорема Вороного была доказана для всех трёхмерных и четырёхмерных параллелоэдров Б. Н. Делоне и обобщена на более широкий класс n-мерных параллелоэдров, чем примитивные, О. К. Житомирским. Однако в полном объёме она до сих пор остаётся недоказанной. Доказав её, мы получили бы также способ находить параллелоэдры n-мерного пространства, потому что Вороным дан способ нахождения «областей Вороного».

§ 2. Многогранник наименьшей площади при заданном объёме

1. Речь идёт о следующей теореме, доказанной впервые Линделёфом в 1876 г.

Теорема 1. *Среди всех выпуклых многогранников с данными направлениями граней и с данным объёмом наименьшую площадь поверхности имеет многогранник, описанный вокруг шара.*

Эта теорема оказывается простым следствием другой, более общей, теоремы, принадлежащей Минковскому. Для формулировки этой последней сделаем ряд предварительных замечаний.

Обобщая введённое раньше понятие опорного числа (§ 2 гл. I), будем называть опорным числом $h(\boldsymbol{n})$ многогранника расстояние от начала до опорной плоскости многогранника с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$; причём, как всегда, это расстояние считается положительным, если нормаль $\boldsymbol{n}$, отложенная из начала, направлена к опорной плоскости, и отрицательным,— в противном случае. Под $\boldsymbol{n}$ мы всегда понимаем единичный вектор. Поэтому можно сказать, что $h(\boldsymbol{n})$ есть правая часть в нормальном уравнении опорной плоскости с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{x}=h(\boldsymbol{n}). \tag{1}$$

Обобщение в сравнении с определением, данным в § 2 главы I, состоит в том, что теперь опорная плоскость с нормалью $\boldsymbol{n}$ может и не быть плоскостью грани. Это обобщённое понятие опорного числа будет иметься в виду на протяжении всего данного параграфа и следующих.

Каждый раз мы будем иметь дело с конечным числом данных попарно различных векторов $\boldsymbol{n}_i$, среди которых содержатся нормали ко всем граням рассматриваемых многогранников. Для краткости вместо $h(\boldsymbol{n}_i)$ будем писать h_i. Общую часть многогранника и его опорной плоскости с нормалью $\boldsymbol{n}_i$ мы будем называть i-й гранью, хотя она может вырождаться в ребро или вершину. Если такого вырождения нет, то будем говорить об истинной грани. Площадь i-й грани обозначается F_i; она будет нулём в случае вырождения грани.

Лемма 1. *Если начало перенести на вектор $\boldsymbol{a}$, то опорное число $h(\boldsymbol{n})$ приобретает слагаемое $-\boldsymbol{an}$.*

Действительно, согласно формуле (1) $h(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{nx}$. Если $h'(\boldsymbol{n})$ — опорное число при новом выборе начала O', то

$$h'(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{nx}',$$

где вектор $\boldsymbol{x}'$ идёт из O' в любую точку X опорной плоскости. Если O — старое начало, то $\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x}'=\overrightarrow{O'X}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OX}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}$, а потому

$$h'(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{nx}-\boldsymbol{na}=h(\boldsymbol{n})-\boldsymbol{na}.$$

Лемма 2. *Объём многогранника выражается формулой*

$$V=\frac{1}{3}\sum_i h_iF_i.$$

Эта формула очевидна: она выражает объём многогранника как алгебраическую сумму объёмов пирамид с общей вершиной в начале и с основаниями на гранях многогранника. При этом если начало — не внутри многогранника, то объём пирамиды, лежащей вне его, должен вычитаться. Так оно и будет, потому что в этом случае опорное число h_i отрицательно.

Лемма 3. *Для всякого многогранника* $\sum\limits_i \boldsymbol{n}_iF_i=0$.

Эта формула нам известна. Между прочим, она вытекает из лемм 1 и 2. Действительно, при переносе начала на любой вектор $\boldsymbol{a}$ объём, конечно, не меняется, а потому

$$\sum h_iF_i=\sum(h_i-\boldsymbol{an}_i)F_i=\sum h_iF_i-\boldsymbol{a}\sum\boldsymbol{n}_iF_i.$$

И так как это верно при любом векторе $\boldsymbol{a}$, то $\sum\boldsymbol{n}_iF_i=0$.

Лемма 4. *Пусть P^0, P^1 — два многогранника, $\boldsymbol{n}_1,\ldots,\boldsymbol{n}_r$ — векторы, среди которых содержатся нормали ко всем их истинным граням. Если h_i^0, F_i^1 — опорные числа и площади граней, соответственно, многогранника P^0 и P^1, то сумма*

$$V_{011}\equiv V(P^0P^1P^1)=\frac{1}{3}\sum h_i^0F_i^1 \qquad (2)$$

не меняется ни при переносе начала, ни при параллельных переносах многогранников P^0, P^1. Она не меняется также при введении новых векторов $\boldsymbol{n}_i$.

Если начало перенести на вектор $\boldsymbol{a}$, то согласно лемме 1 указанная сумма должна замениться такой:

$$\sum_i(h_i^0-\boldsymbol{an}_i)F_i^1=\sum_i h_i^0F_i^1-\boldsymbol{a}\sum_i\boldsymbol{n}_iF_i^1.$$

Но в силу леммы 3 последняя сумма исчезает, откуда и следует первое утверждение леммы.

При переносе многогранника P^1 площади и направления его граней не меняются, а потому сумма V_{011} остаётся неизменной. Перенос же многогранника P^0 влияет на изменение его опорных чисел, как противоположный перенос начала. Поэтому сумма V_{011} не меняется также при переносах многогранника P^0. То, что сумма $V(P^0P^1P^1)$ не меняется при введении новых векторов n_i, очевидно из того, что опорные плоскости с этими векторами упираются в многогранник P^1 уже по «граням», для которых $F'_i=0$.

Опираясь на очевидную аналогию между выражениями величины V_{011} и объёма, назовём величину V_{011} *смешанным объёмом* многогранников P^0 и P^1. Если P^0 равен и параллелен P^1, то, очевидно, V_{011} равно объёму многогранника P^0. Другое значение величины $V(P^0P^1P^1)$ будет выяснено в § 3, и там же будет раскрыт смысл введённого её обозначения. Пока для его объяснения можно только заметить, что при подобном увеличении многогранника P^0 в λ раз $V(P^0P^1P^1)$ приобретает множитель λ, а при таком же увеличении многогранника P^1 — множитель λ^2; так как при P^0, равном и параллельном P^1, $V(P^0P^1P^1)$ равно объёму многогранника P^0, то этот объём естественно обозначать $V(P^0P^0P^0)$.

Теперь формулируем теорему Минковского:

Теорема 2. *Для всяких выпуклых многогранников P^0, P^1*

$$V^3(P^0P^1P^1)\geqslant V(P^0P^0P^0)\cdot V^2(P^1P^1P^1).$$

При этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда многогранники P^0 и P^1 гомотетичны (т. е. получаются один из другого параллельным переносом и подобным преобразованием из некоторого центра).

2. Теорема 1 оказывается простым следствием теоремы 2 благодаря следующему замечанию:

Если многогранники P^0 и P^1 имеют одни и те же внешние нормали к истинным граням и многогранник P_0 описан вокруг единичного шара, то $3V(P^0P^1P^1)$ есть площадь поверхности многогранника P^1. Действительно, беря начало в центре шара, вокруг которого описан многогранник P^0, получим, что все его опорные числа $h_i^0=1$. Тогда согласно определению смешанного объёма $V(P^0P^1P^1)$ по формуле (2) будем иметь $V(P^0P^1P^1)=\sum F_i^1=F(P^1)$, где $F(P^1)$ — площадь поверхности многогранника P^1.

Согласно этому замечанию из теоремы 2 следует, что (переходя к сокращённому обозначению объёмов)

$$F^3(P^1)\geqslant 27V(P^0)\,V^2(P^1)$$

и знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда многогранник P^1 подобен многограннику P^0. Это, очевидно, означает, что площадь $F(P^1)$ достигает минимума при данном объёме $V(P^1)$ тогда и только тогда, когда многогранник P^1 подобен P^0, т. е. когда и он описан вокруг некоторого шара. А в этом и состоит утверждение теоремы 1.

3. Обратимся к доказательству теоремы 2.

Пусть P^1 — данный многогранник и $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}$ — попарно различные единичные векторы, среди которых содержатся все внешние нормали к истинным граням многогранника P^1. Пусть P — переменный многогранник, вырезаемый в пространстве плоскостями с нормалями $\boldsymbol{n}_i$. Среди многогранников P содержится данный многогранник P^1. Многогранник P есть пересечение полупространств $\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{x} \leqslant h_i$, где h_i — расстояния от начала до i-й плоскости Q_i, взятые с соответствующим знаком. Плоскость Q_i может и не касаться многогранника P. Тогда h_i не будет его опорным числом. Тем не менее, когда все h_i заданы, многогранник P вполне определён, и можно числа h_i назвать его «опорными числами» в кавычках. (Если i-я плоскость не касается многогранника P, то число h_i уже не определяется многогранником.)

Лемма 5. *Объём V многогранника P есть дифференцируемая функция его «опорных чисел» h_i и*

$$\frac{\partial V}{\partial h_i} = F_i,$$

где F_i — площадь соответствующей грани. (Если i-я плоскость не касается многогранника, то i-й грани нет, и считается, что $F_i = 0$.)

Эта лемма достаточно очевидна и доказана в § 2 главы VII.

Очевидно, что площади граней F_i зависят от «опорных чисел» h_i непрерывно, так что объём V имеет непрерывные частные производные.

Докажем теперь следующее утверждение, из которого теорема 2 получится простым формальным рассуждением:

Теорема 2а. *Пусть P — переменный многогранник, ограничиваемый плоскостями $\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{x} = h_i$ с данными внешними нормалями $\boldsymbol{n}_i$, а P^1 — один из этих многогранников. Тогда при условии, что*

$$\Phi(h_1, \ldots, h_r) \equiv \sum_{i=1}^{r} h_i F_i^1 = \sum_{i=1}^{r} h_i^1 F_i^1 = 3V(P^1), \tag{3}$$

многогранник P имеет наибольший объём тогда и только тогда, когда он равен и параллелен многограннику P^1. (F_i^1 — площади граней выбранного многогранника P^1, $V(P^1)$ — его объём.)

Линейная форма Φ не зависит от выбора начала и не меняется при переносах многогранников, что доказывается буквально так же, как лемма 4. Разница лишь в том, что h_i уже могут не быть настоящими опорными числами и потому Φ есть функция не многогранника P, а только чисел h_i.

В связи с этим замечанием можно считать, что начало находится внутри всех рассматриваемых многогранников P. Тогда все h_i положительны, и сумма Φ состоит лишь из неотрицательных членов. Поэтому, если i-я грань многогранника P не вырождается, т. е. $F_i > 0$, то из (3) следует, что $h_i \leqslant \frac{3V(P^1)}{F_i^1}$. Это означает, что все «опорные числа» переменного многогранника P, соответствующие невырождающимся граням многогранника P^1, ограничены.

Пусть теперь i-я грань многогранника P^1 вырождается, так что $F_i^1=0$. Тогда соответствующее слагаемое в линейной форме Φ исчезает и на число h_i не налагаются никакие ограничения. Тем не менее истинное i-е опорное число многогранника P будет ограничено.

Действительно, допустим противное. Тогда как бы далеко ни отодвигать i-ю плоскость Q_i, она всегда будет касаться переменного многогранника P. Поэтому, если отодвинуть её в бесконечность, многогранник P станет бесконечным. Это означает, что все плоскости, кроме Q_i, ограничивают бесконечный многогранник, и их нормали направлены в одно полупространство. Но в таком случае эти плоскости ни при каком их расположении относительно начала не могут ограничить конечный многогранник. Между тем, поскольку i-я грань на многограннике P^1 вырождается, то плоскость Q_i не участвует в ограничении этого многогранника: он ограничен уже всеми остальными плоскостями. Получающееся противоречие показывает, что истинное i-е опорное число многогранника P должно быть ограничено.

Из доказанного следует, что все истинные опорные числа многогранников P с условием (3) ограничены, а следовательно, и сами многогранники ограничены. Поэтому среди них существует многогранник P^0 наибольшего объёма.

Речь идёт о максимуме объёма V при условии (3), т. е. об относительном экстремуме. Так как по лемме 5 объём есть дифференцируемая функция чисел h_i, то согласно известному правилу Лагранжа при максимуме должно быть

$$\frac{\partial V}{\partial h_i}=\lambda\frac{\partial \Phi}{\partial h_i} \qquad (i=1, \ldots, r)$$

или, так как $\frac{\partial V}{\partial h_i}=F_i$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial h_i}=F_i^1$, то

$$F_i=\lambda F_i^1 \qquad (i=1, \ldots, r). \tag{4}$$

Это означает, что площади граней максимального многогранника и данного P^1 пропорциональны. Но при подобном увеличении многогранника P^1 в $\sqrt{\lambda}$ раз получим многогранник $\sqrt{\lambda}\,P^1$ с площадями граней, равными λF_i^1. Поэтому равенства (4) означают, что максимальный многогранник P и многогранник $\sqrt{\lambda}P^1$ имеют попарно параллельные и равновеликие грани. В таком случае согласно теореме 2 § 3 главы VI эти многогранники равны и параллельно расположены. Приводя их параллельным переносом к совпадению, получим, что их опорные числа равны. Поэтому если h_i — опорные числа максимального многогранника, то $h_i=\sqrt{\lambda}h_i^1$. Подставляя эти значения в (3), получим $\lambda=1$, т. е.

максимальный многогранник равен данному P^1, что и требовалось доказать.

4. Докажем теперь самую теорему 2:

Для всяких двух многогранников P^0, P^1

$$V^3(P^0P^1P^1) \geqslant V(P^0P^0P^0)\ V^2(P^1P^1P^1)$$

и знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда многогранники гомотетичны.

Пусть $\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_r$ — все попарно различные внешние нормали к истинным граням многогранников P^0 и P^1. Рассмотрим многогранники P, ограничиваемые плоскостями с нормалями $\boldsymbol{n}_i$ и такие, что

$$\sum_{i=1}^{r} h_i F_i^1 = \sum_{i=1}^{r} h_i^1 F_i^1 = 3V(P^1). \tag{5}$$

(Здесь и дальше суммирование распространяется по всем i от 1 до r, потому что введение лишних векторов $\boldsymbol{n}_i$ не меняет сумм: соответствующие им грани вырождаются, т. е. $F_i^1 = 0$.) Положим $\mu V(P^0P^1P^1) = V(P^1)$, т. е. по формулам (2) и (5) для $V(P^0P^1P^1)$ и $V(P^1)$:

$$\mu = \frac{\Sigma h_i^1 F_i^1}{\Sigma h_i^0 F_i^1}. \tag{6}$$

Если подвергнуть многогранник P^0 подобному увеличению в μ раз с центром подобия в начале, то получим многогранник μP^0 с опорными числами μh_i^0. Из определения μ по формуле (6) следует

$$\Sigma \mu h_i^0 F_i^1 = \Sigma h_i^1 F_i^1,$$

т. е. многогранник μP^0 содержится среди многогранников P. Так как по теореме 2а среди многогранников P наибольший объём имеет многогранник P^1, то

$$V(\mu P^0) \leqslant V(P^1) \tag{7}$$

и $V(\mu P^0) = V(P^1)$ тогда и только тогда, когда многогранник μP^0 равен и параллелен P^1.

При подобном увеличении многогранника в μ раз его объём умножается на μ^3. Поэтому из (7), имея в виду определение μ, получаем

$$V(P^1) \geqslant \mu^3 V(P^0) = \frac{V^3(P^1)}{V^3(P^0P^1P^1)} V(P^0),$$

или

$$V^3(P^0P^1P^1) \geqslant V^2(P^1)\, V(P^0),$$

и согласно условию равенства в формуле (7) здесь равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mu P^0 = P^1$, т. е. когда P^0 и P^1 гомотетичны. Таким образом, теорема 2 доказана, а так как в п° 2 было выяснено, что в ней содержится теорема 1, то эта последняя также доказана.

5. Может показаться, что такой путь доказательства теоремы 1 слишком сложен. Не проще ли было бы сразу искать минимум площади при заданном объёме V и при данных направлениях граней? Сравнительно нетрудно доказать, что 1) этот минимум достигается и притом для такого многогранника, который имеет все невырождающиеся грани данных направлений, и 2) для многогранника, у которого все грани не вырождаются, площадь поверхности F есть дифференцируемая функция опорных чисел h_i. Тогда, применяя к многограннику наименьшей площади правило Лагранжа, получим

$$\frac{\partial F}{\partial h_i}=\lambda\frac{\partial V}{\partial h_i}=\lambda F_i \qquad (i=1,\ldots, r),$$

где F_i — площадь его i-й грани.

Однако доказательство того, что этим уравнениям удовлетворяет только многогранник, описанный около шара, оказывается довольно сложным. Поэтому, доказывая более общую теорему 2, мы выигрываем в простоте, не говоря уже о том, что теорема 2 содержит, помимо теоремы 1, также другие интересные следствия, о которых речь будет итти в § 3.

6. Все результаты этого параграфа обобщаются в пространство любого числа измерений. В n-мерном пространстве мы определяем смешанный объём $V(P^0P^1P^1\ldots P^1)$ многогранников P^0 и P^1 формулой

$$V(P^0\underbrace{P^1\ldots P^1}_{n-1})=\frac{1}{n}\sum_i h_i^0F_i^1,$$

где h_i^0 — опорные числа многогранника P^0, а F_i^1 — «площади» граней многогранника P^1.

Теорема 2 формулируется тогда так: для всяких двух n-мерных выпуклых многогранников

$$V^n(P^0P^1\ldots P^1)\geqslant V(P^0\ldots P^0)\cdot V^{n-1}(P^1\ldots P^1), \tag{8}$$

причём знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда P^0 и P^1 гомотетичны.

Из этой теоремы Минковского, так же как в n° 2, сразу следует минимальное свойство многогранника, описанного около шара.

Однако обобщение приведённого доказательства теоремы 2 в n-мерное пространство представляло бы собой пустую формальность! Дело в том, что теорема Минковского о равенстве многогранников, которой мы там воспользовались, доказывается в n-мерном пространстве на основании n-мерной теоремы 2. Другого её доказательства пока не известно.

Следовательно, в n-мерном случае взаимосвязь этих теорем оказывается обратной, пока, конечно, не найдено независимое доказательство теоремы Минковского о равенстве многогранников. Полное исследование связей между указанными теоремами в n-мерном пространстве и доказательство n-мерной теоремы 2 (неравенство (8)) даются в следующем параграфе.

§ 3. Смешанные объёмы и неравенство Брунна

1. Мы будем рассматривать линейные комбинации выпуклых тел и прежде всего выпуклых многогранников в n-мерном пространстве (см. § 2 гл. VI). Результаты, полученные для них в § 2 главы VI, буквально обобщаются на случай любого числа измерений, и на этом мы не будем останавливаться.

Напомним только, что если P_i — выпуклые многогранники, то

$$P = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$$

также выпуклый многогранник и всякая его грань G есть такая же линейная комбинация тех граней G_i многогранников P_i, которые лежат в плоскостях, параллельных G. Здесь, как и всюду дальше, допускаются только неотрицательные коэффициенты λ_i. Параллельность плоскостей граней понимается в смысле параллельности внешних нормалей.

Грани G_i, дающие настоящую $(n-1)$-мерную грань G, могут вырождаться в $(n-2)$-мерные и т. д. Например, в трёхмерном случае непараллельные рёбра, лежащие в параллельных опорных плоскостях многогранников P_1, P_2, дают на $P_1 + P_2$ грань в виде параллелограмма.

Отметим ещё один простой факт:

Если h — опорное число грани G, а h_i — опорные числа граней G_i, то

$$h = \lambda_1 h_1 + \ldots + \lambda_m h_m. \tag{1}$$

Действительно, если $x_1, \ldots, x_m$ — векторы, идущие в точки на гранях $G_1, \ldots, G_m$, то вектор

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m \tag{2}$$

идёт в точку на грани G. По самому определению опорных чисел $h = nx$, $h_i = nx_i$. Поэтому, умножая (2) на нормаль n, получим (1).

Теорема 1. *Пусть $P^1, \ldots, P^m$ — данные выпуклые многогранники в n-мерном пространстве и $P = \lambda_1 P^1 + \ldots + \lambda_m P^m$, где λ_i — переменные неотрицательные числа. Объём $V(P)$ многогранника P есть однородный многочлен n-й степени относительно λ_i.* Здесь допускаются многогранники P_i, вырождающиеся в многогранники меньшего числа измерений. Их линейная комбинация может быть n-мерной, как, например, линейная комбинация некомпланарных отрезков.

Доказательство проводится индукцией по числу измерений n. При $n=1$ теорема очевидна, так как в этом случае P^i суть отрезки на прямой и длина отрезка $\sum \lambda_i P^i$ равна такой же линейной комбинации их длин.

Допустим, что теорема верна в $(n-1)$-мерном пространстве. Пусть многогранники P^i лежат в n-мерном пространстве. Объём многогранника $P = \sum \lambda_i P^i$ выражается через его опорные числа и площади граней формулой

$$V(P) = \frac{1}{n} \sum_j h_j F_j. \tag{3}$$

Грани многогранника P суть такие же линейные комбинации параллельных граней многогранников P^i. Так как параллельный перенос «слагаемых» вызывает также лишь параллельный перенос линейной комбинации, то можно считать, что каждая грань многогранника P есть линейная комбинация многогранников в $(n-1)$-мерном пространстве. Поэтому по предположению индукции её $(n-1)$-мерный объём, т. е. площадь F_j, есть однородный многочлен $(n-1)$-й степени относительно λ_j.

Но согласно формуле (1) опорные числа h_j многогранника P являются линейными функциями от λ_i.

Отсюда следует, что правая часть формулы (3) есть однородный многочлен n-й степени относительно λ_i, и теорема доказана.

Однородный многочлен, каким является объём многогранника $P=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i P^i$, принято записывать в форме

$$V(P)=\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_n}V_{i_1i_2\ldots i_n}, \tag{3'}$$

где каждый индекс i_j пробегает независимо от других все значения от 1 до m. Поэтому в такой записи одно и то же произведение $\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_n}$ встречается столько раз, сколько возможно перестановок индексов $i_1,\ldots,i_n$. Коэффициенты $V_{i_1i_2\ldots i_n}$ определяются при этом так, что они не зависят от порядка индексов.

Возьмём какое-либо произведение $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_n}$. Положим в формуле $P=\sum\lambda_i P^i$ все λ_i равными нулю, кроме тех, которые входят в избранное произведение. Тогда соответствующие многогранники P^i не будут вовсе входить в комбинацию. Отсюда вытекает: коэффициент $V_{i_1\ldots i_n}$ при произведении $\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_n}$ зависит лишь от многогранников $P_{i_1},\ldots,P_{i_n}$. Так как не все $i_1,\ldots,i_n$ обязаны быть различными, то и среди этих многогранников могут быть одинаковые, т. е. один и тот же многогранник повторяется несколько раз.

В частности, если взять $\lambda_1=1$, а все прочие $\lambda_i=0$, то $P=P^1$, и из (3') следует, что коэффициент $V_{1\ldots1}$ есть объём многогранника P^1.

Вообще коэффициент $V_{i_1\ldots i_n}$ называется *смешанным объёмом* многогранников $P^{i_1},\ldots,P^{i_n}$ и записывается $V(P^{i_1}\ldots P^{i_n})$. По определению он не зависит от порядка индексов i_j, т. е. является симметрической функцией многогранников P^{i_j}.

Мы ограничимся линейными комбинациями двух многогранников. В этом случае формула (3') может быть написана в виде

$$V(\lambda_1P^1+\lambda_2P^2)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_1^{n-k}\lambda_2^kC_n^kV(\underbrace{P^1\ldots P^1}_{n-k}\underbrace{P^2\ldots P^2}_{k}). \tag{4}$$

2. Покажем теперь, что смешанный объём $V(P^1P^2\ldots P^n)$ совпадает со смешанным объёмом, введённым в § 2. Это утверждение заключено в следующей теореме:

Теорема 2. *Если $V(P^0P^1\ldots P^1)$ — смешанный объём в смысле формулы* (4), F_i^1 — *площади граней многогранника* P^1, *а* h_i^0 — *соответствующие опорные числа многогранника* P^0, *то*

$$V(P^0P^1\ldots P^1)=\frac{1}{n}\sum_i h_i^0F_i^1. \tag{5}$$

Для доказательства заметим, что объём многогранника $P=P^1+\lambda P^0$ есть дифференцируемая функция его опорных чисел h_i и что

$$\frac{\partial V(P)}{\partial h_i}=F_i,$$

где F_i — площадь соответствующей грани (лемма 5 § 2). Вместе с тем согласно (1)

$$h_i=h_i^1+\lambda h_i^0.$$

Поэтому производная объёма $V(P)$ по λ будет

$$\frac{\partial V(P)}{\partial\lambda}=\sum\frac{\partial V}{\partial h_i}\frac{dh_i}{d\lambda}=\sum h_i^0F_i.$$

Но $P=P^1+\lambda P^0$ при $\lambda\to 0$ сходится к P^1, так что $F_i\to F_i^1$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0}=\sum h_i^0F_i^1. \tag{6}$$

Вместе с тем по определению смешанного объёма (формула (4))

$$V(P)=V(P^1\ldots P^1)+n\lambda V(P^0P^1\ldots P^1)+\ldots,$$

где точками обозначены члены с λ во второй степени и выше. Из этой формулы следует, что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0}=nV(P^0P^1\ldots P^1).$$

А это вместе с (6) доказывает теорему.

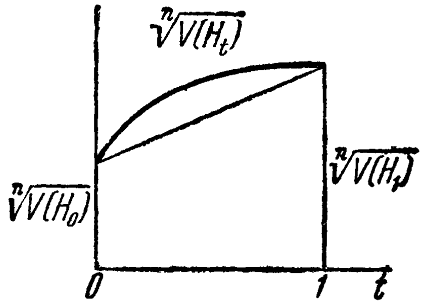
3. Теорема 1 о том, что объём линейной комбинации есть однородный многочлен, легко обобщается с многогранников на любые выпуклые тела.

Пусть $H_1,\ldots,H_m$ — данные выпуклые тела и $H=\lambda_1H_1+\ldots+\lambda_mH_m$ — их линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами. Легко убедиться, что если многогранники $P_1,\ldots,P_m$ сходятся соответственно к телам $H_1,\ldots,H_m$, то их линейная комбинация $P=\lambda_1P_1+\ldots+\lambda_mP_m$ сходится к H. Это значит, что при всяких λ_i объём $V(P)$ сходится к объёму $V(H)$. А так как $V(P)$ есть многочлен данной степени, то и $V(H)$ есть многочлен той же степени. Этим доказана

Теорема 1а. *Объём линейной комбинации выпуклых тел с неотрицательными коэффициентами есть однородный многочлен n-й степени относительно этих коэффициентов.*

Коэффициенты этого многочлена также называются смешанными объёмами и записываются совершенно так же.

В связи с этим во многих вопросах, касающихся смешанных объёмов, нет надобности выделять многогранники среди всех выпуклых тел.



Черт. 144.

(Теорема 2 также обобщается на любые выпуклые тела с заменой в формуле (5) суммы на интеграл.)

4. Немецкий геометр Брунн в 1887 г. доказал следующую теорему, которая в соединении с теоремами 1, 2 и послужила началом всей «теории смешанных объёмов»:

Теорема 3. *Если H_0, H_1 — любые выпуклые тела, $H_t=(1-t)H_0+tH_1$ и $0<t<1$, то для объёмов имеет место следующее неравенство* («*неравенство Брунна*»):

$$\sqrt[n]{V(H_t)} \geqslant (1-t)\sqrt[n]{V(H_0)}+t\sqrt[n]{V(H_1)}, \tag{7}$$

причём, как позже уточнил Минковский, *знак равенства стоит здесь тогда и только тогда, когда тела H_0 и H_1 гомотетичны* (в этом случае и тело H_t гомотетично им при любом t).

Напомним, что тело H_t есть геометрическое место точек, делящих отрезки с концами в любых точках тел H_0, H_1 в отношении $t:(1-t)$.

При данных H_0, H_1 величина $\sqrt[n]{V(H_t)}$ есть функция от t. Изобразив её графически (черт. 144), мы видим, что неравенство (7) означает, что график функции $\sqrt[n]{V(H_t)}$ проходит над хордой, соединяющей его концы. При любых t_1, t, t_2 с условием $0<t_1<t<t_2<1$

$$H_t=\frac{t_2-t}{t_2-t_1}H_{t_1}+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}H_{t_2}, \tag{8}$$

что проверяется прямым вычислением на основании простых алгебраических свойств линейной комбинации тел. Поэтому на основании того же неравенства (7), применённого теперь к H_{t_1}, H_{t_2} и H_t, убеждаемся, что график функции $\sqrt[n]{V(H_t)}$ лежит также над хордой, соединяющей точки, соответствующие взятым t_1 и t_2, т. е. он лежит над любой своей хордой и тем самым представляет собой выпуклую кривую.

Таким образом, теорема Брунна может быть формулирована так: $\sqrt[n]{V(H_t)}$, *где $H_t=(1-t)H_0+H_1$ и $0\leqslant t\leqslant 1$, есть выпуклая функция от t, сводящаяся к линейной лишь в том случае, когда тела H_0 и H_1 гомотетичны.*

Доказательство этой замечательной теоремы мы наметим потом; оно, кстати, не очень сложно. Сейчас же выясним её связь с неравенством Минковского, введённым в § 2.

5. Докажем, что *из теоремы Брунна следует неравенство Минковского*

$$V^n(H_1H_0\ldots H_0)\geqslant V(H_1\ldots H_1)\cdot V^{n-1}(H_0\ldots H_0), \tag{9}$$

причём знак равенства стоит здесь тогда и только тогда, когда H_0 *и* H_1 *гомотетичны.* Здесь $V(H_0\ldots H_0)=V(H_0)$, $V(H_1\ldots H_1)=V(H_1)$ — объёмы тел H_0, H_1.

Так как график функции $\sqrt[n]{V(H_t)}$ лежит над хордой, то

$$f(t)=\sqrt[n]{V(H_t)}-(1-t)\sqrt[n]{V(H_0)}-t\sqrt[n]{V(H_1)}\geqslant 0.$$

А так как $f(0)=0$, то производная $f'(0)\geqslant 0$ и в силу выпуклости функции $f(t)$, $f'(0)=0$ лишь в том случае, когда $f(t)\equiv 0$, т. е. когда тела H_0 и H_1 гомотетичны.

Покажем, что это неравенство $f'(0)\geqslant 0$ и есть неравенство Минковского (9).

Согласно формуле (4), которая, как показано, верна для любых выпуклых тел, объём тела $H_t=(1-t)H_0+tH_1$ будет

$$V(H_t)=\sum_{k=1}^{n}(1-t)^{n-k}t^kC_n^kV_k,$$

где

$$V_k=V(\underbrace{H_0\ldots H_0}_{n-k}\ \underbrace{H_1\ldots H_1}_{k}).$$

Пользуясь этой формулой, легко вычислить $f'(0)$; при этом оказывается, что

$$f'(0)=\frac{V_1-V_0}{V_0^{\frac{n-1}{n}}}+V_0^{\frac{1}{n}}-V_n^{\frac{1}{n}}.$$

Поэтому неравенство $f'(0)\geqslant 0$ равносильно неравенству $V_1\geqslant V_0^{\frac{n-1}{n}}V_n^{\frac{1}{n}}$ или $V_1^n\geqslant V_0^{n-1}V_n$, что в принятых нами обозначениях и есть неравенство Минковского. Знак равенства стоит в нём тогда, когда $f'(0)=0$, т. е. когда H_0 и H_1 гомотетичны.

Докажем теперь, что и обратно, *неравенство Брунна следует из неравенства Минковского.*

Из предыдущего вывода ясно, что неравенство Минковского эквивалентно условию $f'(0)\geqslant 0$, где функция $f(t)$ есть разность обеих частей неравенства Брунна. Это условие означает, что график функции $\sqrt[n]{V(H_t)}$ хотя бы в начальной точке идёт над хордой. Но в силу формулы (8) при любых $t_1<t_2$ тело H_t с $t_1<t<t_2$ представимо как комбинация тел H_{t_1}, H_{t_2} с коэффициентами, в сумме равными единице

и, следовательно, имеющими вид $1-s$, s. Поэтому всякое t_1 может играть роль начальной точки $s=0$, т. е. предыдущее замечание оказывается применимым в любой точке графика функции $\sqrt[n]{V(H_t)}$, если воспользоваться неравенством Минковского для тел H_{t_1}, H_{t_2}. Следовательно, график функции $\sqrt[n]{V(H_t)}$ всюду идёт над хордой. А в этом и состоит неравенство Брунна.

Если в неравенстве Минковского (9) именно для тел H_0, H_1 стоит знак равенства, то $f'(0)=0$ и тогда ввиду выпуклости графика функции $\sqrt[n]{V(H_t)}$ он неизбежно сводится к отрезку, т. е. и в неравенстве Брунна стоит знак равенства.

В § 2 неравенство Минковского было доказано для трёхмерных многогранников. Теперь в силу полученного результата мы можем вывести отсюда неравенство Брунна для этих многогранников, а очевидным предельным переходом и для любых трёхмерных выпуклых тел. Однако условие о знаке равенства не может быть доказано предельным переходом.

6. Теперь выясним ещё связь между неравенством Минковского и его же теоремой о равенстве многогранников с равновеликими гранями.

В § 2 мы получили неравенство Минковского для трёхмерных многогранников, пользуясь простыми соображениями о максимуме и существенно используя названную теорему о равенстве многогранников. Легко видеть, что все приведённые там выводы применимы в пространстве любого числа измерений. Это позволяет утверждать, что *неравенство Минковского для n-мерных многогранников (вместе с условием обращения его в равенство) вытекает из теоремы о равенстве n-мерных многогранников с параллельными и равновеликими гранями.*

Покажем, что и обратно, *последняя теорема следует из неравенства Минковского и условия обращения его в равенство.*

Пусть многогранники P^0, P^1 имеют соответственно параллельные и равновеликие грани, так что

$$F_i^0 = F_i^1.$$

Тогда для смешанного объёма $V(P^0\,P^1\ldots P^1)$ имеем (теорема 2)

$$V(P^0\,P^1\ldots P^1)=\frac{1}{n}\sum_i h_i^0F_i^1=\frac{1}{n}\sum_i h_i^0F_i^0=V(P^0\ldots P^0). \tag{10}$$

По неравенству Минковского

$$V^n(P^0\,P^1\ldots P^1)\geqslant V(P^0\ldots P^0)\,V^{n-1}(P^1\ldots P^1), \tag{11}$$

а отсюда вследствие (10)

$$V(P^0\ldots P^0)\geqslant V(P^1\ldots P^1). \tag{12}$$

Но, меняя ролями P^0 и P^1, мы точно так же получим, что $V(P^1\ldots P^1)\geqslant$ $\geqslant V(P^0\ldots P^0)$.

Следовательно,

$$V(P^0\ldots P^0)=V(P^1\ldots P^1).$$

А тогда, как ясно из вывода неравенства (12), знак равенства должен стоять также в неравенстве Минковского (11). Поэтому многогранники P^0, P^1 должны быть гомотетичны. Но так как к тому же площади их граней равны, то P^0 и P^1 равны и параллельно расположены.

Итак, неравенство Брунна через неравенство Минковского ведёт к теореме о равенстве многогранников с равновеликими параллельными гранями *). Через то же неравенство Минковского оно приводит к максимальному свойству многогранников, описанных около шара, как показано в § 2. Остаётся доказать неравенство Брунна.

7. Доказательство теоремы 3 — неравенства Брунна с дополнением Минковского — короче всего вести индукцией по числу измерений. В одномерном пространстве, т. е. на прямой, теорема тривиальна: здесь неравенство всегда сводится к равенству, которое очевидно из самого определения линейной комбинации отрезков.

Допустим, что теорема верна в $(n-1)$-мерном пространстве, и докажем её для n-мерного пространства. Для этого покажем сначала, что достаточно доказать следующее:

Теорема 3*. *Если выпуклые тела H_0, H_1 имеют равные объёмы, то при любом $t>0$ и <1 тело $H_t=(1-t)H_0+tH_1$ имеет больший объём, кроме того случая, когда тела H_0 и H_1 равны и параллельно расположены, так что H_t также равно им.*

Покажем, что общая формулировка теоремы 3 вытекает из этой частной. Пусть H_0 и H_1 — любые выпуклые тела; тогда тела

$$K_0=\frac{1}{\sqrt[n]{V_0}}H_0 \text{ и } K_1=\frac{1}{\sqrt[n]{V_1}}H_1$$

имеют объём, равный единице. Поэтому согласно частной формулировке теоремы Брунна должно быть

$$V(K_s)\geqslant 1, \tag{13}$$

где $K_s=(1-s)K_0+sK_1$, $0<s<1$. Положим

$$s=\frac{tV_1^{\frac{1}{n}}}{(1-t)V_0^{\frac{1}{n}}+tV_1^{\frac{1}{n}}}.$$

---

*) Аналогично доказывается приведённая в § 6 гл. VI общая теорема о равенстве выпуклых тел с равными поверхностными функциями. Если $F_i(M)$ — поверхностная функция тела H_i, то, аналогично теореме 2, $V(H_0\, H_1\ldots H_1)=\frac{1}{n}\int h_0(n)F_1(dM)$. Поэтому из равенства $F_0(M)=F_1(M)$ следует равенство $V_0(H_0\, H_1\ldots H_1)=V(H_0\ldots H_0)$, а в силу неравенства Минковского $V(H_0\ldots H_0)\geqslant V(H_1\ldots H_1)$, и повторяется то же рассуждение, что для многогранников.

Тогда

$$K_s = \frac{(1-t)H_0 + tH_1}{(1-t)V_0^{\frac{1}{n}} + tV_1^{\frac{1}{n}}} = \frac{H_t}{(1-t)V_0^{\frac{1}{n}} + tV_1^{\frac{1}{n}}}.$$

Поэтому (13) равносильно тому, что

$$V(H_t) \geqslant [(1-t)V_0^{\frac{1}{n}} + tV_1^{\frac{1}{n}}]^n,$$

а это и есть общее неравенство Брунна. При этом знак равенства стоит здесь только тогда, когда он стоит в (13), т. е. когда K_0 и K_1 равны и параллельны, а значит, H_0 и H_1 гомотетичны.

8. Теперь, предполагая, что теорема 3 верна для $(n-1)$-мерных тел, докажем для n-мерных тел теорему 3*.

Пусть H_0, H_1 — выпуклые тела в n-мерном пространстве, имеющие равные объёмы; будем считать эти объёмы равными единице. Проведём какую-либо плоскость T и перенесём тела H_0, H_1 так, чтобы плоскость T стала опорной к ним обоим. (Это не меняет объёма тела $(1-t)H_0 + tH_1$.) Введём переменную v, $0 \leqslant v \leqslant 1$, и будем сопоставлять друг другу сечения тел H_0, H_1 плоскостями, параллельными T и отсекающими от тел H_0, H_1 равные объёмы v. Расстояния этих сечений G_0, G_1 тел H_0, H_1 от плоскости T будут функциями от v. Мы их обозначим $x_0(v)$, $x_1(v)$. Площади сечений обозначим $F_0(v)$, $F_1(v)$. Из того, что v есть объём, отсекаемый соответственно G_0 и G_1, следует, что $F_0 dx_0 = dv$, $F_1 dx_1 = dv$ и, следовательно,

$$\frac{dx_0}{dv} = \frac{1}{F_0}, \quad \frac{dx_1}{dv} = \frac{1}{F_1}. \tag{14}$$

Линейная комбинация сечений G_0, G_1:

$$G_t = (1-t)G_0 + tG_1,$$

очевидно, содержится в теле H_t. Она будет лежать в плоскости, параллельной основной плоскости T, на расстоянии $x_t(v)$ от неё, причём

$$x_t(v) = (1-t)x_0(v) + tx_1(v). \tag{15}$$

Если $F_t(v)$ — площадь фигуры G_t, то для объёма тела H_t имеем неравенство

$$V(H_t) \geqslant \int_0^1 F_t(v)\, dx_t(v) = \int_0^1 F_t(v)\, x_t'(v)\, dv. \tag{16}$$

По предположению индукции неравенство Брунна применимо к сечениям G_0, G_1 и потому

$$F_t(v) \geqslant [(1-t)F_0^{\frac{1}{n-1}}(v) + tF_1^{\frac{1}{n-1}}(v)]^{n-1}. \tag{17}$$

Кроме того, в силу формул (14) и (15)

$$\frac{dx_t}{dv}=\frac{1-t}{F_0}+\frac{t}{F_1}. \tag{18}$$

На основании (17), (18) из (16) получаем, что

$$V(H_t)\geqslant\int_0^1 [(1-t)\,F_0^{\frac{1}{n-1}}+t\,F_1^{\frac{1}{n-1}}]^{n-1}\left[\frac{1-t}{F_0}+\frac{t}{F_1}\right]dv. \tag{19}$$

Покажем, что подинтегральная функция всегда $\geqslant 1$, т. е. при любых F_0, $F_1>0$ и при $0<t<1$

$$[(1-t)\,F_0^{\frac{1}{n-1}}+t\,F_1^{\frac{1}{n-1}}]^{n-1}\left[\frac{1-t}{F_0}+\frac{t}{F_1}\right]\geqslant 1, \tag{20}$$

причём равенство имеет место, лишь если $F_0=F_1$.

Деля и умножая на F_0 и полагая $\frac{F_1}{F_0}=\xi$, получим, что левая часть этого неравенства есть

$$f(\xi)=[1-t+t\xi^{\frac{1}{n-1}}]^{n-1}\left(1-t+\frac{t}{\xi}\right).$$

При $\xi=0$ и при $\xi=\infty$ $f(\xi)=\infty$. Поэтому при $\xi>0$ $f(\xi)$ имеет минимум. Вычисляя производную, получаем

$$f'(\xi)=\frac{t\,(1-t)}{\xi^2}\left(1-t+t\xi^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-2}\left(\xi^{\frac{n}{n-1}}-1\right),$$

так что при $0<t<1$ и $\xi>0$ производная обращается в нуль лишь при $\xi=1$. Этому значению ξ, следовательно, и отвечает минимум $f(\xi)$, равный $f(1)=1$. Поэтому $f(\xi)\geqslant 1$, причём $f(\xi)=1$, лишь если $\xi=1$. А это и есть неравенство (20) с сопровождающим его условием.

Из этого неравенства следует, что интеграл (19) не меньше единицы и тем самым $V(H_t)\geqslant 1$, а это и требовалось доказать.

Покажем теперь, что $V(H_t)=1$ лишь тогда, когда тела H_0, H_1 равны и параллельно расположены.

Для этого проследим цепь неравенств, приведшую нас к тому, что $V(H_t)\geqslant 1$. Если $V(H_t)=1$, то в каждом из них должен стоять знак равенства. Поэтому должно быть $f(\xi)=1$, т. е. $\xi=1$, или, иными словами,

$$F_0(v)=F_1(v). \tag{21}$$

Но тогда из формул (14) при условии $x_0(0)=x_1(0)=0$ (т. е. при условии, что тела H_0 и H_1 упираются в одну и ту же плоскость T) вытекает, что

$$x_0(v)=x_1(v), \tag{22}$$

т. е. плоскости, отсекающие от тел H_0, H_1 равные объёмы, совпадают.

Отсюда следует, что центры тяжести обоих тел находятся на одной высоте над плоскостью T *). Поэтому, перенося тело H_0 так, чтобы центры тяжести обоих тел совпали, мы оставим плоскость T опорной к обоим.

Но плоскость T была выбрана произвольно! Поэтому, когда центры тяжести совпадают, то и все опорные плоскости тел H_0, H_1 должны совпадать, а значит, совпадают и сами эти тела. Следовательно, до переноса они были равными и параллельно расположенными.

Итак, теорема Брунна с дополнением Минковского доказана. Тем самым доказаны неравенство Минковского, теорема о равенстве многогранников с одинаковыми площадями и направлениями граней, а также максимальное свойство многогранника, описанного около шара, причём всё это теперь уже в n-мерном пространстве.

9. Выведем ещё общее выражение для смешанного объёма нескольких многогранников, аналогичное выражению (5) для смешанного объёма $V(P^0 P^1 \ldots \ldots P^1)$.

Теорема 4. *Пусть $P^1, \ldots, P^n$ — выпуклые многогранники и $V(P^1, P^2, \ldots \ldots, P^n)$ — их смешанный объём, т. е. делённый на $n!$ коэффициент при произведении $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ в выражении объёма многогранника $P = \lambda_1 P^1 + \ldots + \lambda_n P^n$. Пусть $Q_i^1, Q_i^2, \ldots, Q_i^n$ — грани многогранников $P^1, \ldots, P^n$, дающие в своей комбинации $(n-1)$-мерную грань $Q_i = \lambda_1 Q_i^1 + \ldots + \lambda_n Q_i^n$ многогранника P. Тогда, если $F(Q_i^2 \ldots Q_i^n)$ обозначает смешанную площадь (смешанный $(n-1)$-мерный объём) граней $Q_i^2, \ldots, Q_i^n$, то*

$$V(P^1 \ldots P^n) = \frac{1}{n} \sum_i h_i^1 F(Q_i^2 \ldots Q_i^n). \tag{23}$$

Положим $\lambda_2 P^2 + \ldots + \lambda_n P^n = P^*$; тогда $P = \lambda_1 P^1 + P^*$ и

$$V(P) = V(P^* \ldots P^*) + n\lambda_1 V(P^1 P^* \ldots P^*) + \ldots \tag{24}$$

По теореме 2

$$V(P^1 P^* \ldots P^*) = \frac{1}{n} \sum h_i^1 F(Q_i^* \ldots Q_i^*),$$

а так как грань Q_i^* есть линейная комбинация граней $Q_i^2, \ldots, Q_i^n$, то

$$V(P^1 P^* \ldots P^*) = \sum_{j_1, \ldots, j_{n-1}=2}^{n} \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_{n-1}} \frac{1}{n} \sum_i h_i^1 F(Q_i^{j_1} \ldots Q_i^{j_{n-1}}). \tag{25}$$

Делённый на $(n-1)!$ коэффициент при произведении $\lambda_2 \ldots \lambda_n$ будет здесь равен

$$\frac{1}{n} \sum_i h_i^1 F(Q_i^2 \ldots Q_i^n).$$

Но вследствие (24) это же будет делённый на $n!$ коэффициент в многочлене

---

*) Это очевидно из формулы $X = \frac{1}{V} \int x F dx$ для координаты центра тяжести.

$V(P)=\sum \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \ldots \lambda_{j_n} V(P^{j_1} \ldots P^{j_n})$ при произведении $\lambda_1 \ldots \lambda_n$. Тем самым формула (23) доказана.

В частности, некоторые из многогранников P^j могут совпадать, так что формула (23) применима в любом случае. Так, для простейшего смешанного объёма $V(P^0 P^1 \ldots P^1)$ получаем выражения

$$V(P^0 P^1 \ldots P^1)=\frac{1}{n}\sum_i h_i^0\, F(Q_i^1 \ldots Q_i^1)=\frac{1}{n}\sum_i h_i^1\, F(Q_i^0\, Q_i^1 \ldots Q_i^1). \tag{26}$$

10. «Теория смешанных объёмов» была построена Минковским в его работе «Volumen und Oberfläche» (см. H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2). Там содержатся, помимо изложенных нами результатов, ещё другие неравенства между смешанными объёмами и их применения к экстремальным задачам теории выпуклых тел, а также к теоремам единственности выпуклых тел с данными функциями кривизны.

Разнообразие и оригинальность устанавливаемых здесь связей между отдельными трудными задачами делают эту теорию смешанных объёмов одной из интереснейших глав геометрии. Обзор её результатов, полученных до 1934 г., дан в книге Bonnesen und Fenchel, Theorie der konvexen Körper (Springer, 1934). Дальнейшее развитие теории осуществлено в моей работе «К теории смешанных объёмов выпуклых тел», опубликованной в четырёх частях в Математическом сборнике, т. 2, вып. 5 и 6 (1937), т. 3, вып. 1 и 2 (1938). (Одновременно часть тех же результатов была получена Фенхелем.) Работы в плане этой теории время от времени появляются и теперь.

В § 3 главы XI будет изложено применение теории смешанных объёмов к доказательству теорем о жёсткости многогранников.

ГЛАВА IX

МНОГОГРАННИКИ С ВЕРШИНАМИ НА ДАННЫХ ЛУЧАХ

§ 1. Замкнутые многогранники

1. Мы будем рассматривать замкнутые выпуклые многогранники, содержащие внутри данную точку O и такие, что все их вершины лежат на данных лучах $e_1, \ldots, e_n$, исходящих из O, по одной вершине на каждом луче. Для того чтобы при данных O и $e_1, \ldots, e_n$ такие многогранники существовали, необходимо и достаточно, чтобы лучи $e_1, \ldots, e_n$ не были направлены в одно (замкнутое) полупространство.

Действительно, если все лучи e_i идут в полупространство, ограниченное плоскостью Q, проходящей через точку O, то и многогранник с вершинами на этих лучах оказывается с одной стороны от плоскости Q, так что точка O не лежит внутри него. Если же лучи e_i не идут в одно полупространство, то, взяв на них точки A_i на равных расстояниях от O и построив выпуклую оболочку, совокупности этих точек, получим многогранник P с вершинами A_i, вписанный в шар. Точка O будет лежать внутри него, потому что иначе через неё проходила бы плоскость, ограничивающая полупространство, содержащее в себе многогранник P. В это полупространство были бы тогда направлены все лучи e_i, вопреки условию.

В связи с этим замечанием мы будем неизменно предполагать, что данные лучи $e_1, \ldots, e_n$ не идут в одно полупространство.

2. Если лучи e_i заданы, то многогранник P полностью определяется расстояниями r_i его вершин от точки O. Эти числа r_i не могут быть произвольными; для того чтобы точка A_k на луче e_k была вершиной многогранника P, необходимо и достаточно, чтобы она не лежала в выпуклой оболочке совокупности остальных точек A_i. Это требование налагает определённые условия, которым должны удовлетворять числа r_i. Для вывода этих условий будем считать, что $e_1, \ldots, e_n$ обозначают не только сами лучи, но и единичные векторы, указывающие их направления. Данную точку O мы считаем началом координат.

Теорема 1. *Для того чтобы данные положительные числа $r_1, \ldots, r_n$ могли служить расстояниями вершин выпуклого много-*

гранника, лежащих на данных лучах $e_1, \ldots, e_n$ *от начала координат, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: если*

$$e_k = a_{ki_1}e_{i_1} + a_{ki_2}e_{i_2} + a_{ki_3}e_{i_3} \tag{1}$$

есть разложение одного из векторов e_i *по трём другим с неотрицательными коэффициентами, то имеет место неравенство*

$$\frac{1}{r_k} < \frac{a_{ki_1}}{r_{i_1}} + \frac{a_{ki_2}}{r_{i_2}} + \frac{a_{ki_3}}{r_{i_3}}. \tag{2}$$

Необходимость. Пусть многогранник P имеет все вершины $A_1, \ldots, A_n$ на лучах $e_1, \ldots, e_n$. Если $r_1, \ldots, r_n$ суть расстояния вершин от начала O, то векторы $\overrightarrow{OA_i}$ равны r_ie_i. Пусть для вектора e_k имеет место разложение (1) с неотрицательными коэффициентами a. Это означает, что луч e_k проходит в трёхгранном угле, натянутом на лучи $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}$.

Если точка A_k на луче e_k действительно является вершиной многогранника P, то она отделяется от начала плоскостью Q, проходящей через точки $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$. Поэтому если

$$nx = p \tag{3}$$

есть уравнение плоскости Q в нормальной форме, то для вектора $\overrightarrow{OA_k} = r_ke_k$ имеем

$$ne_kr_k > p. \tag{4}$$

Подставляя сюда вместо e_k его разложение (1), получим

$$a_{ki_1}(e_{i_1}n) + a_{ki_2}(e_{i_2}n) + a_{ki_3}(e_{i_3}n) > \frac{p}{r_k}. \tag{5}$$

Так как точка A_{i_j} лежит на плоскости Q, то вектор $\overrightarrow{OA_{i_j}} = r_{i_j}e_{i_j}$ удовлетворяет уравнению (3). Поэтому

$$(ne_{i_j})r_{i_j} = p, \quad \text{или} \quad ne_{i_j} = \frac{p}{r_{i_j}}. \tag{6}$$

Подставляя эти выражения скалярных произведений ne_{i_j} в неравенство (5) и сокращая на p, получим неравенство (2).

Достаточность. Пусть положительные числа $r_1, \ldots, r_n$ удовлетворяют условию теоремы. Взяв точки $A_1, \ldots, A_n$ на лучах $e_1, \ldots, e_n$ и построив выпуклую оболочку совокупности этих точек, получим многогранник P. Допустим, однако, что, например, точка A_1 не будет его вершиной. Тогда она лежит в выпуклой оболочке совокупности остальных точек $A_2, \ldots, A_n$.

Пусть $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ $(k \leqslant n-1)$ — вершины многогранника P. Так как по условию лучи e_i не идут в одно полупространство, то точка O лежит внутри многогранника P и потому он может быть разложен на тетраэдры с общей вершиной O и с остальными вершинами в точках $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$. Точка A_1 оказывается в одном из этих тетраэдров, например в тетраэдре $OA_2A_3A_4$. Тогда она лежит по ту же сторону от плоскости его основания $A_2A_3A_4$, что и точка O, а потому для вектора $\overrightarrow{OA_1}=r_1e_1$ имеет место неравенство, обратное (4), т. е.

$$ne_1r_1 \leqslant p. \tag{7}$$

Вместе с тем луч e_1 оказывается в трёхмерном угле, натянутом на лучи e_2, e_3, e_4, а потому его вектор e_1 разлагается по векторам e_2, e_3, e_4 с неотрицательными коэффициентами. Поэтому, применяя предыдущий вывод, исходя из неравенства (7), мы придём к неравенству, обратному (2), что противоречит условию. Следовательно, точка A_1 не может лежать в выпуклой оболочке совокупности остальных точек A_i и тем самым является вершиной многогранника P.

Доказанная таким образом теорема 1 выясняет, между прочим, строение многообразия замкнутых выпуклых многогранников с вершинами на данных лучах. Именно, рассмотрим n-мерное пространство, в котором за координаты примем числа $x_i=\frac{1}{r_i}$, обратные расстояниям вершин от начала O. Тогда неравенства (2) оказываются линейными и вместе с условиями положительности $x_i>0$ определяют в этом пространстве выпуклый многогранный угол с вершиной в начале координат. Каждой точке внутри него отвечает определённый многогранник. Подобным многогранникам с центром подобия в O отвечают точки на одной полупрямой, исходящей из начала в нашем n-мерном многогранном угле.

3. Нашей задачей является выяснить, в какой мере многогранник с вершинами на данных лучах определяется кривизнами своих вершин и какие значения можно заранее приписать этим кривизнам для того, чтобы соответствующий многогранник заведомо существовал. Кривизна вершины есть 2π минус сумма плоских углов, сходящихся в ней, и она равна также площади сферического изображения вершины (§ 5 гл. I). Поэтому у подобных многогранников кривизны соответственных вершин равны. Оказывается, что и обратно, из равенства кривизн вытекает подобие многогранников с вершинами на данных лучах. Это есть частный случай следующей теоремы:

Теорема 2. *Пусть вершины замкнутых выпуклых многогранников P и P' лежат на одних и тех же лучах, исходящих из точки O, лежащей внутри этих многогранников. Тогда либо эти многогранники подобны (с центром подобия O), либо на каждом из них есть такая вершина, что многогранный угол при этой вершине может быть путём параллельного переноса помещён внутри многогранного угла при соответственной вершине другого многогранника.* (При этом мы считаем, что многогранный угол V_1 помещается внутри угла V_2, если вершины их совпадают, и V_2 содержит V_1, но не совпадает с ним. Многогранный угол рассматривается, как всегда, с неопределённо продолженными гранями.)

Можно сказать и иначе: *если у многогранников P и P' многогранные углы при соответственных вершинах непомещаемы один внутри другого, то многогранники подобны.*

Ввиду простой взаимосвязи между многогранным углом и его сферическим изображением эту теорему можно формулировать, говоря о возможности поместить сферическое изображение одной вершины в сферическом изображении другой. (Увеличению угла отвечает, очевидно, уменьшение сферического изображения.)

Так как сумма плоских углов объемлющего многогранного угла V_2 больше, чем у объемлемого V_1, а кривизна соответственно меньше, то из равенства кривизн соответственных вершин многогранников P и P' сразу следует, что для них условие теоремы 2 о непомещаемости многогранных углов одного в другой выполнено. Следовательно, подобие многогранников P и P' с равными кривизнами вершин действительно является лишь частным случаем теоремы 2.

Доказательство теоремы 2 чрезвычайно просто и было уже проведено в § 5 главы II. Напомним его. Пусть многогранники P и P' содержат точку O внутри и имеют вершины на одних и тех же лучах e_i, исходящих из O. При подобном преобразовании многогранника P' эти условия не нарушаются и многогранные углы его не меняются (а лишь передвигаются параллельно), и потому мы можем подвергать многогранник P' любому такому преобразованию. Сожмём его к точке O настолько, чтобы он оказался целиком внутри многогранника P, а потом будем его непрерывно подобно увеличивать до тех пор, пока одна из его вершин не совпадёт впервые с соответствующей вершиной многогранника P. Так как при этом все вершины остаются всё же в телесном многограннике P, то и сам P' остаётся в P, поскольку P' есть выпуклая оболочка совокупности своих вершин.

Если при этом многогранник P' совпадёт с P, то, значит, до преобразования он был подобен P, что соответствует первой возможности, указанной в теореме. Поэтому допустим, что многогранник P' не совпадает с P, но лишь кое-где касается его, а в остальном лежит внутри P.

Если многогранник P' заключён в P, а вершина A' на P' совпала с вершиной A на P, то многогранный угол V' при вершине A' многогранника P' оказывается заключённым в многогранном угле V при вершине A многогранника P.

Если при этом углы V и V' не совпадают, то мы уже нашли у многогранника P' угол, помещаемый внутри соответствующего угла многогранника P. Если же углы V и V' совпадают, то совпадают их рёбра и, следовательно, совпадают также вершины многогранников P и P', служащие концами этих рёбер, потому что по условию эти вершины лежат ещё на одних и тех же лучах, исходящих из точки O. Для этих вершин мы можем повторить то же рассуждение и т. д., до тех пор, пока не дойдём до некоторой пары совпавших вершин E, E', многогранные углы при которых не совпадают: иначе все вершины многогранников P и P' оказались бы совпавшими, вопреки сделанному предположению.

Таким образом, предполагая, что многогранники P и P' не подобны, мы найдём у них такую пару соответственных вершин, что многогранный угол при вершине многогранника P' помещается внутри многогранного угла при вершине многогранника P. Теорема доказана.

Из теоремы 2, очевидно, вытекает следующий результат.

Будем говорить, что $f(V)$ есть монотонная функция выпуклого многогранного угла, если для равных и параллельных углов V и V' $f(V)=f(V')$, а когда угол V содержится внутри V', то $f(V)<f(V')$.

Теорема 3. *Если у двух многогранников с вершинами на данных лучах для каждой пары соответственных вершин какие-либо монотонные функции многогранных углов при них равны, то многогранники подобны.*

Действительно, из условия монотонности следует, что соответственные многогранные углы непомещаемы один в другом, а потому в силу теоремы 2 многогранники должны быть подобными.

Здесь для каждой пары соответственных вершин можно брать свою монотонную функцию. Кроме суммы плоских углов (или кривизны), примером монотонной функции может служить площадь сферического многоугольника, вырезаемого многогранным углом на единичной сфере с центром в вершине угла.

4. Вопрос о допустимых значениях кривизн вершин многогранника с вершинами на данных лучах решается следующей теоремой:

Теорема 4. *Пусть из точки O исходят лучи $e_1, \ldots, e_n$, не направленные в одно полупространство. Пусть $\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ — кривизна многогранного угла, являющегося границей выпуклой оболочки совокупности лучей $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}$.*

Если имеется замкнутый выпуклый многогранник с вершинами на лучах e_i, то кривизны ω_i его вершин удовлетворяют неравенству

$$\sum \omega_i > \sigma_{i_1 i_2 \ldots i_m}, \tag{8}$$

где сумма берётся по всем лучам, не попавшим в выпуклую оболочку совокупности лучей $e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}$, и так для всех возможных совокупностей лучей $e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}$, выбранных из данных).*

Обратно, если даны положительные числа ω_i, удовлетворяющие всем неравенствам (1) и такие, что их сумма равна 4π, то существует замкнутый выпуклый многогранник, вершины которого лежат на данных лучах и вершина на каждом луче e_i имеет кривизну ω_i.

*) С условием, что лучи $e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}$ идут внутрь одного полупространства, потому что иначе неравенство (8) тривиально или бессмысленно (если выпуклая оболочка совокупности этих лучей есть всё пространство).

Так как условия, что все ω_i положительны и в сумме дают 4π, очевидно, необходимы, то теорема утверждает, что эти два условия вместе со всеми неравенствами (8) необходимы и достаточны для существования многогранника с данными кривизнами вершин ω_i.

Необходимость неравенств (8) была доказана в § 5 главы II; напомним это доказательство.

Пусть имеем многогранник P с вершинами на данных лучах e_i. Берём лучи $e_{k_1}, \ldots, e_{k_m}$, идущие в одно полупространство, и строим их выпуклую оболочку V. Это будет телесный угол с вершиной в точке O. Пусть лучи $e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}$, а соответственно и вершины $A_{j_1}, \ldots, A_{j_p}$ оказываются вне V.

Плоскость, опорная к V, пересекает многогранник P, а при движении от точки O она становится в некоторый момент опорной к многограннику P в какой-то его вершине, не попавшей в V. Следовательно, всякая опорная плоскость к V имеет параллельную ей опорную плоскость к P в одной из вершин $A_{j_1}, \ldots, A_{j_p}$. Кроме того, в этих вершинах имеются и другие опорные плоскости, например плоскости граней, пересекающие V. Это означает, что сферическое изображение совокупности вершин $A_{j_1}, \ldots, A_{j_p}$ больше сферического изображения угла V, т. е. имеет место неравенство (8).

5. Теперь докажем, что при выполнении всех условий теоремы многогранник с данными кривизнами ω_i существует. Для этого воспользуемся леммой об отображении (§ 2 гл. II).

Рассмотрим все замкнутые выпуклые многогранники с вершинами на данных лучах $e_1, \ldots, e_n$. Пусть r_i означает расстояние вершины на i-м луче от начала O. Как выяснено в конце n° 2, в n-мерном пространстве с координатами $x_i = \frac{1}{r_i}$ совокупность всех рассматриваемых многогранников изображается выпуклым телесным углом с вершиной в точке $(O, \ldots, O)$. Классу подобных многогранников отвечает луч, идущий внутри этого угла из его вершины. Поэтому множество всех классов подобных многогранников можно изобразить той частью единичной сферы с центром в точке $(O, \ldots, O)$, какую вырезает указанный телесный угол. Эта $(n-1)$-мерная сферическая область представляет собой многообразие $\boldsymbol{P}$ классов подобных многогранников.

Пусть $\boldsymbol{K}$ — многообразие совокупностей K по n положительных чисел $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ с суммой, равной 4π, удовлетворяющих неравенствам (8). В n-мерном пространстве с координатами $\omega_1, \ldots, \omega_n$ линейные неравенства (8) вместе с неравенствами $\omega_i > 0$ ограничивают выпуклое множество; пересечение этого множества с плоскостью $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 4\pi$ и даёт многообразие $\boldsymbol{K}$. Это многообразие, следовательно, $(n-1)$-мерно и связно.

Каждый из рассматриваемых многогранников имеет кривизны вершин, удовлетворяющие условиям, определяющим многообразие $\boldsymbol{K}$. Подобные многогранники имеют одинаковые кривизны. В силу этого многообразие $\boldsymbol{P}$ однозначно отображается в многообразие $\boldsymbol{K}$.

Это отображение φ взаимно однозначно, так как по доказанному в n° 3 многогранники с равными кривизнами подобны. Это отображение очевидным образом также и непрерывно. Так как многообразие $\boldsymbol{K}$ связно и имеет ту же размерность, что $\boldsymbol{P}$, то остаётся ещё проверить только выполнение последнего условия леммы об отображении.

Пусть последовательность $K_1, K_2, \ldots$ сходится к точке K, причём $K_i = \varphi(P_i)$, т. е. точки K_i из $\boldsymbol{K}$ суть образы точек P_i из $\boldsymbol{P}$. Нужно доказать, что существует сходящаяся подпоследовательность P_{i_j}, предел которой P отображается в K: $P_{i_j} \to P$, $\varphi(P) = K$.

Так как многообразие $\boldsymbol{P}$ есть область на $(n-1)$-мерной сфере, то из последовательности P_i заведомо можно выбрать сходящуюся последовательность. Однако предельная точка P_0 такой последовательности P_{i_j} могла бы лежать не в самой области $\boldsymbol{P}$, а на её границе. Покажем, что этого не может быть.

Каждая точка из $\boldsymbol{P}$ представляет многогранник, у которого расстояния вершин от начала подчинены условию

$$\sum x_i^2 = \sum \frac{1}{r_i^2} = 1.$$

Поэтому точка на границе $\boldsymbol{P}$ также представляет выпуклый многогранник с тем же условием, но с некоторыми «координатами» $x_i = \frac{1}{r_i}$, быть может, равными нулю. Такой многогранник P_0 оказывается бесконечным, и выпуклая оболочка совокупности тех лучей e_i, которым отвечают расстояния $r_i = \infty$ $\left(x_i = \frac{1}{r_i} = 0\right)$, есть не что иное, как его предельный угол V. Действительно, пусть $r_1, \ldots, r_m$ конечны, а $r_{m+1}, \ldots, r_n$ стремятся к бесконечности. Многогранник P при всех конечных r_i есть, очевидно, выпуклая оболочка совокупности вершин, лежащих на лучах $e_1, \ldots, e_m$, и многогранника R, являющегося выпуклой оболочкой множества, образованного точкой O и вершинами, лежащими на лучах $e_{m+1}, \ldots, e_n$. Когда эти последние вершины удаляются в бесконечность, многогранник R сходится к многогранному углу V — выпуклой оболочке совокупности лучей $e_{m+1}, \ldots, e_n$. Поэтому многогранник P сходится к выпуклой оболочке совокупности вершин, лежащих на лучах $e_1, \ldots, e_m$, и угла V. Следовательно, этот угол V и будет предельным углом предельного многогранника P_0.

Кривизна многогранника P_0 равна кривизне его предельного угла V, т. е. сумма кривизн его вершин $A_1, \ldots, A_m$ равна кривизне выпуклой оболочки совокупности лучей $e_{m+1}, \ldots, e_n$. В наших обозначениях это запишется равенством

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_i = \sigma_{m+1, \ldots, n}. \qquad (9)$$

Однако когда многогранники P_i сходятся, кривизны их вершин сходятся к кривизнам вершин предельного многогранника P_0. По условию же кривизны вершин многогранников P_{i_j} сходятся к совокупности чисел ω, принадлежащей многообразию $\boldsymbol{K}$, т. е. для предельных значений чисел ω выполняются все неравенства (8).

Следовательно, равенство (9) невозможно, и тем самым многогранник P_0 не может быть бесконечным.

Итак, подпоследовательность многогранников P_{i_j} сходится к конечному многограннику P_0 с предельными значениями кривизн вершин. Таким образом, многограннику P_0 отвечает как раз предельная совокупность K_0 чисел ω; это означает, что

$$\varphi(P_0) = K_0.$$

Этим доказано, что отображение φ удовлетворяет также последнему условию леммы об отображении. И раз все её условия удовлетворены, то верен и её результат: многообразие $\boldsymbol{P}$ отображается на всё многообразие $\boldsymbol{K}$, т. е. каждой допустимой по условиям теоремы совокупности значений чисел ω отвечает класс подобных многогранников. Таким образом, существование многогранника с данными значениями кривизн доказано.

6. Для многогранников с границей могут быть установлены разные теоремы, аналогичные теоремам 2—4. Приведём две самые простые из них.

Пусть на плоскости T дан конечный выпуклый многоугольник Q, внутри которого отмечены точки $A_1, \ldots, A_m$. Пусть в пространстве задана замкнутая ломаная L, проектирующаяся на границу многоугольника Q. Рассматриваем выпуклые многогранники, обладающие следующими свойствами: 1) они ограничены ломаной L; 2) имеют вершины, проектирующиеся в точки A_i, и не имеют никаких других внутренних вершин; 3) они обращены выпуклостью в одну сторону (скажем, к плоскости T или от неё).

О таких многогранниках можно утверждать:

Теорема 5. *У двух таких многогранников (если они не совпадают) всегда есть пара соответственных вершин, многогранные углы при которых могут быть помещены один внутри другого путём параллельного переноса.*

Действительно, пусть P_1 и P_2 — два таких многогранника, причём P_1 имеет точки, лежащие «ниже» точек P_2 с той же проекцией на плоскость T (которую мы мыслим горизонтальной). Тогда, «поднимая» многогранник P_1, приведём его в такое положение, что он будет ещё где-либо касаться P_2, но в остальном будет лежать «выше» P_2. При таком положении очевидно, что на P_1 есть вершина, угол при которой лежит внутри угла при соответствующей вершине многогранника P_2, и теорема доказана.

Теорема 6. *Для всяких положительных чисел $\omega_1, \ldots, \omega_m$, сумма которых меньше 2π, существует и притом единственный такой выпуклый многогранник указанного выше типа, у которого числа ω_i суть кривизны вершин: именно, ω_i есть кривизна вершины, проектирующейся в точку A_i.*

Единственность указанного многогранника следует из теоремы 5. Существование получается сразу на основе леммы об отображении. Действительно, рассмотрим m-мерное многообразие K, точками которого будут совокупности положительных чисел $\omega_1, \ldots, \omega_m$, с условием, что сумма их меньше 2π. Пусть, далее, P — многообразие многогранников рассматриваемого типа; оно также m-мерно (и, как легко доказать, не пусто). Мы имеем естественное отображение многообразия P в K, и легко доказать, что оно удовлетворяет всем условиям леммы об отображении. В результате теорема 6 оказывается доказанной. (Детальное осуществление намеченного рассуждения мы оставляем читателю.)

В теоремах 5, 6 речь идёт о многогранниках, вершины которых лежат на параллельных лучах, проходящих через точки $A_1, \ldots, A_m$ перпендикулярно к плоскости T; такие лучи «пересекаются в бесконечно удалённой точке». Совершенно аналогично можно рассматривать многогранники с вершинами на данных лучах, исходящих из данной точки O. Тогда точно так же можно формулировать теоремы о многогранниках с границей, аналогичные теоремам 5, 6. Здесь возможны разные случаи: лучи могут итти внутрь одного полупространства или нет; можно рассматривать многогранники, ограниченные одной ломаной или несколькими. (На ломаные нужно наложить условие, чтобы вообще они могли ограничивать выпуклый многогранник с вершинами на данных лучах.) Простейшим будет случай, когда все лучи идут внутри выпуклого телесного угла, на поверхности которого лежит данная ломаная L, причём нужно рассматривать отдельно многогранники, обращённые выпуклостью к вершине угла и от неё. Формулировки и доказательства возможных здесь теорем могут служить в качестве хорошей задачи. Дальнейшей темой может служить обобщение на тот случай, когда лучи не исходят из одной точки, но «проходят сквозь» данную ломаную L.

7. Теореме 2 можно сопоставить теорему, относящуюся к бесконечно малым деформациям многогранника.

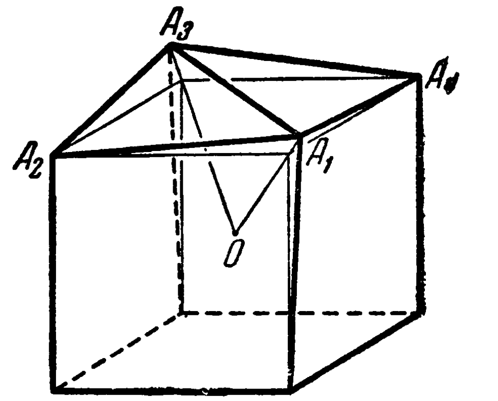
Возьмём внутри замкнутого выпуклого многогранника P_0 точку O и проведём из неё лучи L_i через все вершины многогранника P_0. Если вершины перемещать вдоль лучей L_i, то многогранник P_0 будет деформироваться. При достаточно малых смещениях ни одна из вершин не попадёт в выпуклую оболочку совокупности других и, следовательно, останется вершиной деформированного многогранника P.

Мы будем предполагать, что с изменением параметра t вершины движутся по лучам L_i с определёнными скоростями. Тогда, как очевидно, грани и рёбра многогранника будут вращаться также с определёнными скоростями.

При движении вершин строение многогранника может, конечно, меняться. Так будет, например, если выдвигать от центра O куба чертежа 145 его вершины A_1 и A_3, оставляя вершины A_2 и A_4 неподвижными, или наоборот, причём в обоих случаях грань $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ будет ломаться, но в первом случае по диагонали $A_1\ A_3$, а во втором — по диагонали A_2A_4.

Но при малых деформациях уже имеющиеся рёбра не могут исчезнуть,— а могут только появиться новые, бывшие в начальный момент диагоналями граней.

При рассмотрении многогранных углов при вершинах многогранника мы будем такие диагонали считать «новыми» рёбрами этих углов в отличие от настоящих или «старых» рёбер; «новые» рёбра лежат на «старых» гранях.



Черт. 145.

В порядке обобщения можно допустить деформации с нарушением выпуклости многогранника, вызванным тем, что грани переламываются по диагоналям не так, как при сохранении выпуклости. Например, при движении вершин A_1 и A_3 куба на черт. 145 наружу можно допустить переламывание грани по диагонали A_2A_4, что приведёт к невыпуклому многограннику.

Также и в этом случае мы будем вообще говорить, что многогранник деформируется вследствие движения его вершин.

Многогранные углы мы будем рассматривать с точностью до переноса и подобного преобразования; последнее также не меняет ни форму, ни размеры многогранного угла. Мы будем говорить, что многогранный угол V_0 уменьшается, если при деформации, оставляющей его вершину на месте, ни одно его ребро не движется наружу с положительной скоростью и хотя бы одно настоящее ребро вращается, заходя внутрь угла V_0 со скоростью, отличной от нуля. Угол будет считаться увеличивающимся, если с изменением скоростей на противоположные он оказывается уменьшающимся *).

Теорема 7. *Пусть замкнутый выпуклый многогранник деформируется вследствие движения его вершин по данным лучам, исходящим из его внутренней точки O. Тогда либо его начальная деформация есть подобие с центром O, т. е. начальные скорости движения вершин пропорциональны их расстояниям от точки O, либо существует вершина, многогранный угол при которой убывает, и вершина, при которой многогранный угол возрастает* (помня условие о том, что углы рассматриваются с точностью до переноса или подобия, так что при сравнении их вершины всегда можно считать совмещёнными).

Доказательство столь же просто, как доказательство теоремы 2.

Назовём относительной скоростью вершины A_i скорость изменения расстояния OA_i, отнесённую на единицу длины, т. е. величину $v_i = \frac{\dot{r}_i}{r_i}$, где $r_i = OA_i$. Подобное преобразование характеризуется равенством всех v_i.

Допустим, что деформация не сводится к подобию, так что не все v_i равны между собой.

*) Вращению настоящего ребра наружу из угла V может не отвечать противоположное вращение внутрь: таким свойством обладает вращение в любой опорной плоскости, проходящей через ребро. Поэтому при рассмотрении настоящих рёбер нельзя налагать условие на скорость движения наружу.

Возьмём вершину с наибольшим значением относительной скорости; пусть это будет вершина A_1. Прибавим ко всем относительным скоростям величину $-v_1$, т. е. относительную скорость вершины A_1 с обратным знаком. Этим мы добавляем к рассматриваемой начальной деформации её подобное преобразование и потому не меняем по существу деформации многогранных углов многогранника.

Но так как v_1 была наибольшей относительной скоростью, то теперь у всех вершин относительные скорости не положительны, а у A_1 скорость равна нулю, т. е. A_1 стоит на месте, а прочие вершины либо также стоят на месте, либо движутся внутрь многогранника. При этом не все они стоят на месте, так как иначе их относительные скорости v_i до прибавления скорости $-v_1$ были бы равны, вопреки предположению.

Если хотя бы одна вершина A_i, соединённая с A_1, ребром, движется внутрь (т. е., если $v'_i = v_i - v_1 < 0$), то это и будет означать, что многогранный угол при вершине A_1 уменьшается.

Если же все вершины, соединённые с A_1 рёбрами, неподвижны, то берём вместо A_1 любую из них и т. д. Так в конце концов мы дойдём до вершины с уменьшающимся многогранным углом, потому что не все вершины неподвижны.

Совершенно аналогично, вычитая из всех относительных скоростей наименьшую из них, докажем, что есть вершина с увеличивающимся многогранным углом, и теорема доказана.

Из теоремы 5 можно вывести теорему о жёсткости, аналогичную теореме 3 о подобии многогранников. Напомним, что величина x, зависящая от t, называется стационарной, если $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$. Многогранник называется жёстким при данных условиях, если в этих условиях он не допускает деформаций помимо тривиальных, причём имеются в виду только начальные скорости деформации. В данном случае тривиальной деформацией будет подобие, т. е. деформация, при которой начальные скорости вершин пропорциональны их расстояниям от точки O.

Введём ещё понятие существенно монотонной (возрастающей) функции многогранного угла, понимая под этим величину f, зависящую от многогранного угла, так что при увеличении угла она растёт с положительной скоростью, т. е. $\frac{df}{dt} > 0$.

Воспользовавшись понятиями, введёнными в связи с теоремой 7, немедленно извлекаем следующую теорему о жёсткости:

Теорема 8. *Замкнутый выпуклый многогранник — жёсткий в определённом выше смысле, если его вершины остаются на данных лучах, исходящих из его внутренней точки, и для каждого его многогранного угла какая-нибудь существенно монотонная функция стационарна.*

Пользуясь взаимностью между многогранным углом и его сферическим изображением, теоремы 5 и 6 можно пересказать в терминах сферического изображения. Рассмотрим для этого деформацию сферического изображения любой вершины многогранника, вызванную деформацией самого многогранника при движении его вершин по данным лучам L_i, исходящим из точки O.

Если вершины движутся с определёнными скоростями, то и рёбра вращаются с определёнными скоростями. А так как стороны сферического многоугольника S_{A_i}, являющегося сферическим изображением вершины A_i, лежат в плоскостях, перпендикулярных к сходящимся в A_i рёбрам, то и они движутся с определёнными скоростями. Строго говоря, речь должна идти о вращении больших кругов, ограничивающих многоугольник S_{A_i}; каждый такой круг перпендикулярен к соответствующему ребру, подходящему к вершине A_i, и вращается вместе с вращением этого ребра.

Если ребро движется внутрь многогранного угла V при вершине A, то соответствующая сторона многоугольника S выдвигается от этого многоугольника. Поэтому уменьшению угла V в смысле, принятом в теореме 5, отвечает увеличение многоугольника S в том смысле, что его стороны выдвигаются наружу с определёнными скоростями вследствие вращения несущих их больших кругов.

Определив в соответствии с этим понятия «уменьшения» и «увеличения» сферического изображения вершины многогранника, а также понятие его существенно монотонной функции, можно пересказать теоремы 5 и 6 в терминах сферического изображения. Существенно монотонная возрастающая функция многогранного угла будет существенно монотонной убывающей для его сферического изображения, и обратно.

8. В n° 6 § 5 главы II была выяснена возможность полярного преобразования теорем о многогранниках с вершинами на данных лучах в теоремы о многогранниках с гранями, перпендикулярными к данным лучам. Там были формулированы теоремы, полярные теоремам 2 и 4. Теоремы 5 и 6 допускают такое же полярное преобразование.

Все выводы этого параграфа совершенно дословно переносятся в пространство любого числа измерений $n \geqslant 2$ с тем лишь отличием, что в теореме 1 нужно рассматривать разложения вектора e_k по n другим, а в теореме 4 вместо 4π нужно взять площадь единичной сферы в n-мерном пространстве. Кроме того, речь должна идти о кривизне, как о $(n-1)$-мерной площади сферического изображения.

§ 2. Бесконечные многогранники

1. Мы будем рассматривать бесконечные выпуклые многогранники, расположенные над некоторой данной плоскостью T так, что 1) каждая прямая, перпендикулярная к плоскости T, либо не пересекает многогранник, либо содержит в нём целую полупрямую; 2) вершины многогранника проектируются в данные точки A_0, A_1, ..., A_n на плоскости T.

Эти условия предполагаются, далее, выполненными без особых оговорок.

Так как при подобном сжатии многогранника первое условие, наложенное на его расположение, не нарушается, то тем же свойством обладает и его предельный угол. Мы говорим, что он «однозначно *) проектируется на плоскость T».

Мы не исключаем из рассмотрения многогранники, у которых предельный угол сводится к полупрямой; эта полупрямая тогда перпендикулярна к плоскости T.

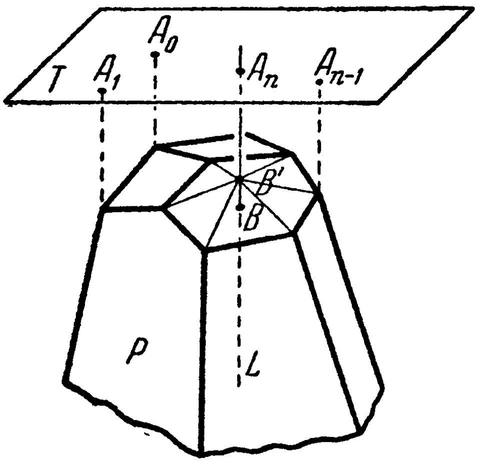
В связи с этим, говоря о многогранном угле V, служащем предельным углом многогранника, мы всегда будем допускать, что V может быть плоским углом или полупрямой. Далее, к бесконечным многогранникам мы причисляем также бесконечные выпуклые многоугольники. Например, если предельный угол V сводится к плоскому углу, а точки

*) Термин этот — в известной мере условный, так как угол может иметь грани, перпендикулярные к плоскости T.

$A_0, \ldots, A_n$ лежат на одной прямой, то многогранник P неизбежно сводится к многоугольнику. Эта возможность неизменно будет иметься в виду без особых напоминаний.

Пусть точки $A_0, \ldots, A_n$ на плоскости T заданы произвольным образом и пусть дан многогранный угол V, однозначно проектирующийся на плоскость T. Докажем, что в таком случае *существует бесконечный выпуклый многогранник с предельным углом V и с вершинами, проектирующимися в данные точки A_i*.

Доказательство проведём индукцией по числу точек A_i. Для одной точки A_0 утверждение очевидно, так как сам данный угол V с вершиной в точке A_0 и будет искомым многогранником. Предположим теперь, что утверждение верно для n точек, и докажем его для $n+1$ точки $A_0, A_1, \ldots, A_n$.



Черт. 146.

Допустим сначала, что ни одна из точек $A_0, \ldots, A_n$ не лежит в выпуклой оболочке остальных точек. Тогда, поместив вершину угла V в точку A_0, построим выпуклую оболочку угла V и точек $A_0, \ldots, A_n$. По теореме 5 § 4 главы I это будет выпуклый многогранник с предельным углом V и с вершинами в точках $A_0, \ldots, A_n$, т. е. как раз искомый многогранник.

Остаётся поэтому допустить, что среди точек $A_0, \ldots, A_n$ хотя бы одна, скажем A_n, содержится в выпуклой оболочке остальных n точек $A_0, \ldots, A_{n-1}$. Согласно предположению, что утверждение верно для n точек, существует многогранник P с предельным углом V и с вершинами, проектирующимися в точки $A_0, \ldots, A_{n-1}$. Так как точка A_n лежит в выпуклой оболочке этих точек, то прямая L, проходящая через точку A_n перпендикулярно к плоскости T, необходимо пересекает многогранник P, входя в него в некоторой точке B (черт. 146). Если на отрезке A_nB взять точку B', достаточно близкую к B, и построить выпуклую оболочку многогранника P и точки B', то получим новый многогранник P'. Он имеет вершину B', проектирующуюся в точку A_n. Вместе с тем, если смещение от B к B' достаточно мало, то все вершины многогранника P останутся также вершинами многогранника P'. В результате, многогранник P' и будет иметь предельный угол V и вершины, проектирующиеся в точки $A_0, \ldots, A_n$. Таким образом, наше утверждение доказано.

Бесконечный выпуклый многогранник есть граница выпуклой оболочки своих вершин и предельного угла, т. е. полностью определяется их заданием, причём заранее предписанный предельный угол V можно расположить вершиной в любой предписанной вершине многогранника.

Если заданы проекции $A_0, \ldots, A_n$ вершин на плоскость T, то сами вершины полностью определяются их расстояниями $h_0, \ldots, h_n$

от плоскости T, считая эти расстояния положительными в ту сторону от плоскости T, куда обращена бесконечная часть многогранника, и отрицательными — в другую сторону.

Следовательно, при заданных проекциях вершин и предельном угле V многогранник полностью определяется заданием $n+1$ чисел $h_0, \ldots, h_n$.

Числа эти не могут быть произвольными, потому что данная точка B_k может быть вершиной выпуклой оболочки угла V и всех точек B_i с проекциями A_i тогда и только тогда, когда она не принадлежит выпуклой оболочке остальных точек B_i и угла V с условием, что его вершина лежит в любой из этих точек. Это, очевидно, накладывает на высоты h_i точек B_i определённые условия в виде некоторых неравенств. Вывод этих неравенств представляет собой совершенно элементарную задачу. Её решение не будет нужно в дальнейшем, и мы оставляем его читателю.

2. Аналогично теореме 2 § 1 имеет место

Теорема 1. *Если два бесконечных выпуклых многогранника имеют одни и те же предельные углы V и проекции $A_0, \ldots, A_n$ вершин на плоскость T, то либо эти многогранники совмещаются параллельным переносом в направлении, перпендикулярном к T, либо на любом из них есть вершина, многогранный угол при которой можно путём такого переноса поместить внутри многогранного угла при соответственной вершине другого многогранника.*

Иными словами, два многогранника с общими данными V и $A_0, \ldots, A_n$ равны и параллельны, если только известно, что многогранные углы при их соответственных вершинах непомещаемы один внутри другого.

Здесь, как и в § 1, мы считаем угол W находящимся внутри W', если W содержится в (телесном) угле W', но не совпадает с ним.

Доказательство столь же просто, как доказательство теоремы 2 § 1.

Действительно, пусть многогранники P и P' имеют общие данные V и $A_0, \ldots, A_n$. Вершины их предельных углов можно считать расположенными в каких-либо их соответственных вершинах. Тогда при переносе многогранника P' в направлении, перпендикулярном к плоскости T, его предельный угол претерпевает такой же перенос, а проекции вершин не меняются, и мы можем подвергать многогранник P' любому такому переносу.

Сместим многогранник P' так, чтобы все его вершины оказались над соответственными вершинами многогранника P (т. е. все $h_i' > h_i$). Его предельный угол окажется тогда содержащимся в предельном угле многогранника P и сам P' окажется содержащимся в P, как это ясно из того, что бесконечный многогранник есть выпуклая оболочка совокупности своих вершин и предельного угла.

Если теперь двигать многогранник P' к плоскости T, то в некоторый момент одна из его вершин, скажем B', впервые совпадёт с соответствующей вершиной B многогранника P. При этом многогранник P' ещё не выйдет из P, так как все его вершины и предельный угол остаются в P (вернее, в теле, ограниченном P). Это ясно из того, что телесный многогранник есть выпуклая оболочка совокупности его вершин и предельного угла. Поэтому многогранный угол W' при вершине B' многогранника P' окажется заключённым в угле W при вершине B многогранника P.

Если эти углы W' и W не совпадают, то мы как раз получаем, что угол W' путём переноса помещён внутри угла W, т. е. осуществляется вторая возможность, указанная в теореме. Если же углы W и W' совпадают, то совпадают их рёбра и, следовательно, совпадают также вершины многогранников P и P', служащие концами этих рёбер, потому что по условию эти вершины лежат на общих перпендикулярах к плоскости T. Для многогранных углов при этих вершинах мы можем повторить то же рассуждение и т. д., пока не дойдём до пары соответственных вершин, многогранные углы при которых не совпадают. Тогда угол U' при такой вершине на многограннике P' будет содержаться внутри соответственного угла U. Если же мы не найдём пары не совпадающих углов, то, значит, все они совпадают, т. е. многогранник P' совпадает с P. Следовательно, он совместился с P путём переноса, и тем самым осуществляется первая возможность, предусмотренная в теореме.

Из теоремы 1 аналогично теореме 3 § 1, очевидно, вытекает

Теорема 2. *Если у двух бесконечных выпуклых многогранников с общими предельными углами и проекциями вершин на плоскость T для каждой пары многогранных углов при соответственных вершинах равны значения какой-либо монотонной функции, то многогранники совмещаются параллельным переносом.*

В частности, это имеет место, если соответственные вершины имеют равные кривизны.

3. Теореме 4 § 1 в случае бесконечных многогранников соответствует

Теорема 3. *Пусть на плоскости T заданы точки $A_0, \ldots, A_n$ и задан многогранный угол V, однозначно проектирующийся на плоскость T. Для того чтобы существовал бесконечный выпуклый многогранник с вершинами, проектирующимися в точки $A_0, \ldots, A_n$, с предельным углом V и кривизнами вершин $\omega_0, \ldots, \omega_n$, необходимо и достаточно, чтобы числа ω_i удовлетворяли следующим условиям:*

1) $0 < \omega_i < 2\pi \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$;

2) *сумма всех ω_i равна кривизне угла V.*

Согласно теореме 2 такой многогранник — единственный с точностью до переноса в направлении, перпендикулярном к плоскости T.

Необходимость первого условия очевидна. Необходимость второго также становится очевидной, если вспомнить, что, как указано ещё в n° 3 § 5 главы I, сферическое изображение бесконечного выпуклого многогранника совпадает со сферическим изображением его предельного угла. Поэтому в теореме вместо задания угла V можно иметь в виду задание выпуклого сферического многоугольника, который должен служить сферическим изображением искомого многогранника.

Теперь остаётся доказать достаточность условий теоремы, т. е. доказать существование многогранника с данными кривизнами вершин. Для этого мы опять воспользуемся леммой об отображении.

Пусть точки $A_0, \ldots, A_n$ и угол V заданы. Мы будем рассматривать бесконечные выпуклые многогранники P, у которых одна вершина закреплена в точке A_0, прочие вершины проектируются в остальные точки A_i, а предельный угол есть V. По доказанному в n° 1 такие многогранники существуют и потому их многообразие $\boldsymbol{P}$ не пусто.

Каждый такой многогранник определяется заданием n высот $h_1, \ldots, h_n$ его вершин, проектирующихся в точки $A_1, \ldots, A_n$. Если данные числа $h_1^0, \ldots, h_n^0$ служат высотами вершин многогранника P^0, то и любые достаточно близкие к ним числа $h_1, \ldots, h_n$ служат высотами вершин некоторого многогранника P. Действительно, условие, налагаемое на высоты вершин, состоит в том, что никакая вершина не должна попадать в выпуклую оболочку совокупности других вершин и угла V; если это верно при каких-либо высотах $h_1^0, \ldots, h_n^0$, то то же верно и при любых достаточно близких к ним значениях высот. Отсюда следует, что каждая точка P^0 в множестве $\boldsymbol{P}$ имеет кубическую n-мерную окрестность, так что $\boldsymbol{P}$ есть открытое множество в n-мерном пространстве с введёнными в нём координатами $h_1, \ldots, h_n$.

Рассмотрим теперь $(n+1)$-мерное пространство с координатами $\omega_0, \ldots, \omega_n$. Пусть Ω — кривизна данного угла V. Тогда условие 2 теоремы даёт

$$\omega_0 + \omega_1 + \ldots + \omega_n = \Omega, \tag{1}$$

т. е. определяет в нашем пространстве некоторую плоскость. Условие 1 теоремы определяет в этом пространстве внутренность куба и пересечение её с плоскостью (1) определяет область значений ω_i, удовлетворяющих обоим условиям теоремы. Это будет многообразие $\boldsymbol{K}$ допустимых совокупностей чисел ω_i. Оно представляет собой n-мерное связное многообразие.

Так как каждому многограннику P из многообразия $\boldsymbol{P}$ отвечает совокупность значений кривизн его вершин, удовлетворяющая условиям теоремы, то мы получаем естественное отображение φ многообразия $\boldsymbol{P}$ в многообразие $\boldsymbol{K}$. Это отображение, очевидно, непрерывно. Так как у многогранников P одна вершина закреплена, то по теореме 3 многогранники с равными кривизнами вершин просто совпадают. Это означает, что отображение φ взаимно однозначно.

Наконец, многообразие $\boldsymbol{K}$ связно и имеет ту же размерность, что и $\boldsymbol{P}$. Таким образом, мы видим, что первые три условия леммы об отображении выполнены, и остаётся лишь показать, что четвёртое условие этой леммы также выполнено.

Пусть последовательность точек K_j из многообразия $\boldsymbol{K}$, представляющих совокупности кривизн вершин многогранников P_j, сходится к точке K из $\mathbf{K}$:

$$K_j = \varphi(P_j) \to K = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbf{K}. \tag{2}$$

Так как точка $K = (\omega_0, \ldots, \omega_n)$ принадлежит $\mathbf{K}$, то согласно первому условию теоремы все её координаты $\omega_i > 0$, т. е. кривизны вершин многогранников P_j сходятся к положительным значениям. Поэтому найдётся такое $\varepsilon > 0$, что для всех кривизн их вершин будет

$$\omega_i^j > \varepsilon \qquad (i = 0, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Перенесём каждый многогранник P_j в направлении, перпендикулярном к плоскости T так, чтобы T стала его опорной плоскостью. Так как все вершины многогранников P_j проектируются в данные точки A_i, то из многогранников P_j можно выбрать последовательность, все многогранники которой упираются в плоскость T в одной и той же из точек A_i, скажем в точке A_n. Чтобы не усложнять обозначений, многогранники этой последовательности мы будем обозначать также P_j.

Пусть вершина B_i^k многогранника P_{m_k} лежит на высоте h_i^k над плоскостью T и пусть расстояние её проекции A_i на плоскость T от точки A_n равно r_i. Точка A_n является вершиной многогранника P_{m_k}, и потому никакая опорная плоскость к P_{m_k} в вершине B_i^k не может пересекать луч, идущий из A_n в многогранник P_{m_k} перпендикулярно к плоскости T. Отсюда на основании очевидных элементарных соображений, мы заключаем, что если θ — угол, образуемый этим лучом с опорной плоскостью в вершине B_i^k, то

$$\operatorname{tg}\theta \leqslant \frac{r_i}{h_i^k}. \tag{4}$$

Пусть θ_0 таково, что

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{r_i}{h_i^k}. \tag{5}$$

Тогда из неравенства (4) вытекает, что сферическое изображение вершины B_i^k лежит в полосе шириной θ_0 около экватора единичной сферы; если за полюс принять сферическое изображение плоскости T. Площадь такой полосы равна $2\pi\sin\theta_0$. Вместе с тем вследствие неравенства (3) эта площадь больше ε. Следовательно,

$$2\pi\sin\theta_0 > \varepsilon \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\theta_0 > \frac{\varepsilon}{2\pi}. \tag{6}$$

На основании равенства (5) отсюда следует, что

$$h_i^k < \frac{2\pi r_i}{\varepsilon}.$$

Это означает, что расстояния всех вершин многогранников P_{m_k} от плоскости T ограничены. Поэтому из многогранников P_{m_k} можно выбрать сходящуюся последовательность *). Предельный многогранник будет,

*) Многогранники этой последовательности мы, конечно, переносим обратно так, что они имеют одну из вершин в точке A_0. При этом сходимость, очевидно, не нарушается.

очевидно, иметь предельные площади сферических изображений вершин $\omega_0, \ldots, \omega_n$. Этим доказано, что если $K_m = \varphi(P_m) \to K$, то существует подпоследовательность P_{m_j} такая, что $P_{m_j} \to P$ и $K = \varphi(P)$.

Таким образом, все условия леммы об отображении оказываются выполненными, и, применяя её, мы получаем доказательство существования многогранника с данными кривизнами вершин.

4. Полученный результат можно формулировать ещё так:

Пусть на плоскости T заданы точки $A_0, \ldots, A_n$ и каждой из них отнесено по числу ω_i с условиями 1) $0 < \omega_i < 2\pi$, 2) $\sum_{i=0}^{n} \omega_i \leqslant 2\pi$. *Тогда существует бесконечный выпуклый многогранник, однозначно проектирующийся на плоскость T, с вершинами, лежащими над точками A_i и имеющими, соответственно, кривизны ω_i.* При этом ещё можно произвольно задать предельный угол такого многогранника, лишь бы его кривизна равнялась сумме чисел ω_i. Так как $\sum \omega_i \leqslant 2\pi$, то такой угол заведомо найдётся.

В этой формулировке особенно ясно, что кривизны вершин бесконечного выпуклого многогранника не подчиняется никаким условиям, кроме тривиальных. (Условие $\omega_i < 2\pi$ очевидно, но при $n \geqslant 1$ оно лишнее, так как следует из условий $\omega_i > 0$ и $\sum \omega_i \leqslant 2\pi$.)

В этом данная теорема отличается от теоремы 4 § 1 для замкнутых многогранников: там имеется дополнительное условие (8), которое нельзя считать столь же тривиальным. Оно связано, однако, с расположением лучей e_i. В этой связи естественно поставить вопрос: каковы условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данные числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ могли быть кривизнами всех вершин хоть какого-нибудь замкнутого выпуклого многогранника? Необходимыми являются условия: 1) $0 < \omega_i < 2\pi$ и 2) $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 4\pi$. Достаточны ли эти условия? — Вопрос остаётся открытым. (Из условий 1) и 2) следует, что должно быть $n \geqslant 3$. Если $n = 3$, то положительный ответ даётся построением треугольника с углами, равными $\pi - \frac{\omega_i}{2}$; это и будет многогранник, хотя и вырождающийся, с кривизнами вершин, равными ω_i.)

5. Воспользовавшись понятиями, введёнными в n° 6 § 1, в частности понятием об уменьшении и увеличении многогранного угла, можно формулировать теорему, относящуюся к теореме 1 так же, как теорема 5 § 1 относится к теореме 2 § 1.

Теорема 4. *Если бесконечный выпуклый многогранник с неизменным предельным углом, однозначно проектирующимся на плоскость T, деформируется вследствие движения его вершин вдоль прямых, перпендикулярных к этой плоскости, то хотя бы один его многогранный угол уменьшается и хотя бы один — увеличивается.*

Отсюда, далее, можно извлечь теорему о жёсткости, совершенно сходную с теоремой 6 § 1. Наконец, теорему 4, так же как эту теорему о жёсткости, можно пересказать в терминах сферического изображения вершин. Всё это, так же как доказательство теоремы 4, вполне аналогично тому, что было выведено в n° 6 § 1. Поэтому мы не станем на этом останавливаться.

6. В предыдущих пунктах речь шла о бесконечных многогранниках с вершинами на данных параллельных лучах. Это соответствовало как бы тому, что общее начало всех лучей находится в бесконечности. Можно, однако, рассматривать бесконечные выпуклые многогранники с вершинами на данных лучах, исходящих из данной точки O, которая должна находиться внутри многогранника. В этом случае естественно располагать вершину предельного угла в точке O.

Тогда встают вопросы, совершенно аналогичные тем, какие были решены в § 1 для замкнутых многогранников.

1) При каких условиях расположения лучей $e_1, \ldots, e_n$ и угла V существуют бесконечные выпуклые многогранники с вершинами на этих лучах и с предельным углом V?

2) Каковы необходимые и достаточные условия, определяющие области возможных значений расстояний r_i вершин многогранника от начала O (при условии, что лучи e_i и предельный угол V заданы)?

3) Каковы условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данные числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ могли служить кривизнами вершин многогранника с данным предельным углом и с вершинами на данных лучах?

То, что лучи e_i, кривизны ω_i и предельный угол V определяют многогранник с точностью до подобного преобразования с центром O, доказывается буквально так же, как аналогичный результат для замкнутых многогранников. Конечно, и в данном случае имеют место общие теоремы, совершенно аналогичные теоремам 2 и 3 § 1.

Поставленные вопросы допускают полное решение теми же методами, какие мы применяли в § 1. Поэтому мы предоставляем читателю самому формулировать и доказать соответствующие теоремы.

7. Как было отмечено ещё в § 1 главы I, рассмотрение бесконечного выпуклого многогранника по существу равносильно рассмотрению неопределённо продолжаемого конечного многогранника. При этом условием такой продолжаемости без появления новых пересечений крайних граней является выпуклость сферического изображения. Вместе с тем задание предельного угла эквивалентно заданию сферического изображения многогранника. В связи с этими замечаниями видно, что наши теоремы о бесконечных многогранниках можно пересказать для многогранников с границей.

8. Заметим в заключение, что результаты этого параграфа вместе с их доказательствами переносятся в пространство любого числа измерений $n \geqslant 2$; лишь в теореме 3 вместо 2π нужно взять площадь полусферы в соответствующем пространстве.

§ 3. Обобщения

1. Как уже было указано, результаты §§ 1 и 2 обобщаются на многогранники в n-мерном пространстве по существу дословно, и на этом нет надобности останавливаться.

Они переносятся с соответствующими изменениями и на многогранники в пространстве Лобачевского. Ввиду отсутствия в этом пространстве подобия и параллельного переноса теоремы единственности и условия теорем существования формулируются там иначе. Кривизна вершины определяется так же: она равна 2π минус сумма плоских углов при вершине, а это равно, в свою очередь, величине телесного угла, заполняемого нормалями к опорным плоскостям, проведённым в вершине. Приведём результат для замкнутых многогранников:

Пусть из точки O в пространстве Лобачевского исходят лучи $l_1, \ldots, l_m$, не направленные в одно полупространство. Для того чтобы существовал замкнутый выпуклый многогранник с вершинами на данных лучах и с данными кривизнами вершин $\omega_1, \ldots, \omega_m$, необходимо и достаточно, чтобы числа ω_i удовлетворяли условиям: 1) $0 < \omega_i < 2\pi$ $(i = 1, \ldots, m)$; *при любой совокуп-*

ности лучей $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$, идущих внутрь одного полупространства, должно быть $\sum \omega_i > \sigma_{i_1}, \ldots, {}_{i_k}$, где $\sigma_{i_1}, \ldots, {}_{i_k}$ — кривизна вершины многогранного угла, являющегося выпуклой оболочкой лучей $l_{i_1}, \ldots, l_{i_k}$, а сумма $\sum\omega_i$ распространяется по всем остальным лучам; 3) *сумма всех ω_i больше 4π. При этом такой многогранник единственный.*

Сравнивая эту теорему с теоремами 3 и 4 § 1, мы видим, что, во-первых, многогранник с вершинами на данных лучах и с данными кривизнами вершин единственный уже без добавлений о подобии. Во-вторых, условия 1) и 2) формулированной теоремы повторяют условия теоремы 4 § 1 (с тем отличием, что теперь нужно добавлять необходимое условие, что $\omega_i < 2\pi$, которое в теореме 4 § 1 автоматически следовало из других), но условие 3) отлично от условия, что сумма кривизны вершин равна 4π, как это имеет место в эвклидовом пространстве; в пространстве Лобачевского она может быть любой, большей 4π.

Другие теоремы, аналогичные теоремам §§ 1, 2, мы не формулируем. Их формулировки и доказательства не представляют принципиальных трудностей; в частности, все доказательства существования легко проводятся с помощью леммы об отображении.

2. Теперь обратимся к обобщениям на любые выпуклые тела эвклидова пространства.

Пусть H — выпуклое тело, O — точка внутри него и $r(\boldsymbol{e})$ — расстояние от O до границы тела H в направлении единичного вектора $\boldsymbol{e}$.

Отнесём любому вектору $\boldsymbol{x}$ число

$$D(\boldsymbol{x}) = \frac{|\boldsymbol{x}|}{r\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right)}, \tag{1}$$

т. е. отношение длины вектора $\boldsymbol{x}$ к расстоянию от O до границы тела H в направлении этого вектора $\boldsymbol{x}$. (При $\boldsymbol{x} = 0$ направление не определено, и полагаем $D(\boldsymbol{o}) = 0$.) Определённую таким образом функцию вектора $\boldsymbol{x}$ ввёл Минковский и назвал её *дистанционной функцией* тела H.

Сравнительно просто доказывается теорема:

Для того чтобы данная функция $D(\boldsymbol{x})$ вектора $\boldsymbol{x}$ была дистанционной функцией какого-либо выпуклого тела, необходимы и достаточны следующие условия:

1) $D(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda D(\boldsymbol{x})$ при любом $\lambda \geqslant 0$;

2) $D(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leqslant D(\boldsymbol{x}) + D(\boldsymbol{y})$ при любых $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$;

3) $D(\boldsymbol{x}) > 0$, если только $\boldsymbol{x} \neq 0$.

Необходимость условий 1) и 3) очевидна из самого определения дистанционной функции; условие 2) легко получается из выпуклости тела H.

В силу первого условия функция $D(\boldsymbol{x})$ полностью определяется её значениями для единичных векторов $\boldsymbol{e}$. Тогда, поскольку $|\boldsymbol{e}| = 1$, из определения (1) следует, что

$$D(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{r(\boldsymbol{e})},$$

т. е. $D(\boldsymbol{e})$ есть обратная величина расстояния от точки O до границы тела H в направлении вектора $\boldsymbol{e}$.

Из условий 1) и 2) легко вывести, что если

$$\boldsymbol{e} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \alpha_3\boldsymbol{e}_3$$

со всеми $\alpha_i > 0$, то

$$D(\boldsymbol{e}) < \alpha_1 D(\boldsymbol{e}_1) + \alpha_2 D(\boldsymbol{e}_2) + \alpha_3 D(\boldsymbol{e}_3)$$

или

$$\frac{1}{r(e)} < \frac{a_1}{r(e_1)} + \frac{a_2}{r(e_2)} + \frac{a_3}{r(e_3)}.$$

Это есть не что иное, как неравенство (2) теоремы 1 § 1. Совершенно ясно, что теорема 1 § 1 есть частный случай приведённой только что теоремы Минковского. Для многогранников нет надобности рассматривать функцию $D(x)$: достаточно взять конечное число её значений — обратные величины расстояний вершин от начала O.

Легко убедиться, что дистанционная функция многогранника — кусочно-линейная. Именно, она линейна в каждом телесном угле, проектирующем грань многогранника из точки O. Тем самым она определяется её значениями для векторов e_i, направленных в вершины многогранника.

3. Формальная аналогия между дистанционной и опорной функциями, и соответственно, между теоремой 1 § 1 и теоремой 1 § 5 главы VII имеет интересное геометрическое основание.

Рассмотрим полярность относительно единичной сферы, т. е. преобразование, ставящее в соответствие точке с вектором re, где e — единичный вектор и $r>0$, плоскость с нормальным уравнением $ex=\frac{1}{r}$. Легко доказать, что при таком преобразовании *) каждому выпуклому телу H ставится в соответствие выпуклое тело H' по следующему правилу: каждой внутренней точке тела H отвечает плоскость, не пересекающая тела H', а граничным точкам тела H отвечают опорные плоскости тела H'. (Тело H' есть пересечение полупространств, определяемых этими плоскостями.) Так как преобразование, обратное полярности, есть она сама, то эта связь между телами H и H' — взаимная.

Пусть начало лежит внутри тела H; тогда оно будет также внутри H'. Из определения полярности и взаимосвязи между телами H и H' легко вывести, что дистанционная функция одного из них оказывается опорной функцией другого, и обратно. Если H — многогранник, то H' — тоже многогранник, причём граням одного соответствуют вершины другого, и обратно.

4. Пусть F — замкнутая выпуклая поверхность, O — точка внутри неё и E — единичная сфера с центром в точке O. Пусть M — множество точек на сфере E и $\omega(M)$ — площадь сферического изображения того множества на поверхности F, центральная проекция которого из точки O на сферу E есть данное множество M. Функцию множества $\omega(M)$ мы назовём перенесённой на сферу E кривизной поверхности F. Эта функция определена для всякого борелевского множества M на сфере E. Пользуясь этим понятием, можно формулировать теорему, обобщающую теорему 4 § 1 на любые замкнутые выпуклые поверхности:

Для того чтобы функция $\omega(M)$ (борелевского) множества M на сфере E была перенесённой на сферу E кривизной некоторой выпуклой поверхности, содержащей внутри центр O сферы E, необходимо и достаточно, чтобы 1) *$\omega(M)$ была неотрицательной и вполне аддитивной;* 2) $\omega(E)=4\pi$ **); 3) *для всякого сферически выпуклого множества M выполнялось неравенство*

$$\omega(E-M) > \sigma(M^*),$$

где $\sigma(M^*)$ — площадь множества M^*, «двойственного M», т. е. образуемого концами нормалей к опорным плоскостям конуса с вершиной O, вырезающего на сфере E множество M.

Если функция ω состоит из конечного числа «точечных нагрузок» $\omega_1, \ldots, \omega_m$ в точках $A_1, \ldots, A_m$ (т. е. $\omega(M)=0$, если M не содержит ни одной из A_i, и $\omega(A_i)=\omega_i$), то данная теорема превращается в теорему 4 § 1.

---

*) Ср. n° 4 § 5 гл. I.

**) В n-мерном пространстве $\omega(E)$ равно площади всей единичной сферы.

Доказательство формулированной теоремы проводится предельным переходом от многогранников *).

Соответствующая теорема единственности гласит:

Если две замкнутые выпуклые поверхности F и F' имеют одну и ту же кривизну, перенесённую на одну и ту же сферу E, то эти поверхности переводятся одна в другую подобным преобразованием с центром подобия в центре сферы E **).

Теоремам 2 и 3 § 1 также отвечают общие и столь же просто доказываемые теоремы об общих выпуклых поверхностях. Так, теореме 2 соответствует совершенно тривиальное утверждение: если две замкнутые выпуклые поверхности F_1 и F_2 имеют общую внутреннюю точку O, то либо они подобны с центром подобия O, либо путём подобного преобразования с центром O поверхность F_1 можно сделать касающейся в какой-то точке, но всё же охватывающей поверхность F_2, или наоборот. Отличие от теоремы 2 § 1 о многогранниках состоит в том, что в случае многогранников речь идёт только о вершинах, и потому теорема о них несколько менее тривиальна.

Переходя к сферическому изображению, теореме 2 § 1 можно сопоставить уже не столь непосредственно очевидное, но всё же очень легко доказываемое утверждение:

Пусть F_1 и F_2 — замкнутые выпуклые поверхности с общей внутренней точкой O. Такие поверхности либо подобны с центром подобия O, либо на них имеются множества M_1 и M_2 с общим проектирующим их из точки O конусом и такие, что сферическое изображение множества M_1 есть только часть сферического изображения множества M_2.

Отсюда следует теорема о подобии поверхностей F_1 и F_2, у которых сферическим изображениям множеств M_1 и M_2 с общим проектирующим конусом отвечают равные значения какой-либо монотонной функции множества на сфере. В частности, получаем теорему о подобии поверхностей с одинаковой кривизной, «перенесённой на сферу E с центром в O».

В моей заметке **), где установлена эта теорема о подобии, по существу доказана, хотя и не формулирована, именно общая теорема.

5. Пусть F — бесконечная полная выпуклая поверхность и e — направление какого-либо луча, содержащегося внутри F. Пусть T — плоскость, перпендикулярная к e, и M — произвольное борелевское множество на плоскости T. Обозначим $\omega(M)$ площадь сферического изображения того множества на поверхности F, которое проектируется (вдоль e) на множество M. Может случиться, что проекция поверхности F не покрывает всей плоскости. Тогда не всякое M может служить проекцией какой-либо части поверхности F; но в таком случае, если M не пересекается с проекцией F, считаем $\omega(M)=0$. Если же M покрывается проекцией F только отчасти, то имеется в виду сферическое изображение того множества на F, проекция которого всё-таки попадает в M.

Таким путём оказывается определённой функция множества $\omega(M)$ на плоскости T; мы назовём её кривизной поверхности F, перенесённой на плоскость T.

Пользуясь этим понятием, формулируем обобщение теоремы 4 § 2 на любые бесконечные выпуклые поверхности:

Для того чтобы данная функция $\omega(M)$ (борелевского) множества на плоскости T была перенесённой на T кривизной некоторой выпуклой поверхности с данным предельным конусом K, необходимо и достаточно,

---

*) См. А. Д. Александров, Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования, Изв. Акад. наук СССР, сер. матем. 1939, № 3.

**) См. А. Д. Александров, Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной, Доклады Акад. наук СССР, 1942, т. 35, № 8.

чтобы 1) $\omega(M)$ *была неотрицательной и вполне аддитивной*; 2) *для* M, *состоящего из одной точки,* $\omega(M) < 2\pi$; 3) *значение функции* ω *для всей плоскости равнялось кривизне конуса* K.

Здесь конус K может вырождаться в дважды покрытый плоский угол или в полупрямую, но во всяком случае подразумевается, что всякая прямая, перпендикулярная к плоскости T, либо вовсе его не пересекает, либо содержит в нём целую полупрямую.

Эта теорема особенно интересна, так как показывает, что кривизна выпуклой поверхности как функция множества не подчиняется никаким условиям, кроме очевидных (хотя и не совсем просто доказываемых со всей строгостью). Теорема доказывается предельным переходом от многогранников.

Соответствующая теорема единственности гласит:

Если две бесконечные полные выпуклые поверхности с равными и параллельными предельными конусами имеют одну и ту же кривизну, перенёсенную на плоскость T, *то эти поверхности совмещаются параллельным перемещением в направлении, перпендикулярном к* T (*при условии, что* $\omega(T) > 0$; *если* $\omega(T) = 0$, *то поверхность может быть любым бесконечным цилиндром и её предельный конус сводится к двугранному углу*).

Это есть следствие общей теоремы: если две бесконечные поверхности с равными предельными конусами однозначно проектируются на плоскость T, то либо они совмещаются переносом в направлении, перпендикулярном к плоскости T, либо на них имеются такие множества M_1 и M_2 с общей проекцией на T, что сферическое изображение множества M_1 есть лишь часть такового для M_2. Если поверхность F регулярна и представлена уравнением $z = f(x, y)$, то её кривизна, перенесённая на плоскость (x, y), будет

$$\omega(M) = \int K dF = \iint\limits_M \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{\left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx\, dy,$$

как это сразу следует из известного выражения для гауссовой кривизны K и элемента площади dF. Поэтому в регулярном случае наши теоремы равносильны теоремам существования и единственности (с точностью до слагаемого) решения уравнения $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \left(1 + z_x^2 + z_y^2\right)^{\frac{3}{2}} g(x, y)$ на всей плоскости, где $g(x, y)$ — данная функция $\left(g = \frac{d\omega}{dx\, dy}\right)$.

Правда, из самых наших теорем не следует, что функция $z = f(x, y)$ будет даже дважды дифференцируемой; поэтому разрешимость уравнения нужно понимать в обобщённом смысле. Однако если функция $g(x, y)$ достаточное число раз дифференцируема, то функция $z = f(x, y)$ будет дважды дифференцируемой, т. е. будет решением уравнения в обычном смысле.

Обобщение теоремы 6 § 1 гласит: *пусть в выпуклой области* G *на плоскости* T *задана вполне аддитивная, неотрицательная функция множества* $\omega(M)$, *такая, что* $\omega(G) < 2\pi$. *Пусть* L — *замкнутая кривая в пространстве, проектирующаяся на границу области* G. *Существует ограниченная кривой* L *выпуклая поверхность, у которой* $\omega(M)$ *есть её кривизна, перенесённая на плоскость* T. *Таких поверхностей только две: они обращены выпуклостью в противоположные стороны.* Для регулярного случая в переводе на язык дифференциальных уравнений это означает разрешимость краевой задачи для указанного выше уравнения в любой выпуклой области, при любых непрерывных заданиях на границе.

ГЛАВА X

ЖЁСТКОСТЬ ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА СО СТАЦИОНАРНОЙ РАЗВЁРТКОЙ

Пусть многогранник P деформируется с изменением некоторого параметра t, который удобно понимать как время; начальному положению соответствует $t=0$. Предполагается, что при деформации рёбра и грани многогранника могут ломаться, так что возникают новые вершины и новые рёбра.

В этой главе нас будут интересовать только *бесконечно малые деформации первого порядка, т. е., иными словами, скорости в момент* $t=0$. Дальше, говоря о деформации, мы обычно будем иметь в виду именно бесконечно малую деформацию; отсутствие соответствующей оговорки не поведёт к недоразумениям. Скорости всегда относятся к начальному моменту $t=0$.

Если для какой-либо величины x её производная по t при $t=0$ равна нулю:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=0,$$

то мы говорим, что величина x стационарна.

Фигура называется *жёсткой*, если (при данных условиях) её деформация необходимо сводится к движению, т. е. скорости в начальный момент — такие, как у твёрдого тела.

Ещё в § 6 главы II была выяснена общая аналогия теорем о жёсткости с теоремами единственности; теоремы, которые будут установлены в этой главе, аналогичны теоремам единственности, доказанным в главе III, и метод их доказательства будет по существу тот же. Однако здесь есть существенное различие: в теоремах о жёсткости речь идёт не об истинной деформации, а только о её главной части первого порядка относительно t. С этим связаны обстоятельства, не имеющие места для конечных деформаций и, соответственно, теорем о единственности или о равенстве. (В частности, в отличие от результатов гл. III доказываемые здесь теоремы не имеют места для многогранников, вырождающихся в дважды покрытые многоугольники, как было уже показано в § 6 гл. II. Поэтому такие многогранники мы вовсе исключаем из рассмотрения.)

§ 1. Деформации многогранного угла

1. Пусть V — выпуклый многогранный угол*). Мы будем допускать, что некоторые грани угла V могут лежать в одной плоскости, образовывая тем самым одну «истинную» грань. Рёбра, разделяющие такие грани, будут «ненастоящими»; двугранные углы при них равны π. Дальше, говоря просто о рёбрах, мы имеем в виду как настоящие или истинные рёбра, так и ненастоящие. Мы будем также допускать, что угол V сводится к двугранному углу, но не к плоскости. Тогда все его двугранные углы равны π, кроме двух, меньших π; рёбра этих углов образуют одну прямую.

Мы будем рассматривать деформацию угла V, вызванную вращением его рёбер вокруг вершины. Вместе с вращением рёбер вращаются и деформируются грани угла V; предполагается, что новых рёбер не появляется, но «ненастоящие» рёбра могут становиться «настоящими».

Не исключается, что в результате деформации угол V перестаёт быть выпуклым. При достаточно малых конечных деформациях это возможно лишь в том случае, если имеются ненастоящие рёбра и истинные грани переламываются по этим рёбрам внутрь. Тогда двуграннные углы при этих рёбрах возрастают и становятся больше π.

Задача состоит в рассмотрении знаков начальных скоростей изменения двугранных углов деформируемого угла V при том условии, что все плоские его углы стационарны. Задача аналогична той, которая была исследована в § 1 главы III для конечных деформаций без нарушения выпуклости и её можно решать аналогичным методом, рассматривая, однако, не приращения углов, а только их главные части, или, что то же самое, производные по t при $t=0$ **). Однако мы воспользуемся другим приёмом, который не только скорее приведёт к цели, но имеет также некоторый самостоятельный интерес ***).

2. Так как движение угла V как целого можно исключить, то можно считать, что любое какое-то его ребро p_1 и одна из плоскостей граней, сходящихся в p_1, неподвижны. Тогда плоскость другой грани с ребром p_1 будет вращаться вокруг этого ребра. И если плоский угол на этой грани стационарен, то (в начальный момент) вся эта грань вращается вокруг ребра p_1, как твёрдое тело. Не

---

*) Вырождение угла V в дважды покрытый плоский угол не допускается.

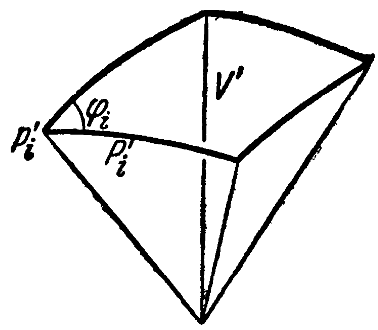
**) Дальше будет видно, что даже при сохранении выпуклости в случае бесконечно малой деформации возможно распределение знаков, невозможное при конечной деформации. Это лишний раз показывает, что, следуя аналогии с выводами гл. III, нужно всё же пользоваться производными, а не конечными приращениями.

***) Этот приём не нов, хотя мне не известно, от кого он исходит.

исключая теперь вращения ребра p_1 и ранее закреплённой грани, можно сказать, что деформация двугранного угла состоит в относительном вращении плоскостей граней вокруг их общего ребра. Этот вывод верен, конечно, для любой пары граней с общим ребром.

Вращение твёрдого тела задаётся вектором угловой скорости, направленным по оси вращения так, что вместе с направлением самого вращения он образует правый винт. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей сводится, как известно, к векторному сложению их угловых скоростей *).

Выберем на угле V направление обхода вокруг вершины и соответственно с ним определим порядок следования рёбер и граней. На каждом ребре p_i возьмём вектор $\boldsymbol{\omega}_i$ угловой скорости вращения следующей за ним грани относительно предыдущей. Вектор $\boldsymbol{\omega}_i$ считается лежащим на ребре и может быть поэтому направлен либо к вершине угла V, либо от неё. Длина вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ есть не что иное, как абсолютная величина начальной скорости $\dot{\varphi}_i$ изменения двугранного угла φ_i при ребре p_i. *Направление вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ определяет знак этой скорости*, потому что с изменением направления $\boldsymbol{\omega}_i$ меняется направление вращения. *Эта связь направления вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ со знаком скорости $\dot{\varphi}_i$ — одна и та же для всех рёбер*, т. е. если на одном ребре направлению $\boldsymbol{\omega}_i$ от вершины отвечает $\dot{\varphi}_i > 0$ (или наоборот), то и на всех рёбрах будет так же. Действительно, пересечём угол V единичной сферой S с центром в его вершине; на сфере S мы получим многоугольник V' с вершинами p'_i и сторонами P'_i, отвечающими рёбрам и граням угла V (черт. 147). Углы φ_i этого многоугольника равны двугранным углам угла V. Направление обхода, заданное на угле V, определяет обход многоугольника V' и тем самым ориентацию сферы S**). Допустим для определённости, что эта ориентация вместе с направлением от центра сферы образует правый винт. (Так как рёбра угла V



Черт. 147.

*) Пусть O — закреплённая точка твёрдого тела, которую примем за начало координат. Тогда, если $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости и $\boldsymbol{x}$ — вектор из O в любую точку X твёрдого тела, то скорость этой точки будет $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}$. При сложении двух вращений с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ вокруг осей, пересекающихся в точке O, получим $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \boldsymbol{x}$, т. е. угловая скорость суммарного вращения есть $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

**) Ориентация, как всегда, задаётся обходом малого контура. Возьмём малый круг C с центром на границе многоугольника V'. Образуем контур C', составленный из дуги круга C, лежащей в V', и отрезка границы многоугольника V'. Ориентация этого контура, а тем самым и контура круга C, задаётся направлением обхода границы многоугольника V'. (Если двигать круг C вдоль границы многоугольника V', то из соображений непрерывности очевидно, что данное определение ориентации не зависит от выбора точки на границе многоугольника V', служащей центром круга C.)

идут из центра сферы S, то это означает, что все винты, определяемые обходом на V и его рёбрами,— правые.) Пусть, например, вектор $\boldsymbol{\omega}_i$ направлен от вершины угла V. По самому определению вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ это означает, что направление ребра p_i с направлением вращения грани P_i относительно P_{i-1} образуют правый винт. Поэтому сторона P'_i многоугольника V' должна вращаться относительно P'_{i-1} в направлении, указанном ориентацией сферы S, т. е. внутрь многоугольника V'. Скорость $\dot{\varphi}_i$ изменения угла φ_i будет, следовательно, отрицательной.

Это заключение верно для всех рёбер, и тем самым связь между направлением вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ и знаком скорости $\dot{\varphi}_i$ — одна и та же для них всех. (Если изменить обход угла V, то эта связь станет только обратной: векторам $\boldsymbol{\omega}_i$, идущим от вершины, будут отвечать $\dot{\varphi}_i > 0$.)

Таким образом, вопрос о распределении знаков скоростей $\dot{\varphi}_i$ сводится к вопросу о распределении направлений векторов $\boldsymbol{\omega}_i$. Для решения последнего вопроса докажем следующее предложение:

Сумма всех векторов $\boldsymbol{\omega}_i$ равна нулю.

Действительно, как было отмечено, сложение вращений сводится к сложению векторов угловых скоростей. Поэтому сумма $\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_{i+1}$ определяет вращение $(i+2)$-й грани относительно i-й. Складывая все скорости $\boldsymbol{\omega}_i$ от первой до последней, убедимся, что полученная сумма определяет вращение первой грани относительно её самой, т. е. отсутствие вращения. Поэтому сумма всех векторов $\boldsymbol{\omega}_i$ равна нулю.

3. Теперь докажем следующую лемму, в которой содержится нужный нам результат о распределении знаков скоростей изменения двугранных углов.

Лемма 1. *Пусть выпуклый многогранный угол V, может быть сводящийся к двугранному, но не к плоскости, деформируется так, что все его плоские углы стационарны. Сопоставим каждому его ребру знак начальной скорости изменения двугранного угла с этим ребром; рёбра стационарных двугранных углов оставим неотмеченными. Тогда для распределения этих знаков имеются только четыре возможности:*

1) *Ни одно ребро не отмечено.*

2) *Число перемен знака не менее четырёх.*

3) *Имеются только две перемены знака, но тогда все отмеченные рёбра принадлежат одной истинной грани и крайние из этих рёбер имеют один знак.*

4) *Имеются только два отмеченных ребра; тогда они образуют вместе одну прямую и не только отмечены одним знаком, но скорости изменения их двугранных углов равны. Этот случай возможен, очевидно, только на угле V, сводящемся к двугранному, так как только при этом условии два ребра могут образовывать вместе*

одну прямую, а именно ребро того двугранного угла, к которому сводится угол V. (То, что скорости изменения двугранных углов при этих двух рёбрах равны, а при всех прочих рёбрах углы стационарны, поскольку рёбра не отмечены, означает, что угол V, деформируясь, остаётся двугранным, если пренебрегать величинами выше первого порядка.)

Пользуясь выводами n° 2, эту лемму можно пересказать на языке векторов ω_i *):

Лемма 1a. *Пусть на рёбрах выпуклого многогранного угла V, быть может, сводящегося к двугранному, но не к плоскости, заданы векторы ω_i так, что сумма их всех равна нулю. Тогда для распределения направлений этих векторов к вершине угла V или от неё имеются только следующие возможности:*

1) *Все векторы равны нулю.*

2) *Число перемен направлений — не менее четырёх.*

3) *Имеется только две перемены направлений, и тогда все ненулевые векторы ω_i лежат на одной истинной грани и крайние из этих векторов одинаково направлены (т. е. либо оба к вершине, либо оба от неё).*

4) *Имеется только два ненулевых вектора. Но тогда из равенства их суммы нулю очевидно, что они лежат на одной прямой, равны по величине и направлены либо оба от вершины, либо оба к вершине.* (Этот случай возможен лишь, если угол V — двугранный).

В силу выводов n° 2 лемма 1a содержит лемму 1, а потому достаточно доказать лемму 1a **).

Векторы, равные нулю, не имеют направления и их можно не принимать во внимание; соответственно будем считать, что есть хотя бы один ненулевой вектор; этим первая возможность исключается. Число перемен направлений при замкнутом обходе заведомо чётно. Поэтому приходится различать три случая:

а) Все векторы направлены одинаково, т. е. либо все к вершине, либо все от неё.

---

*) Все случаи 1) — 4) действительно осуществляются: первый — при отсутствии деформации; четвёртый — при любой деформации двугранного угла без переламывания его (истинных) граней; второй легче всего видеть на примере деформации четырёхгранного угла: здесь два ребра, при которых углы возрастают, разделяются рёбрами, при которых углы убывают. Третий случай получим на четырёхгранном угле, выродившемся в трёхгранный: углы при рёбрах p, q, r меньше π, четвёртое ребро s лежит на истинной грани (q, r) и угол при нём равен π. Если ребро s двигать в плоскости, перпендикулярной к содержащей его грани, то все плоские углы стационарны и стационарен также угол при ребре p, но углы при q, r, s не стационарны, и если угол при s убывает, то углы при p и r возрастают.

**) Обе леммы эквивалентны. То, что лемма 1 содержится в лемме 1a, уже показано в n° 2. Вместе с тем если на рёбрах угла V задать векторы ω_i, в сумме равные нулю, то, приняв их за векторы угловых скоростей, определим тем самым деформацию угла V, при которой, как легко убедиться, все плоские углы будут стационарны.

б) Имеется только две перемены направлений.

в) Перемен направлений — не менее четырёх.

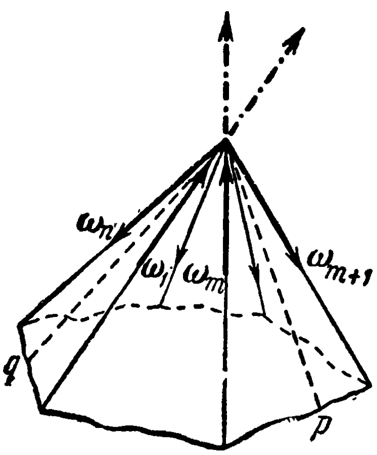
Для доказательства леммы остаётся показать, что в случае а) имеем четвёртую возможность, указанную в лемме, а в случае б) — третью.

4. Рассмотрим случай а); для определённости будем считать, что все векторы направлены от вершины (в противном случае достаточно изменить их знаки).

Так как угол V — выпуклый, то он лежит по одну сторону от плоскости P любой своей грани, и потому все векторы ω_i направлены в одно замкнутое полупространство, ограниченное плоскостью P и содержащее угол V. Если бы векторы не лежали все в плоскости P, то их сумма не могла бы равняться нулю. Следовательно, все векторы ω_i должны лежать в плоскости P и тем самым на рёбрах, принадлежащих одной истинной грани угла V.

Так как истинная грань выпукла, то она лежит в одной полуплоскости P'. Пусть L — прямая, ограничивающая эту полуплоскость на плоскости P. Векторы ω_i направлены в полуплоскость P' и если бы они не лежали на прямой L, то их сумма не могла бы равняться нулю. Следовательно, они могут лежать только на прямой L. Но тогда, очевидно, что если векторы вообще имеются, то их только два и они равны и направлены оба либо к вершине, либо от неё. Этим доказано, что при отсутствии перемен направлений осуществляется только четвёртая возможность, указанная в лемме.

5. Рассмотрим теперь случай б), когда имеется только две перемены направлений. Нужно доказать, что тогда все векторы ω_i лежат на одной истинной грани и крайние из них направлены одинаково.



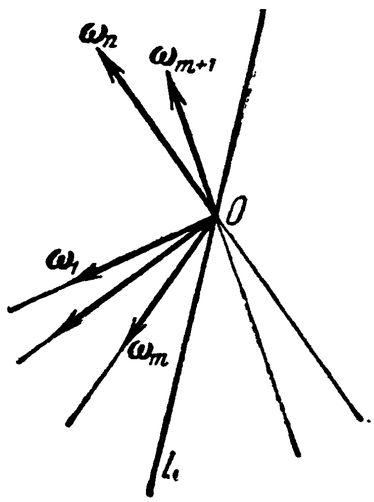
Черт. 148.

Так как имеется только две перемены направлений, то имеется только две последовательности векторов одинаковых направлений; надлежащим образом нумеруя векторы, можно считать, что векторы $\omega_1, \ldots, \omega_m$ направлены к вершине, а векторы $\omega_{m+1}, \ldots, \omega_n$ — от неё. Проведём на гранях угла V из его вершины полупрямые p, q так, чтобы они разделяли эти последовательности векторов (черт. 148). Плоскость (pq), проходящая через эти полупрямые, либо будет плоскостью одной из граней угла V, либо разобьёт его на два угла V_1 и V_2. Так как полупрямые p, q разделяют одну последовательность векторов от другой, то векторы одной из них лежат в одном замкнутом полупространстве, ограниченном плоскостью (pq), а векторы другой — в другом.

Такое положение мы имеем, считая, что каждый вектор лежит на своём ребре. Но если все эти векторы отложить из вершины угла V, то векторы, направленные от неё, окажутся идущими в то же полупространство, куда идут векторы, направленные к вершине. Так как сумма всех векторов равна нулю, то, очевидно, ни один из них не может быть направлен вовнутрь этого полупространства. Все они лежат, следовательно, в плоскости (pq). Но тогда эта плоскость есть плоскость одной из граней угла V, так как она содержит его рёбра с векторами ω_i. Итак, доказано, что все векторы ω_i лежат в плоскости одной грани.

Допустим теперь, вопреки второй части доказываемого утверждения, что крайние векторы, которые мы теперь (в новой нумерации) обозначим ω_1 и ω_n, направлены по-разному: вектор ω_1 — к вершине, а ω_n — от неё. Тогда при переходе от ω_n к ω_1 есть перемена направления, а так как мы предполагаем, что таких перемен всего две, то в последовательности $\omega_1, \ldots, \omega_n$ есть только одна перемена направления, происходящая, скажем, при переходе от вектора ω_m к вектору ω_{m+1}.

Пусть P — плоскость, содержащая все векторы $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Пусть L — прямая, проходящая в плоскости P через вершину O угла V и отделяющая рёбра, несущие векторы $\omega_1, \ldots, \omega_m$, от рёбер, несущих векторы $\omega_{m+1}, \ldots, \omega_n$. Когда векторы лежат на соответствующих рёбрах, то они направлены соответственно к вершине и от неё. Если же их отложить из вершины, то они все будут направлены из вершины в одну полуплоскость, ограниченную прямою L (черт. 149). Но в таком случае их сумма, очевидно, не может равняться нулю. Следовательно, предположение о том, что крайние векторы направлены по-разному, невозможно: они должны быть направлены одинаково.



Черт. 149.

Таким образом, в случае б) действительно имеет место только третья возможность, указанная в лемме, и лемма полностью доказана.

6. Если многогранный угол V сводится к плоскости, то совершенно очевидно, что все векторы ω_i могут быть направлены к вершине (или от неё), хотя их сумма равна нулю. Соответственно, все плоские углы могут быть стационарными, а двугранные углы нестационарными и именно могут все меняться в одну сторону, так что угол V будет оставаться выпуклым. В этом можно убедиться непосредственно. Для этого закрепим на рёбрах угла V точки A_i на расстоянии a от вершины O и будем поднимать вершину над плоскостью, к которой в начальный момент сводился угол V. Точки же A_i оставим неподвижными. Тогда, как легко проверить, длины отрезков OA_i, а вместе с ними плоские углы треугольников OA_iA_{i+1} будут стационарны, в то время как двугранные углы при рёбрах OA_i будут убывать со скоростями, не равными нулю.

§ 2. Усиленная лемма Коши

1. Пусть замкнутый выпуклый многогранник P деформируется так, что некоторые его грани могут переламываться по диагоналям. Эти диагонали будут «новыми» рёбрами многогранника. Нашей целью является доказать, что если при этом плоские углы многогранника стационарны, то и двугранные его углы также стационарны. В частности, следовательно, стационарны углы при «новых» рёбрах, т. е. начальная скорость возникновения этих рёбер равна нулю. Эта теорема аналогична доказанной в § 2 главы III теореме о равенстве двугранных углов при условии равенства плоских углов. Однако здесь мы не можем воспользоваться леммой Коши, потому что, как показано в предыдущем параграфе, при стационарности плоских углов вокруг вершины может быть и не четыре, а только две перемены знака. (Там указана ещё возможность, что вокруг некоторой вершины A перемен знака нет, но тогда только два ребра отмечены и оба одним знаком. Этот случай можно исключить вовсе: достаточно исключить все неотмеченные рёбра, а оба отмеченных ребра принять за одно, тогда вершина A просто исчезнет.) Однако в лемме, доказанной в § 1, указаны особые свойства расположения знаков, если их перемен — только две. Оказывается, что с соблюдением этих свойств результат леммы Коши остаётся всё-таки верным: такая расстановка знаков невозможна. Так как этот результат будет использован в разных случаях: в §§ 3—5 этой главы и в главе XI, то мы формулируем и докажем его здесь в общем виде в качестве «усиленной леммы Коши».

Вместо расстановки знаков на рёбрах многогранника можно, конечно, говорить о расстановке знаков на отрезках — «рёбрах» некоторой сети на поверхности, гомеоморфной сфере, подчинив эту сеть некоторым необходимым условиям. Эта более абстрактная точка зрения полезна в приложениях леммы.

2. Усиленная лемма Коши. Пусть на поверхности, гомеоморфной сфере, дана сеть линий — «рёбер», не имеющих попарно общих точек, кроме концов — «вершин» сети, причём эта сеть обладает тремя свойствами: а) никакие две вершины не соединены двумя рёбрами; б) каждая из областей — «граней», на которые сеть разбивает поверхность, ограничена одной замкнутой цепью рёбер без кратных точек; в) ребро, соединяющее две вершины грани, принадлежит этой грани.

Пусть на некоторых гранях проведены ещё «новые рёбра», являющиеся их непересекающимися диагоналями, и притом так, что условия а) и в) не нарушаются. Эти рёбра делят «старые» грани на «новые» грани *).

---

*) Эти условия, конечно, выполняются для сети рёбер выпуклого многогранника и непересекающихся диагоналей его граней. Слово «линия» означает гомеоморфный образ прямолинейного отрезка.

Пусть некоторым рёбрам, как «старым», так и «новым», сопоставлены знаки плюс или минус, причём некоторые рёбра могут остаться неотмеченными. Вершину, к которой подходит хотя бы одно отмеченное ребро, назовём отмеченной; число их обозначим E.

Назовём вершину *особой*, если расстановка знаков на сходящихся в ней рёбрах отвечает случаю 3) леммы 1 § 1. То-есть число перемен знака вокруг такой вершины равно двум и все подходящие к ней рёбра не отмечены, кроме рёбер, принадлежащих одной «старой» грани, причём два крайних из этих рёбер отмечены одним знаком. Число особых вершин обозначим E^*.

Усиленная лемма Коши состоит в утверждении, что *общая сумма N перемен знаков при обходах вокруг всех вершин удовлетворяет неравенству*

$$N \leqslant 4E - 2E^* - 8. \tag{1}$$

Отсюда следует, что *не может быть такой расстановки знаков, при которой вокруг каждой неособой отмеченной вершины имеется не менее четырёх перемен знака.* Действительно, при такой расстановке было бы $N \geqslant 4(E - E^*) + 2E^*$, поскольку вокруг E^* особых вершин имеется по две перемены знака. А это противоречит неравенству (1).

Более того, в неравенстве (1) есть ещё «запас»: -8. Поэтому *можно допустить одну вершину вовсе без перемен знака или три вершины с двумя* (*произвольными*) *переменами знака*: всё равно вследствие этого «запаса» *такая расстановка знаков будет невозможной.*

Доказательство этой усиленной леммы Коши будет аналогично доказательству простой леммы Коши § 1 главы II.

3. Рассмотрим сеть, образованную одними отмеченными рёбрами; неотмеченные рёбра мы вовсе исключим из рассмотрения. Она разбивает рассматриваемую поверхность на области. Из условия а) леммы следует, что областей, ограниченных только двумя рёбрами, нет.

Если подсчитывать общее число перемен знака при обходах вокруг областей, то получим то же самое число N, потому что переход от одного ребра к соседнему происходит одновременно как вокруг вершины, так и вокруг области. При этом ребро, принадлежащее области, но не отделяющее её от других областей, проходится дважды (см. черт. 61, стр. 86). В связи с этим такое ребро считается за две стороны области. Поэтому, если F_n означает число областей с n сторонами, а K — общее число рёбер, то

$$2K = \sum_n nF_n. \tag{2}$$

Если E, K, F — числа вершин, рёбер и областей, то по обобщённой теореме Эйлера

$$E - K + F \geqslant 2. \tag{3}$$

Отсюда, умножая на 4 и пользуясь формулой (2), получаем

$$4E-8 \geqslant \sum_n 2(n-2) F_n. \tag{4}$$

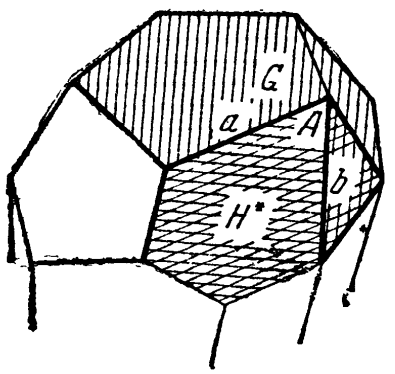
Поэтому если мы докажем, что общее число перемен знака удовлетворяет неравенству

$$N \leqslant \sum_n 2(n-2) F_n - 2E^*, \tag{5}$$

то тем более будет верно неравенство (1).

Эту оценку (5) для общего числа перемен знака мы получим подсчётом перемен знака вокруг областей.

4. Пусть G — одна из областей в сети отмеченных рёбер. Будем говорить, что её вершина A есть *особая вершина в области* G, если 1) вершина A — особая в смысле определения, данного в лемме; 2) стороны области G, сходящиеся в A, суть как раз два крайних ребра в ряду подходящих к A отмеченных рёбер, которые лежат на одной «старой грани»; согласно определению особой вершины эти крайние рёбра отмечены одним знаком.



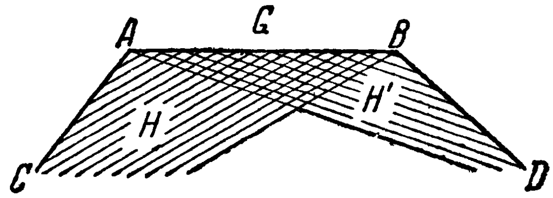
Черт. 150.

Из свойств особых вершин сети, указанных в лемме, легко вытекают следующие свойства вершин, особых в любой области G:

1) Всякая особая вершина сети оказывается особой в одной и только одной области.

2) В особой вершине области G нет перемены знака при обходе вокруг области G.

3) Если вершина A области G — особая в G, то сходящиеся в ней стороны a, b области G суть рёбра или диагонали одной старой грани H. Во всяком случае они вырезают из H некоторую часть H^*, которую мы также назовём «гранью». H^* совпадает с H только в том случае, если оба указанных ребра суть (старые) рёбра грани H (черт. 150); грань H^* покрыта горизонтальной штриховкой, область G — вертикальной, а грань H — наклонной. Грань H^* есть часть старой грани H, остальная часть грани H попала в G. Область G и грань H^* лежат по разные стороны от рёбер a, b (по крайней мере вблизи них*). H^* есть как раз та часть грани H, на которой лежат подходящие к A отмеченные рёбра, откуда ясно, что H отделена от G крайними из этих рёбер.



Черт. 151.

*) Заранее вовсе не ясно, что грань H^* не может входить в область G; хотя H^* разрезана «новыми рёбрами», но некоторые её куски могли бы входить в G. Однако вблизи указанных рёбер этого быть не может, в чём и состоит наше утверждение.

4) Если две соседние вершины A и B области G — особые в G, то все три стороны AB, AC, BD области G принадлежат одной грани (черт. 151). Действительно, как только что отмечено, стороны AB, AC принадлежат одной грани H, отделённой от G, и точно так же стороны AB и BD принадлежат одной грани H', отделённой от G. Но по одну сторону от AB может лежать только одна грань, а потому H и H' совпадают.

5. После этих замечаний обратимся к оценке числа перемен знака при обходе вокруг любой области G.

Пусть e_G — число всех вершин области G, $\overset{*}{e}_G$ — число её особых вершин, а n_G — число перемен знака при обходе вокруг G. Покажем, что

$$n_G \leqslant 2(e_G - \overset{*}{e}_G - 2). \tag{6}$$

Так как в особых вершинах нет перемен знака, то

$$n_G \leqslant e_G - \overset{*}{e}_G;$$

кроме того, n_G заведомо чётно и поэтому

$$n_G \leqslant 2\left[\frac{e_G - \overset{*}{e}_G}{2}\right], \tag{7}$$

где прямые скобки обозначают, как принято, целую часть заключённого в них числа.

Если $x \geqslant 3$, то, как легко проверить,

$$\left[\frac{x}{2}\right] \leqslant x - 2.$$

Поэтому при $e_G - \overset{*}{e}_G \geqslant 3$ из (7) следует нужный нам результат:

$$n_G \leqslant 2(e_G - \overset{*}{e}_G - 2). \tag{8}$$

Предположим теперь, что $e_G - \overset{*}{e}_G < 3$, т. е. что у области G есть максимум две неособые вершины. По доказанному выше областей только с двумя вершинами быть не может, а потому $e_G \geqslant 3$ и при $e_G - \overset{*}{e}_G < 3$ будет $\overset{*}{e}_G \geqslant 1$, т. е. область G наверное имеет особые вершины. Число же неособых вершин $e_G - \overset{*}{e}_G \leqslant 2$.

Докажем, что неособых вершин не может быть меньше двух, а если их две, то они не соседние.

Допустим противное и пусть идущие подряд вершины $A_1, \ldots A_{e-2}$ области G — особые, а две оставшиеся соседние вершины A_{e-1}, A_e — может быть, и неособые. Тогда из отмеченного выше последнего свойства особых вершин следует, что все стороны A_eA_1, $A_1A_2, \ldots$ $\ldots, A_{e-2}A_{e-1}$ принадлежат одной грани H^*. В таком случае сторона $A_{e-1}A_e$ также принадлежит H^*, потому что по условию в) леммы ребро исходной сети, соединяющее две вершины одной грани, принадлежит ей. Следовательно, если сторона $A_{e-1}A_e$ есть «старое ребро», то она есть ребро грани H^*, если же она есть «новое ребро», то она является диагональю грани H^*. В последнем случае сторона $A_{e-1}A_e$ отделяет от грани H^* некоторую её часть. Так или иначе, оказывается, что все стороны области G ограничивают область H^{**}, гомеоморфную кругу.

По основному свойству особых вершин из всех вершин $A_1, \ldots$ $\ldots, A_{e-2}$ должны исходить рёбра, лежащие между рёбрами A_iA_{i+1}. Эти рёбра должны быть, очевидно, диагоналями грани H^* и тем самым области H^{**}. По условию они не могут пересекаться. Но $A_1, \ldots$ $\ldots, A_{e-2}$ суть все вершины области H^{**}, кроме двух соседних A_{e-1}, A_e, и так как H^{**} гомеоморфна кругу, то из каждой вершины $A_1, \ldots$ $\ldots, A_{e-2}$ нельзя провести хотя бы по одной диагонали так, чтобы эти диагонали не пересекались*). (В частности, если $e=3$ и есть только одна особая вершина A_1, то диагоналей нет вовсе.) Следовательно, если и имеется две неособые вершины, то они несоседние.

Но если все вершины, кроме двух несоседних, — особые, то все стороны области G подходят к особым вершинам и потому на всех них стоят одинаковые знаки, т. е. число перемен знаков $n_G=0$. Вместе с тем в этом случае разность числа всех вершин и особых вершин $e_G-\overset{*}{e}_G=2$. Поэтому

$$n_G=2\,(e_G-\overset{*}{e}_G-2),$$

т. е. оценка (6) имеет место также в случае $e_G-\overset{*}{e}_G<3$.

6. Сложив числа перемен знаков n_G для всех областей G, получим общее число перемен знаков N и в силу оценки (6) будем иметь

$$N=\sum n_G\leqslant\sum 2\,(e_G-2)-2\sum \overset{*}{e}_G\,. \tag{9}$$

Если F_n есть число областей G с n вершинами, т. е. с n сторонами, то

$$\sum 2\,(e_G-2)=\sum_n 2\,(n-2)F_n. \tag{10}$$

Далее, каждая особая вершина сети является вершиной, особой в одной и только одной области. Поэтому сумма чисел особых вершин по всем областям равна числу всех особых вершин сети, т. е.

$$\sum \overset{*}{e}_G=E^*. \tag{11}$$

Поэтому оценку (9) можно переписать так:

$$N\leqslant\sum_n 2\,(n-2)\,F_n-2E^*.$$

Таким образом, неравенство (5) доказано, а вместе с ним доказана и вся усиленная лемма Коши.

*) Строгое доказательство получается немедленно индукцией по числу вершин.

§ 3. Стационарность двугранных углов многогранника при стационарности его плоских углов

1. Пусть P — выпуклый многогранник; он может быть замкнутым, бесконечным или может иметь границу.

Разобьём его грани на произвольные части отрезками (или полупрямыми в случае бесконечных граней), *не встречающимися внутри граней. Концы этих отрезков могут, следовательно, лежать только на рёбрах или в вершинах многогранника**).

Каждую часть грани мы будем считать гранью, отрезки или полупрямые, разбивающие грани, — рёбрами, концы этих отрезков (*или полупрямых*) — *вершинами*. Таким образом, у многогранника появляются «ненастоящие» рёбра, лежащие внутри его истинных граней, и «ненастоящие» вершины, лежащие внутри его истинных рёбер. Всюду дальше в этом и в следующих параграфах грани, рёбра и вершины будут пониматься в указанном обобщённом смысле.

Будем рассматривать непрерывную деформацию многогранника P с изменением некоторого параметра t, причём начальному положению отвечает $t=0$. Деформацию мы подчиняем следующим условиям:

1) Каждая вершина, включая и «ненастоящие» движется с определённой (может быть, переменной) скоростью, т. е. её координаты суть дифференцируемые функции от t.

2) Ни новых вершин, ни новых рёбер не появляется.

Из этих условий с очевидностью вытекает, что истинные грани многогранника не ломаются иначе, как по заранее введённым ненастоящим рёбрам, и что их части, принятые за грани, вращаются вокруг их общих рёбер с определёнными скоростями, причём самые рёбра также вращаются и меняют свою длину. Очевидно также, что все элементы многогранника, в частности плоские и двугранные углы, меняются с определёнными скоростями, т. е. суть дифференцируемые функции от t. Вовсе не предполагается, что многогранник должен оставаться выпуклым.

Дальше речь идёт именно о таких деформациях.

Нас интересуют условия, при которых из стационарности плоских углов следует стационарность двугранных углов. Решение этого вопроса получится из соединения леммы 1 § 1 с усиленной леммой Коши, доказанной в § 2.

В лемме 1 § 1 возможен случай 4), когда вокруг вершины нет перемен знаков, но есть отмеченные рёбра. Однако, как там указано, этот случай может иметь место лишь в вершине угла, сводящегося к двугранному, и притом только тогда, когда этот угол так и остаётся двугранным (с точностью первого порядка, конечно). Отсюда ясно,

---

*) Без этого условия из стационарности плоских углов не может вытекать стационарность двугранных углов, как это ясно из замечания, сделанного в конце § 1. Если, например, разбить грань куба, проведя в ней две диагонали, то двугранные углы не будут стационарными.

что такие вершины можно исключить вовсе: все ненастоящие рёбра, подходящие к ним, не отмечены и могут быть исключены, а оба настоящих ребра, подходящие к одной такой вершине, образуют одно ребро.

Итак, случай 4) леммы 1 § 1 исключается, и остаются, не считая отсутствия отмеченных рёбер, только случаи 1), 2) и 3), которые как раз входят в усиленную лемму Коши. Это приводит к теоремам о стационарности двугранных углов выпуклых многогранников.

2. Теорема 1. *Если при деформации замкнутого выпуклого многогранника все углы на его гранях стационарны, то все его двугранные углы также стационарны.*

Сопоставим каждому ребру многогранника знак начальной скорости изменения двугранного угла при этом ребре; рёбра со стационарными двугранными углами оставим неотмеченными. Так как плоские углы стационарны, то расположение знаков вокруг каждой вершины должно удовлетворять лемме 1 § 1. Однако по усиленной лемме Коши, доказанной в § 2, расположение знаков с такими условиями невозможно, если хотя бы одно ребро отмеченно знаком. Поэтому все рёбра должны быть неотмеченными, что и требовалось доказать *).

3. Теорема 2. *Пусть P — конечный выпуклый многогранник, ограниченный одной замкнутой ломаной и обладающий тем свойством, что никакая его внутренняя, т. е. не лежащая на границе, вершина не соединена с границей более чем одним ребром. Если при деформации такого многогранника все его плоские углы при внутренних вершинах стационарны, то все двугранные углы также стационарны.*

Отождествив мысленно все точки границы многогранника P в одну точку O, мы превратим его в поверхность $\overline{P}$, гомеоморфную сфере. Она будет разбита на грани сетью P' внутренних рёбер многогранника P с условием, что в P' все рёбра, подходившие к границе многогранника P, сходятся в одной точке O. При этом по условию, наложенному на многогранник P, никакая вершина не будет соединена с вершиной O двумя рёбрами. Поэтому сеть на поверхности $\overline{P}$ удовлетворяет условиям, поставленным в усиленной лемме Коши.

Допустим, что многогранник P деформируется так, что плоские углы при внутренних вершинах стационарны, а двугранные углы не

*) В отличие от теоремы 1 § 2 гл. III о равенстве двугранных углов при равенстве плоских углов, данная теорема для многогранников, вырождающихся в дважды покрытые многоугольники, не верна даже при том условии, что, деформируясь, многогранник остаётся выпуклым (исключая тривиальный случай дважды покрытого треугольника). Возьмём, например, дважды покрытый квадрат $ABCD$ со стороной, равной a, и выдвинем вершину D из его плоскости на высоту $h=vt$, где v — скорость движения вершины D. Получим тетраэдр с ребром $CD=\sqrt{a^2+h^2}\approx a+\frac{1}{2}\frac{h^2}{a}=a+\frac{1}{2}\frac{v^2}{a}t^2$. Отсюда легко видеть, что изменение плоских углов будет порядка t^2, т. е. все они стационарны, в то время как изменение двугранных углов будет, очевидно, порядка t.

стационарны. Тогда, расставив на его рёбрах знаки согласно изменению двугранных углов, получим вокруг внутренних вершин распределения знаков, предусмотренные леммой 1 § 1. Если эти знаки перенести на рёбра сети P', то только вокруг вершины O распределение знаков окажется не подчинённым никаким условиям. Но усиленная лемма Коши утверждает, что даже при наличии одной такой исключительной вершины расстановка знаков с условиями леммы 1 § 1 невозможна. Поэтому двугранные углы не могут не быть стационарными.

Теорема 3. *Если на бесконечном выпуклом многограннике, из каждой вершины которого исходит не более одного бесконечного ребра, все плоские углы стационарны, то и двугранные углы стационарны.*

Для доказательства нужно только отрезать от многогранника конечную часть так, чтобы к её границе подходили только бесконечные рёбра. Тогда останется сослаться на теорему 2.

Так как на бесконечном многограннике с кривизной 2π все бесконечные рёбра параллельны и потому заведомо не могут исходить из вершин более чем по одному, то в теореме 3 заключается

Теорема 4. *Если при деформации бесконечного выпуклого многогранника с полной кривизной 2π плоские углы стационарны, то двугранные углы тоже стационарны.*

4. Для бесконечного многогранника, не удовлетворяющего условию теоремы 3, из стационарности плоских углов стационарность двугранных углов, вообще говоря, не следует. Пример тому даёт деформация многогранного угла.

Бесконечный выпуклый многогранник, обладающий непараллельными бесконечными рёбрами, имеет предельный угол, не вырождающийся в полупрямую. Рёбра этого угла параллельны бесконечным рёбрам многогранника, а потому при рассматриваемых деформациях многогранника они вращаются с определёнными скоростями, и предельный угол соответственно деформируется.

Теорема 5. *Если бесконечный выпуклый многогранник, предельный угол которого не вырождается в полупрямую, деформируется так, что все углы на его гранях и его предельный угол стационарны* *), *то двугранные углы многогранника также стационарны.*

Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник с предельным углом V, не сводящимся к полупрямой. Возьмём любое бесконечное ребро многогранника P и пусть $p_1, \ldots, p_n$ — все бесконечные рёбра, парал-

---

*) Рёбра предельного угла параллельны бесконечным рёбрам многогранника. Поэтому условие его стационарности равносильно стационарности направлений бесконечных рёбер. С другой стороны, плоские углы предельного угла полностью определяются плоскими углами бесконечных граней многогранника: они равны углам между их бесконечными сторонами. Поэтому достаточно требовать лишь стационарности двугранных углов предельного угла. Это — двугранные углы при классах параллельных бесконечных рёбер в смысле § 4 гл. III.

лельные данному, включая его самого, и принадлежащие последовательно смежным бесконечным граням (см. черт. 84 на стр. 162). Все эти рёбра $p_1, \ldots, p_n$ объединим в один класс. Так, совокупность всех бесконечных рёбер распадается на классы. В частности, класс может содержать только одно ребро, если у граней, смежных по этому ребру, нет рёбер, ему параллельных.

Дополним многогранник P несобственными вершинами и рёбрами по следующему правилу:

1) Все бесконечные рёбра одного класса сходятся в одной несобственной вершине, а рёбра разных классов — в разных вершинах.

2) Несобственные вершины естественно образуют циклическую последовательность. Каждые две последовательные несобственные вершины соединяем одним несобственным ребром.

Дополненный таким образом многогранник P мы обозначим $\overline{P}$; он будет гомеоморфен простому многоугольнику: «граница» его слагается из несобственных рёбер. Каждая грань многогранника $\overline{P}$ будет ограничена замкнутой ломаной без кратных точек. Именно, границы бесконечных граней с параллельными рёбрами замыкаются в несобственных вершинах, а границы бесконечных граней с непараллельными бесконечными рёбрами замыкаются несобственными рёбрами.

Каждые две вершины A, B многогранника $\overline{P}$ могут быть соединены только одним ребром и это ребро принадлежит грани с вершинами A, B. Действительно, если обе вершины A, B — одновременно собственные или несобственные, то это утверждение очевидно. Пусть теперь вершина A — собственная, а B — несобственная. Тогда соединяющее их ребро AB — бесконечное. В несобственной вершине B могут сходиться ещё только бесконечные рёбра, параллельные AB, но они не могут соединять её с той же собственной вершиной A. Поэтому ребро AB — единственное, соединяющее вершины A, B, и оно принадлежит двум смежным по нему граням. Никакие другие грани не могут содержать обе вершины A, B, потому что другие грани с несобственной вершиной B по условию имеют рёбра, параллельные AB, и смежны по этим рёбрам, а тогда они, очевидно, не могут иметь A своей вершиной.

Возьмём теперь второй экземпляр $\overline{P}'$ многогранника $\overline{P}$ и отождествим у обоих этих многогранников соответственные несобственные рёбра и вершины. В результате получим абстрактный многогранник $\overline{P} + \overline{P}'$, который будет гомеоморфен сфере и будет обладать теми же свойствами строения, какие только что установлены для многогранника $\overline{P}$:

а) Каждая грань на $\overline{P} + \overline{P}'$ ограничена одной замкнутой ломаной без кратных точек.

б) Если две вершины одной грани соединены ребром, то последнее принадлежит этой грани.

Это — как раз те условия, которым подчинены сети рёбер, рассматриваемые в усиленной лемме Коши. Поэтому эта лемма может быть применена к многограннику $\overline{P}+\overline{P'}$.

Если исходный многогранник P деформируется, то отметим рёбра многогранника $\overline{P}+\overline{P'}$ знаками по следующему правилу. Каждому собственному ребру на $\overline{P}$ сопоставляем знак начальной скорости изменения двугранного угла в P при этом ребре. Соответствующему ребру на $\overline{P'}$ сопоставляем противоположный знак. Рёбра стационарных двугранных углов, а также все несобственные рёбра оставляем неотмеченными.

Для доказательства теоремы нужно показать, что если все плоские углы многогранника P и его предельный угол V стационарны, то отмеченных рёбер быть не может.

Вследствие стационарности плоских углов расположение знаков вокруг каждой собственной вершины многогранника $\overline{P}+\overline{P'}$ обладает свойствами, указанными в лемме 1 § 1 (только на $\overline{P'}$ знаки противоположные, что не может играть роли для применимости усиленной леммы Коши, как ясно из её формулировки).

Покажем теперь, что вокруг каждой несобственной вершины либо все рёбра не отмечены, либо имеется не менее четырёх перемен знака.

Пусть в несобственной вершине A сходятся бесконечные рёбра $p_1, \ldots, p_n$ многогранника $\overline{P}$ и соответственно рёбра $p'_1, \ldots, p'_n$ многогранника $\overline{P'}$. Несобственные рёбра по условию не отмечены и потому их можно не рассматривать. Все рёбра p_i параллельны и при бесконечном подобном сжатии многогранника P к вершине его предельного угла V дают одно ребро p на угле V. Бесконечные грани, подходящие к крайним рёбрам p_1 и p_n, дают грани угла V, сходящиеся в ребре p. Поэтому если α — двугранный угол предельного угла V при ребре p, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — двугранные углы многогранника P при рёбрах $p_1, \ldots, p_n$, то

$$\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Если предельный угол стационарен, то $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=0} = 0$ и потому

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)_{t=0} + \ldots + \left(\frac{d\alpha_n}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

Следовательно, либо все углы α_i стационарны, либо начальные скорости их изменения меняют знак.

Так как на рёбрах $p'_1, \ldots, p'_n$ ставятся противоположные знаки, то в первом случае все рёбра вокруг вершины A не отмечены, а во втором случае получается не менее четырёх перемен знака (минимум по одной перемене в каждой последовательности $p_1, \ldots, p_n$ и $p'_1, \ldots, p'_n$ и две перемены при переходе от одной из них к другой).

Итак, оказывается, что если бы были отмеченные рёбра, то расстановка знаков на рёбрах многогранника $\overline{P}+\overline{P'}$ была бы именно такой, невозможность которой устанавливается усиленной леммой Коши. Следовательно, отмеченных рёбер быть не может, и теорема доказана.

5. Теорема 6. *Если выпуклый многогранник P, ограниченный одной замкнутой ломаной, деформируется так, что все углы на его гранях, а также углы между каждой парой граничных рёбер, сходящихся в одной вершине, стационарны, то и все его двугранные углы стационарны.*

Сопоставим каждому ребру многогранника P знак начальной скорости изменения соответствующего двугранного угла. Рёбра со стационарными углами, а также граничные рёбра оставим не отмеченными. Тогда расположение знаков вокруг каждой внутренней вершины будет удовлетворять условиям леммы 1 § 1.

Пусть A — граничная вершина и p, q — сходящиеся в ней граничные рёбра. Натянув на них плоский угол (pq), получим выпуклый многогранный угол с вершиной A, у которого все плоские углы стационарны. Поэтому либо все рёбра, сходящиеся в A, не отмечены, либо вокруг A имеется по крайней мере две перемены знака, включая знаки, которые нужно теперь сопоставить рёбрам p, q. Если перемен знака не менее четырёх, то на сходящихся в A внутренних рёбрах многогранника P есть хотя бы одна перемена знака. Если же перемен знака только две, то расстановка знаков должна быть такой, как указано в третьем случае леммы 1 § 1: все отмеченные рёбра лежат на одной истинной грани и крайние из них отмечены одним знаком. Эти крайние рёбра не могут быть рёбрами p, q, так как на угле (pq) нет вообще никаких рёбер. Поэтому опять-таки на внутренних рёбрах многогранника P, сходящихся в вершине A, есть перемена знака.

Теперь берём второй экземпляр P' многогранника P, расставляем на его рёбрах противоположные знаки и отождествляем соответственные граничные рёбра на P и P'. Тогда, рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 5, убедимся, что наличие отмеченных рёбер приводит к такой расстановке знаков на абстрактном многограннике $P+P'$, которая по усиленной лемме Коши невозможна. Поэтому отмеченных рёбер нет, и теорема доказана.

Пользуясь «запасом», имеющимся в усиленной лемме Коши, в теореме 6 достаточно требовать стационарность углов между всеми парами смежных граничных рёбер, кроме трёх.

Далее, теорема 6 дословно вместе с её доказательством переносится на «локально выпуклые» многогранники, т. е. такие, у которых все многогранные углы как при внутренних, так и при граничных вершинах — выпуклые (тогда, натягивая угол на пару граничных рёбер, сходящихся в одной вершине, получим замкнутый выпуклый многогранный угол).

6. Вопрос о дополнительных условиях, обеспечивающих стационарность двугранных углов многогранника, ограниченного несколькими ломаными, остаётся открытым. Тривиальным было бы потребовать, чтобы плоские углы на выпуклой оболочке многогранника были стационарны,—

тогда всё свелось бы к теореме о замкнутом многограннике. Такое условие налагается, однако, на всю границу многогранника сразу, между тем как условие теоремы 6 формулируется для каждой граничной вершины в отдельности. Вопрос стоит о таких локальных условиях, а не об условиях «в целом».

§ 4. Жёсткость многогранников и равновесие стержневых систем

1. В этом параграфе мы рассмотрим следствия полученных в §§ 1 и 3 результатов с точки зрения механики.

Теорема 1. *Замкнутый выпуклый многогранник с жёсткими гранями — жёсткий.*

Жёсткость граней означает, что при всякой деформации многогранника длины их рёбер и углы стационарны. Но по теореме 1 § 3 при стационарности плоских углов стационарны также двугранные углы. Отсюда следует, что начальная деформация многогранника должна сводиться к движению.

Этот вывод основан на очевидной общей лемме:

Если при деформации какого бы то ни было многогранника все его рёбра, а также плоские и двугранные углы стационарны, то начальная деформация есть движение *).

Совершенно так же из других теорем § 3 вытекают соответствующие теоремы о жёсткости выпуклых многогранников.

2. Между кинематикой и статикой твёрдого тела существует, как известно, полная формальная аналогия. Если векторам угловых скоростей сопоставить силы, а скоростям — моменты пар, то сложению движений будет соответствовать сложение сил. В частности, условиям взаимной компенсации движений будут соответствовать условия равновесия. [Действительно, система сил p_i и пар m_j эквивалентна силе $p = \sum p_i$ и паре $m = \sum m_j + \sum (p_i \times r_i)$, где r_i — вектор от точки

*) Для доказательства возьмём какую-либо грань Q_1 многогранника P_0 и закрепим её вершину A, направление одной из сторон AB грани Q_1, исходящей из A, и направление плоскости самой грани Q_1. Этим самым мы заранее исключим только движение многогранника P_0 как твёрдого тела.

Так как теперь вершина A и направление стороны AB неподвижны, а по доказанному длина стороны AB стационарна, то вершина B неподвижна. Под этим мы подразумеваем, что её начальная скорость равна нулю. Далее, угол между стороной AB и следующей стороной BC стационарен, а вся плоскость грани Q_1 неподвижна, поэтому направление стороны BC также неподвижно. А тогда из стационарности длины BC следует неподвижность вершины C. Продолжая это рассуждение, убедимся, что все вершины грани Q_1 неподвижны.

Угол между гранью Q_1 и гранью Q_2, смежной с Q_1 по стороне AB, стационарен, поэтому плоскость грани Q_2 неподвижна; кроме того, неподвижны её вершины AB. Применяя к грани Q_2 предыдущее рассуждение, убедимся, что все её вершины неподвижны. А переходя к следующим смежным граням и т. д., убедимся, что все вершины многогранника P_0 оказываются неподвижными. Итак, исключив только движение многогранника как целого, мы сделаем все его вершины неподвижными. Тем самым, без исключённого движения они могли двигаться только так, как если бы многогранник был твёрдым, что и требовалось доказать.

приложения силы p до точки приложения силы p_i. И точно так же движения с угловыми скоростями ω_i и линейными скоростями v_j дают движение с угловой скоростью $\omega=\sum\omega_i$ и линейной скоростью $v=\sum v_j+\sum(\omega_i\times r_i)$, где r_i — вектор от точки на оси вращения ω до точки на оси вращения ω_i.]

Эта аналогия позволяет пересказывать кинематические утверждения на язык статики, и обратно. Поэтому и наши кинематические теоремы о стационарности двугранных углов или о жёсткости многогранника с твёрдыми гранями должны допускать «силовую» интерпретацию.

Приведём одну такую интерпретацию; в ней речь идёт не о многограннике, составленном из твёрдых граней, а о системе стержней, образующих совокупность рёбер выпуклого многогранника. При этом согласно принятому нами условию среди рёбер допускаются также ненастоящие, проходящие внутри истинных граней между точками их границ. Стержни мыслятся скреплёнными в концах на шарнирах.

Мы будем говорить, что такая система находится под напряжениями без воздействия внешних сил, если вдоль каждого стержня действуют растягивающие или сжимающие силы, причём эти силы в вершинах уравновешиваются. Пример системы стержней под напряжениями был уже приведён в n° 3 § 6 главы II, черт. 71.

Покажем, что теорема 1 эквивалентна следующей:

Теорема 2. *Система стержней, образующих совокупность рёбер замкнутого выпуклого многогранника, не может находиться под напряжениями без воздействия внешних сил.*

Для доказательства теоремы 2 вспомним, что при выводе теоремы 1 § 3 о стационарности двугранных углов мы исходили из изображения относительных вращений соседних граней векторами угловых скоростей, направленными вдоль рёбер. При этом суммы этих векторов вокруг одной вершины равнялись нулю. Доказательство теоремы 1 § 3 как раз и сводилось к доказательству того, что на рёбрах замкнутого выпуклого многогранника такие векторы расположить невозможно (если не все они равны нулю). Стоит лишь интерпретировать эти векторы как напряжения, и мы получим теорему 2.

Видно также, что, и обратно, теорема 1 § 3 следует из теоремы 2.

3. Можно высказать следующее общее утверждение:

Теорема 3. *Пусть P — произвольный односвязный**) *конечный многогранник, а R — система его рёбер, исключая граничные.*

*) То-есть такой, на котором каждый контур ограничивает какую-либо часть многогранника, являясь полной её границей. Этим свойством обладают только многогранники, гомеоморфные сфере или кругу. Из доказательства будет видно, что односвязность имеет существенное значение, и на примерах легко убедиться, что без неё из жёсткости невозможность напряжений может и не следовать. Влияние связности (групп Бетти) поверхности на взаимосвязь между разными аспектами понятия о её бесконечно малом изгибании и соответственно жёсткости замечено Н. В. Ефимовым; см. Н. В. Ефимов, Качественные вопросы теории деформаций поверхности, Успехи матем. наук, т. III, вып. 2 (24), 1948, стр. 113—114.

Утверждение о жёсткости многогранника P при условии жёсткости его граней равносильно утверждению, что система R не может находиться под напряжениями без воздействия внешних сил, если даже свободные концы рёбер, т. е. концы рёбер, подходящих к границе многогранника P, закреплены так, что напряжение в них компенсировано реакцией опоры. (Для замкнутого многогранника оговорка о рёбрах со свободными концами отпадает.)

Покажем, что из невозможности напряжений в системе ребёр следует жёсткость многогранника.

Пусть P — многогранник, составленный из твёрдых граней, скреплённых на шарнирах вдоль рёбер. Пусть $\boldsymbol{\omega}_i$ — угловые скорости вращения граней. Тогда условие, что грани скреплены вдоль ребёр, означает, что относительное вращение соседних граней Q_j, Q_k происходит вокруг их общего ребра, т. е. что разность их угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_j - \boldsymbol{\omega}_k$ направлена вдоль ребра.

Зададим на многограннике ориентацию, указав направление обхода малого контура. Тогда, если две грани Q_j, Q_k имеют общее ребро AB и при обходе вокруг вершины A грань Q_i следует за Q_k, то при обходе вокруг вершины B грань Q_j предшествует Q_k. Поэтому если условиться рассматривать относительное вращение следующей грани относительно предыдущей, то при обходе вокруг A будем иметь на ребре AB вектор $\boldsymbol{\omega}_j - \boldsymbol{\omega}_k$, а при обходе вокруг B — вектор $\boldsymbol{\omega}_k - \boldsymbol{\omega}_j$. Естественно при этом считать первый вектор приложенным в вершине A, а второй — в вершине B.

Если теперь эти векторы интерпретировать как силы, то окажется, что ребро AB находится под растягивающим или сжимающим напряжением.

При обходе вокруг вершины по граням $Q_1, Q_2, \ldots$ мы вернёмся к исходной грани Q_1, а потому сумма всех разностей $\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_3 - \boldsymbol{\omega}_2, \ldots$ равна нулю. То-есть напряжения вдоль рёбер в вершинах уравновешиваются. Это верно для внутренних вершин, а в граничных вершинах напряжения уравновешиваются по условию реакцией опоры.

Мы приходим к тому, что система рёбер многогранника оказывается под напряжениями без воздействия внешних сил. Если это невозможно, то все разности $\boldsymbol{\omega}_j - \boldsymbol{\omega}_k$ обращаются в нуль, т. е. угловые скорости всех граней равны и двугранные углы стационарны.

Следовательно, из невозможности напряжений в системе рёбер следует жёсткость.

Докажем обратное утверждение. Пусть система рёбер многогранника P находится под напряжениями, уравновешивающимися в вершинах. Тогда в концах каждого ребра действуют противоположные векторы.

Зададим на P ориентацию, и пусть при обходе вокруг вершины A грань Q_j следует за Q_k; вектор напряжения вдоль общего ребра AB этих граней, приложенный в вершине A, обозначим $\boldsymbol{a}_{jk}$. В вершине B будет приложен вектор $\boldsymbol{a}_{kj} = -\boldsymbol{a}_{jk}$.

Перенумеруем все грани и припишем грани Q_1 произвольный вектор $\boldsymbol{\omega}_1$.

Если грань Q_i смежна с Q_1 по ребру, то приписываем ей вектор $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{a}_{1i}$, и так, переходя от каждой грани Q_j к смежной Q_k, будем приписывать этой последней вектор $\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{\omega}_j + \boldsymbol{a}_{kj}$. Покажем, что таким образом каждой грани будет однозначно приписан некоторый вектор независимо от пути, по которому мы шли к ней от грани Q_1.

Это равносильно тому, что при обходе по замкнутому пути мы каждый раз получаем то же значение вектора $\boldsymbol{\omega}$ для исходной грани. Но для обхода вокруг вершины это очевидно, потому что сумма векторов $\boldsymbol{a}_{ik}$ вокруг вершины равна нулю. А всякий замкнутый обход на односвязном многограннике можно разложить в сумму обходов вокруг вершин. (Именно здесь используется односвязность.)

Таким образом, каждой грани однозначно приписывается вектор $\boldsymbol{\omega}$. Интерпретируя его как угловую скорость, получим, что грани многогранника вращаются вокруг их общих рёбер. Но если многогранник жёсткий, то это невозможно, а тем самым и напряжения в системе его рёбер невозможны.

Доказанная таким образом теорема 3 позволяет пересказать в терминах стержневых систем все теоремы § 3, формулируя при этом подходящим образом имеющиеся в них дополнительные условия, как, например, условие теоремы 5 § 3 о стационарности предельного угла. При этом бесконечные многогранники естественно заменяются конечными. Точные формулировки соответствующих теорем мы оставляем читателю.

§ 5. О деформациях развёрток

1. Мы будем рассматривать выпуклые многогранники, грани, рёбра и вершины которых понимаются в обобщённом смысле согласно условию, введённому в начале § 3.

Один и тот же многогранник имеет бесконечно много разных развёрток. Мы ограничимся только такими развёртками, вершины которых совпадают с вершинами многогранника: каждая вершина развёртки есть вершина многогранника, и обратно. Это условие постоянно имеется в виду как в этом, так и в следующем параграфах.

Если P есть бесконечный выпуклый многогранник, то он имеет бесконечные грани, которые, сходясь друг с другом последовательно по бесконечным рёбрам, образуют таким образом то, что мы называем *«воронкой» многогранника P*.

Если бесконечные грани встречаются также по конечным рёбрам, то производим разрезы также по этим рёбрам. Говоря о воронке, мы всегда будем иметь в виду, что эти разрезывания уже произведены заранее, так что все конечные стороны воронки не склеены.

Воронку, разрезанную по любому бесконечному ребру, можно развернуть на плоскость. Разрезывание воронки по бесконечному ребру содержит произвол, для исключения которого мы будем рассматривать саму неразрезанную воронку. С внутренней точки зрения воронка полностью определяется заданием длин её граничных сторон-рёбер и углов между смежными сторонами.

Аналогичные соображения имеют место для любой развёртки бесконечного многогранника. Поэтому развёртку такого многогранника мы всегда будем считать состоящей из конечного числа конечных многоугольников и ещё из «воронки». В частных случаях конечных многоугольников может не быть вовсе, как это будет, например, для развёртки многогранного угла. Воронка в общем смысле есть развёртка из бесконечных многоугольников, которые в циклическом порядке склеиваются по бесконечным рёбрам. Так как в воронке все бесконечные рёбра уже считаются склеенными, то в рассматриваемых нами развёртках многогранников бесконечных рёбер нет.

Под естественной развёрткой конечного многогранника мы понимаем развёртку, образованную его гранями, а для бесконечного многогранника — развёртку, образованную его конечными гранями и воронкой бесконечных граней.

Мы говорим, что задано строение развёртки, если развёртка задана только как абстрактный комплекс указанием «закона склеивания», т. е. указанием отождествлений сторон и вершин многоугольников. При заданном строении развёртка полностью определяется указанием длин сторон и углов её многоугольников (включая воронку). Если развёртка состоит из одних треугольников, то задание углов будет лишним. Для всякого строения развёртки легко указать независимые «определяющие параметры», выбранные среди длин сторон и углов многоугольников. Однако такой выбор не будет играть для нас никакой роли, а потому мы будем просто говорить об определяющих параметрах, т. е. о длинах сторон-рёбер и об углах.

Сохраняя строение развёртки неизменным, можно непрерывно, во всяком случае в некоторых пределах, изменять её определяющие параметры. Важно иметь в виду, что при указании строения развёртки все её элементы: грани, их стороны и вершины, индивидуализированы, например, перенумерованы. Поэтому речь идёт о непрерывном изменении параметров, связанных именно с данными элементами, например, угла при данной вершине данного многогранника. (Это замечание важно потому, что развёртка может, вообще говоря, допускать отображение сама на себя, сохраняющее «закон склеивания»; примером может служить естественная развёртка любого правильного многогранника.)

Мы говорим, что *развёртка стационарна*, если её определяющие параметры стационарны, т. е. если они являются функциями некоторого параметра t и в начальный момент их производные по t равны нулю.

2. Рассмотрим произвольную развёртку R данного многогранника P. Пусть ребро L этой развёртки соединяет вершины A и B, проходя по каким-то граням многогранника P. Развернём на плоскость последовательно все эти грани, идя от вершины A к B; они покроют некоторый многоугольник Q, в котором ребро L окажется диагональю.

соединяющей вершины A и B (см. черт. 92 на стр. 189). Не исключено, конечно, что ребро L проходит по одним и тем же граням неоднократно, и тогда эти грани появляются в многоугольнике Q соответствующее число раз. Ребро L пересекает каждое ребро многогранника, а потому каждую грань лишь конечное число раз (исключая случай совпадения ребра L с ребром многогранника). Это легко доказать непосредственно *). Однако мы можем сослаться на то, что это утверждение содержится в более сильном результате, полученном в процессе доказательства леммы 3 § 2 главы IV.

Отсюда следует, что всякая развёртка многогранника получается из естественной путём конечного числа разрезываний и склеиваний. Поэтому и любые две развёртки одного многогранника получаются одна из другой аналогичным образом.

Отвлекаясь от многогранника, будем рассматривать две развёртки R и S, получающиеся друг из друга путём конечного числа разрезываний и склеиваний по прямолинейным отрезкам, причём так, что в результате не появляется новых вершин и вершины не исчезают; коротко говоря, развёртки имеют общие вершины. Каждое ребро развёртки S составляется из отрезков на гранях развёртки R так, что при последовательном склеивании этих граней на плоскости оно переходит в прямолинейный отрезок.

Мы будем говорить, что задано расположение ребра L развёртки S в развёртке R, если указано 1) какие вершины развёртки R оно соединяет; 2) по каким её многоугольникам оно последовательно проходит и 3) какие их стороны оно последовательно пересекает. Если задано расположение всех рёбер развёртки S в R, то мы говорим, что задано *расположение развёртки* S в R. Очевидно, задание расположения развёртки S в R полностью определяет закон разрезывания и склеивания, превращающий развёртку R в S, и тем самым определяет строение развёртки S.

Лемма 1. *Пусть две развёртки R_0 и S_0 получаются друг из друга разрезываниями и склеиваниями и «имеют общие вершины». Оставляя строение развёртки R_0 неизменным, будем менять её определяющие параметры, получая новые развёртки R. Тогда, если изменения параметров достаточно малы, для каждой развёртки R существует и притом единственная развёртка S, расположенная относительно R так же, как S_0 расположена относительно R_0. Определяющие параметры развёртки S суть дифференцируемые функции параметров развёртки R.*

Рассмотрим какое-либо ребро L_0 развёртки S_0. Если оно совпадает с одним из рёбер развёртки R_0, то сопоставляем ему в развёртке R соответствующее ребро.

*) Иначе на L можно было бы указать точку C, сколь угодно близко от которой оно пересекает какое-то ребро L' многогранника. Но так как вблизи C ребро L сводится к прямолинейному отрезку, то в таком случае оно совпадает с L'.

Пусть ребро L_0 не совпадает ни с одним ребром развёртки R_0. Тогда развернём на плоскость последовательно все те многоугольники развёртки R_0, по которым оно проходит. Воронку можно развернуть на плоскость, только разрезав её. Поэтому, если ребро L_0 пересекает воронку, то мы должны её разрезать. Это разрезывание производим по полупрямой, идущей из данной вершины и образующей данный угол с одной из данных конечных сторон воронки, подходящих к этой вершине. Тогда с изменением определяющих параметров разрезанная воронка меняется однозначно. В результате получим многоугольник Q_0, в котором L_0 будет диагональю. При малом изменении параметров развёртки R_0 многоугольник Q_0 меняется мало. Поэтому существует такое $\varepsilon_L > 0$, что если только все параметры изменились меньше чем на ε_L, то в изменённом многоугольнике всё же проходит диагональ L, соединяющая те же вершины и пересекающая те же стороны составляющих его многоугольников развёртки R. Эту диагональ L мы сопоставляем ребру L_0; она расположена в развёртке R так же, как L_0 расположена в развёртке R_0. Никакого другого отрезка того же расположения, очевидно, нет.

Беря теперь $\varepsilon > 0$ меньше всех ε_L для всех рёбер L развёртки S_0, убеждаемся, что если параметры развёртки R_0 изменились меньше чем на ε, то каждому ребру развёртки S_0 можно сопоставить и притом единственный отрезок, так же расположенный в изменённой развёртке R. Принимая все эти отрезки за рёбра развёртки S, получим, что S расположена в R так же, как S_0 расположена в R_0.

Так как ребро L развёртки S есть либо ребро развёртки R, либо диагональ многоугольника Q, то его длина, а также углы, образуемые им со сторонами многоугольника Q, суть дифференцируемые функции длин сторон и углов многоугольников развёртки R. (То, что длина диагонали и образуемые ею углы суть дифференцируемые функции длин сторон и углов многоугольника, — достаточно очевидно.)

Угол во всяком многоугольнике развёртки S слагается из углов многоугольников развёртки R и их частей, вырезаемых рёбрами, сходящимися в соответствующей вершине. Поэтому и углы развёртки S суть дифференцируемые функции сторон и углов в развёртке R. Тем самым второе утверждение леммы доказано.

3. Лемма 2. *Пусть выпуклый многогранник P_0 деформируется, быть может с нарушением выпуклости, так, что на нём не появляется ни новых вершин, ни новых рёбер, и тем самым строение его естественной развёртки R_0 сохраняется. Пусть на P_0 была дана другая его развёртка S_0. Тогда, если деформация достаточно мала, на деформированном многограннике P существует и притом единственная развёртка S, так же расположенная относительно его естественной развёртки R, как S_0 расположена относительно R_0. Эта развёртка S — единственная, достаточно близкая к развёртке S_0.*

Эта лемма уже содержится в лемме 1. Последнее утверждение леммы очевидно из того, что рёбра развёртки S по самому их построению, данному в доказательстве леммы 1, суть единственные отрезки, близкие к рёбрам исходной развёртки S_0.

Пусть теперь многогранник P_0 деформируется, может быть, с нарушением выпуклости, так, что новых вершин не появляется, но могут появляться новые рёбра. Это означает, что конечные грани многогранника могут переламываться по диагоналям, а бесконечные также по каким-то полупрямым, идущим из вершин. Например, можно сместить все вершины замкнутого многогранника P_0 так, чтобы граница их выпуклой оболочки была многогранником, близким к P. При этом вершины, лежавшие в одной плоскости, могут перестать лежать в одной плоскости, и тогда соответствующая грань сломается.

Число всех возможных диагоналей конечно, а потому число различных строений конечной части деформированного многогранника P конечно.

Переламывание бесконечных граней по новым бесконечным рёбрам не влияет на строение естественной развёртки, потому что в ней участвует вся совокупность этих граней, склеенная в воронку.

Если на многограннике P_0 заранее провести диагонали, по которым при данной деформации ломаются его грани, и принять их за рёбра, то деформированный многогранник P будет иметь естественную развёртку того же строения, что многогранник P_0 с этими новыми рёбрами. Поэтому согласно лемме 2 при достаточно малой деформации на каждом многограннике P можно построить развёртку S, соответствующую заранее заданной развёртке S_0 многогранника P_0.

Этот результат можно выразить следующим образом:

Лемма 3. *Если выпуклый многогранник P_0 деформируется достаточно мало без появления новых вершин, то на всяком деформированном многограннике P можно построить и притом единственную развёртку S, близкую к данной развёртке S_0 многогранника P_0.*

В частности, если многогранник P_0 деформируется с изменением некоторой переменной t, то определяющие параметры развёртки S суть однозначные функции от t.

§ 6. Жёсткость многогранника со стационарной развёрткой

1. Теорема 1. *Замкнутый выпуклый многогранник со стационарной развёрткой — жёсткий.*

Подробнее: пусть на замкнутом выпуклом многограннике P_0 задана какая-либо развёртка S_0, вершины которой совпадают с его вершинами. Пусть этот многогранник деформируется с непрерывным изменением некоторой переменной t без появления новых вершин. (На P_0 допускаются ненастоящие вершины внутри рёбер.) Тогда согласно лемме 3 предыдущего параграфа на каждом деформированном многограннике P_t (во всяком случае при t, близких к начальному значению $t=0$) однозначно строится развёртка S_t, близкая к S_0, и определяющие параметры этой развёртки суть однозначные функции от t. Пусть все они стационарны, т. е. при $t=0$ их производные равны нулю. Тогда бесконечно малая деформация многогранника P_0 сводится к движению, т. е. начальные скорости движения его вершин (а значит, и скорости вращения рёбер и граней) таковы, как если бы многогранник P_0 был твёрдым телом.

Доказательство. При деформации многогранника P_0 его грани могут ломаться по диагоналям, что ведёт к изменению строения его естественной развёртки. При этом возможно, что даже при t, сколь угодно близких к нулю, одни и те же грани будут ломаться по разным диагоналям. В таком случае мы выберем один из видов такого переламывания граней и будем принимать во внимание только соответствующие значения t. Если мы при этом докажем, что многогранник жёсткий, т. е. его бесконечно малая деформация сводится к движению, то тем самым теорема будет доказана, поскольку этот вывод применим к любому виду переламывания граней.

Действительно, промежуток изменения параметра t разбивается на некоторые множества $T_1, T_2, \ldots, T_m$, соответствующие каждое своему виду переламывания граней. Ограничиваясь одним k-м видом переламывания, мы ограничиваемся значениями t из множества T_k. Если $x(t)$ — координаты вершины многогранника P_t, то можно вычислять её производную $\dot{x}(0)$, ограничиваясь этими значениями t (лишь бы только среди них были сколь угодно близкие к нулю). Если мы докажем, что при закреплённых трёх вершинах вычисленная производная равна нулю при любом k, то будет равна нулю производная, вычисленная при обычном условии, что t пробегает любые значения. То-есть окажется, что при закреплении трёх вершин многогранник неподвижен, и тем самым его жёсткость будет доказана.

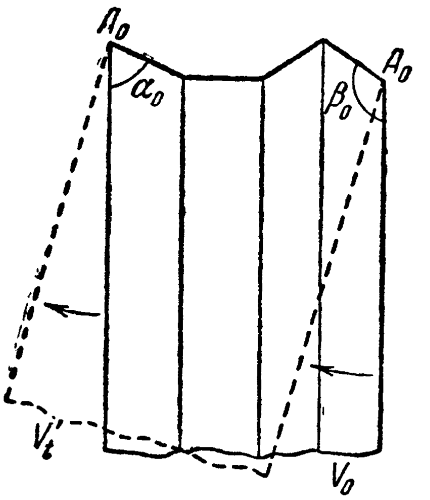
Итак, считаем, что деформированный многогранник P_t имеет вполне определённое строение. Возникшие на нём новые рёбра соответствуют диагоналям граней многогранника P_0. Поэтому, приняв эти диагонали за рёбра самого многогранника P_0, получим, что многогранники P_t и P_0 имеют естественные развёртки R_t и R_0 одного строения. По условию данная развёртка S_0 многогранника P_0 стационарна, т. е. производные определяющих параметров соответствующей переменной развёртки S_t многогранника P_t равны нулю при $t=0$.

Согласно лемме 1 § 5 определяющие параметры развёртки R_t суть дифференцируемые функции определяющих параметров развёртки S_t, соответствующей данной развёртке S_0 многогранника P_0. Поэтому естественная развёртка многогранника P_0 также стационарна. Но в таком случае все углы и длины сторон на гранях многогранника стационарны, так как грани его и суть грани его естественной развёртки. Согласно теореме 1 § 3 при стационарности углов на гранях все двугранные углы также стационарны. А отсюда вследствие леммы, указанной в начале § 4, следует жёсткость многогранника.

2. Теорема 2. *Бесконечный выпуклый многогранник, все бесконечные рёбра которого параллельны, — жёсткий, если какая-либо данная его развёртка стационарна.*

Детальное содержание этой теоремы раскрывается буквально так же, как было раскрыто содержание теоремы 1. В доказательстве мы сохраним обозначения теоремы 1: P_0 — данный многогранник, S_0 — данная его развёртка, а P_t и S_t — деформированный многогранник и его соответствующая развёртка.

Если грани многогранника P_0 ломаются, то опять выбираем только один вид их переламывания и ограничиваемся только соответствующими значениями t. Принимая диагонали, по которым ломаются грани многогранника P_0, за рёбра этого многогранника, получим, что естественные развёртки R_t многогранников P_t имеют то же строение, что и естественная развёртка R_0 многогранника P_0. Так как развёртка S стационарна, а параметры развёртки R суть дифференцируемые функции параметров развёртки S, то развёртка R стационарна. То-есть длины рёбер и углы конечных граней многогранника P_0 стационарны, а также стационарны длины рёбер и углы воронки. Однако углы воронки при её вершинах, являющихся концами бесконечных рёбер многогранника, представляют собой суммы углов бесконечных граней, а не самые эти углы. Поэтому для доказательства стационарности всех углов на бесконечных гранях требуются дополнительные соображения.



Черт. 152.

Пусть A_0 — одна из вершин воронки многогранника P_0, и из этой вершины исходит бесконечное ребро L_0. Пусть α_0, β_0 — углы на бесконечных гранях при вершине A_0. A_t, L_t, α_t, β_t пусть будут соответствующими элементами деформированного многогранника P_t. Разрезав воронку многогранника P_t по ребру L_t и развернув её на плоскость, получим бесконечный многоугольник V_t. При $t=0$ это будет развёрнутая воронка V_0 многогранника P_0 (черт. 152). Бесконечные стороны многоугольника V_0 параллельны, а у V_t они могут и не быть параллельными. Мы должны доказать, что $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=0} \equiv \dot{\alpha}(0) = 0$.

Допустим, однако, что $\dot{\alpha}(0) \neq 0$ и для определённости $\dot{\alpha}(0) > 0$. Будем рассматривать деформацию многоугольника V_0 в многоугольнике V_t. Исключая движение многоугольника как целого, можно считать неподвижными вершину A_0 и направление исходящего из неё конечного ребра. Деформацию разложим на две части: деформацию первого порядка и деформацию высшего порядка. Деформация первого порядка состоит в изменении элементов многоугольника с постоянными скоростями, равными начальным скоростям данной деформации. Деформация высшего порядка дополняет деформацию первого порядка до истинной *).

Рассмотрим сначала деформацию первого порядка. Все длины сторон многоугольника V_t и все его углы, кроме $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, являются соответствующими элементами воронки. Поэтому все они стационарны и при деформации первого порядка не меняются вовсе. Так как к тому же вершина A_0 и исходящая из неё конечная сторона неподвижны, то вообще все вершины многоугольника V_0 при деформации первого порядка остаются на месте. Только его бесконечные стороны вращаются так, что соответствующие углы меняются с начальными скоростями $\dot{\alpha}(0)$ и $\dot{\beta}(0)$. Так как в силу стационарности $\dot{\alpha}(0) = -\dot{\beta}(0)$, то при этом бесконечные стороны остаются параллельными. Следовательно, деформация первого порядка превращает многоугольник V_0 в многоугольник V'_t с теми же вершинами и с параллельными бесконечными сторонами (см. черт. 152).

Если отрезать от V'_t угол, прибавившийся к углу α_0, и приложить его с другой стороны, то получим исходный многоугольник V_0. Следовательно, V'_t есть развёртка воронки многогранника P_0, только разрезанная не по ребру L_0, а по линии L'_t, соответствующей бесконечным сторонам многоугольника V'_t. Линия L'_t пересекает L_0 в некоторой точке B'_t, и так как L_0 соответствует ребру многогранника P_0, то её отрезок $A_0B'_t$ короче отрезка $A_0B'_t$ линии L'_t. (Обе вершины A_0 многоугольника V_0 представляют одну вершину воронки, и потому мы их не различаем в этом рассуждении.)

Добавим теперь к деформации первого порядка остающуюся деформацию высшего порядка. Тогда многоугольник V'_t превратится в V_t, а его бесконечная сторона L'_t — в бесконечную сторону L_t многоугольника V_t. Если t достаточно мало, то деформация высшего порядка вызовет столь малый поворот линии L'_t, что она попрежнему будет пересекать L_0 в некоторой точке B_t, причём отрезок A_0B_t линии L_0 опять-таки будет короче отрезка A_0B_t линии L_t.

Однако линия L_t по условию соответствует ребру многогранника P_t, а потому никакие две её точки нельзя соединить более коротким отрезком, чем отрезок самой линии L_t. Получается противоречие, которое доказывает, что $\dot{\alpha}(0)$ не может быть отлично от нуля.

Таким образом, доказано, что каждый угол на бесконечной грани многогранника P_0 будет стационарным. Стационарность углов на конечных гранях была установлена вначале. Поэтому, воспользовавшись теоремой 4 § 3, приходим к заключению, что все двугранные углы многогранника также стационарны. Теперь, когда известна стационар-

---

*) Если $x(t)$ — величина, связанная с многоугольником V_t, то полагаем $x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \varepsilon(t)$. Здесь $\dot{x}(0)t$ даёт деформацию первого порядка, а $\varepsilon(t)$ — деформацию высшего порядка.

ность длин сторон и углов граней, а также двугранных углов, жёсткость многогранника устанавливается буквально тем же простым рассуждением, которое было применено в доказательстве теоремы 1.

3. Теперь обратимся к бесконечным многогранникам с непараллельными бесконечными рёбрами. Каждый такой многогранник P имеет предельный угол V, не вырождающийся в полупрямую. Каждому ребру L угла V отвечает хотя бы одно бесконечное ребро многогранника P, превращающееся в L, когда P бесконечно подобно сжимается в угол V.

Для жёсткости многогранника P недостаточно двух условий стационарности: его развёртки и предельного угла. Многогранник P можно деформировать так, что его развёртка и предельный угол не меняются вовсе, но ребро, отвечающее данному ребру L предельного угла, поворачивается, т. е. угол, образуемый этим ребром с подходящим к нему конечным ребром, меняется. Возможность такой деформации была доказана в § 5 главы IV для любого многогранника и там же был приведён очень простой её пример.

В связи с этим нужно ещё третье условие стационарности. Его формулировка и достаточность всех трёх условий содержатся в следующей теореме:

Теорема 3. *Пусть бесконечный выпуклый многогранник P с предельным углом, не вырождающимся в полупрямую, деформируется так, что выполнены три условия стационарности*: 1) *некоторой его развёртки S,* 2) *его предельного угла V и* 3) *некоторого его ребра L, соответствующего данному ребру угла V. При этих условиях многогранник — жёсткий, т. е. его бесконечно малая деформация первого порядка сводится к движению.*

Условие 3) *означает стационарность угла, образуемого ребром L с одним из подходящих к его вершине конечных рёбер воронки данной развёртки S**). Бесконечное ребро L заведомо лежит на этой воронке и, грубо говоря, дело идёт о его неподвижности на ней.

Доказательство этой теоремы проходит по тому же плану, что и доказательство теоремы 2. Прежде всего, так же как в теореме 2, из стационарности некоторой данной развёртки следует стационарность естественной развёртки многогранника P. (При этом опять-таки ограничиваемся одним видом переламывания конечных граней по диагоналям и принимаем эти диагонали за рёбра многогранника.) Далее, мы снова замечаем, что углы воронки многогранника образуются, вообще говоря, несколькими углами на его бесконечных гранях. Поэтому опять встаёт задача — доказать стационарность этих углов.

По условию 3) теоремы угол, образуемый ребром L с некоторым конечным ребром воронки развёртки S, стационарен. Из стационарности развёртки S и естественной развёртки легко заключить, что углы между их рёбрами стационарны. Поэтому углы, образуемые ребром L

*) Роль L может выполнять любой луч на многограннике P, соответствующий данной образующей предельного угла V.

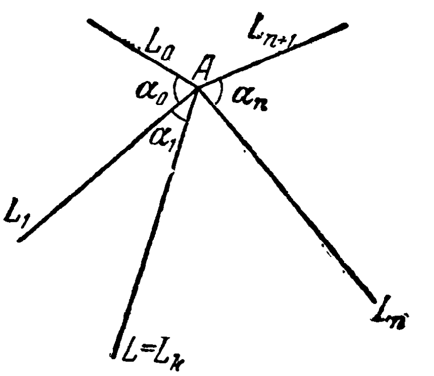
с конечными рёбрами многогранника P, подходящими к концу этого ребра, стационарны. Речь идёт, конечно, об углах, измеренных на многограннике P; они могут слагаться из углов нескольких граней.

Пусть $L_1, \ldots, L_n$ — все бесконечные рёбра, сходящиеся в конце A ребра L; одно из них, скажем L_k, есть L. Кроме того, к A подходят ещё два конечных ребра L_0, L_{n+1} воронки многогранника. Все рёбра перенумерованы в порядке их расположения; через α_i мы обозначим угол между i-м и $(i+1)$-м ребром (черт. 153).

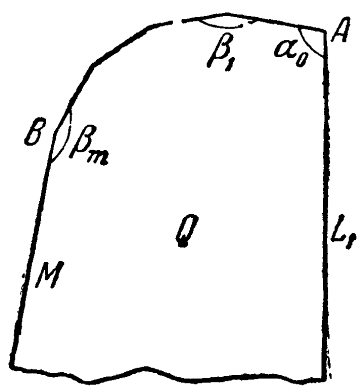
Углы между ребром $L_k = L$ и рёбрами L_0 и L_{n+1} равны, соответственно, $\alpha_0 + \ldots + \alpha_{k-1}$ и $\alpha_k + \ldots + \alpha_n$. Так как они стационарны, то

$$\dot{\alpha}_0 + \ldots + \dot{\alpha}_{k+1} = \dot{\alpha}_k + \ldots + \dot{\alpha}_n = 0. \tag{1}$$

Бесконечные рёбра L_i параллельны рёбрам предельного угла V, в которые они переходят при бесконечном подобном сжатии. Поэтому



Черт. 153.



Черт. 154.

углы между ними равны углам между рёбрами предельного угла V. Эти же последние по условию теоремы стационарны. Следовательно,

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \ldots = \dot{\alpha}_{n-1} = 0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что также

$$\dot{\alpha}_0 = \dot{\alpha}_n = 0. \tag{3}$$

Этим доказано, что все углы на бесконечных гранях при вершине A стационарны.

Пусть теперь Q — бесконечная грань, содержащая угол α_0 (черт. 154). Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ — другие её углы, причём β_m есть угол при её бесконечном ребре: бесконечная грань Q имеет два бесконечных ребра: одно L_1 с концом A, другое M с концом B. Все углы β_i, кроме β_m, являются вместе с тем углами воронки. Поэтому

$$\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_2 = \ldots = \dot{\beta}_{m-1} = 0. \tag{4}$$

Угол между рёбрами L_1 и M, как легко подсчитать, равен

$$\alpha_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_m - m\pi.$$

Но этот угол равен углу между соответствующими рёбрами предельного угла V, и так как этот последний стационарен, то

$$\dot{\alpha}_0+\dot{\beta}_1+\ldots+\dot{\beta}_m=0. \tag{5}$$

Пользуясь теперь равенствами (3), (4) и (5), получаем, что

$$\dot{\beta}_m=0.$$

Таким образом, все углы на грани Q стационарны и, в частности, стационарен угол между бесконечным её ребром M и смежным с ним конечным ребром. Поэтому для всех углов, сходящихся в той же вершине B, можно повторить рассуждение, которое было проведено выше в применении к углам, сходящимся в вершине A. Тогда окажется, что все углы при вершине B стационарны. Продолжая этот вывод, получим, что все углы на бесконечных гранях стационарны.

Теперь доказано, что углы на всех как конечных, так и бесконечных гранях стационарны, а по условию теоремы предельный угол многогранника тоже стационарен. Отсюда на основании теоремы 5 § 3 следует стационарность всех двугранных углов.

После этого жёсткость многогранника доказывается буквальным повторением рассуждения, проведённого в заключение доказательства теоремы 1.

4. Теорема 4. *Пусть P — конечный выпуклый многогранник, ограниченный одной замкнутой ломаной. Если стационарны некоторая его развёртка и все (пространственные) углы между смежными граничными рёбрами, то многогранник P — жёсткий.*

Доказательство этой теоремы представляет дословное повторение доказательства теоремы 1 с той единственной разницей, что нужно сослаться на теорему 6 § 3 о стационарности двугранных углов многогранника с границей.

(Так же как в теореме 6 § 3, здесь речь может идти о локально выпуклом многограннике и стационарность углов между смежными граничными рёбрами достаточно требовать для всех их пар, кроме трёх. И так же, как в § 3, остаётся открытым вопрос об условиях жёсткости многогранника, ограниченного несколькими ломаными.)

Отметим без доказательства ещё некоторые теоремы:

Теорема 5. *Если у шапки стационарна некоторая развёртка и граничные вершины могут двигаться только в плоскости края шапки, то шапка — жёсткая: она допускает тогда лишь движения вдоль плоскости края.*

Доказательство основано на склеивании двух симметричных шапок в один замкнутый многогранник.

Теорема 6. *Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник с параллельными бесконечными рёбрами, ограниченный одной бесконечной ломаной. Если стационарны некоторая его развёртка и все (пространственные) углы между смежными граничными рёбрами, то многогранник P — жёсткий.*

Теорема 7. *Пусть P — бесконечный выпуклый многогранник, имеющий непараллельные бесконечные рёбра, ограниченный одной бесконечной ломаной. Пусть выполнены следующие условия стационарности:* 1) *некоторой его развёртки,* 2) *его предельного угла,* 3) *пространственных углов между смежными граничными рёбрами. Тогда многограник P — жёсткий.*

§ 7. Обобщения

1. Мы ограничивались до сих пор рассмотрением таких деформаций многогранников, при которых они остаются многогранниками. Однако можно вообразить себе многогранник, сделанный из гибкого, но нерастяжимого материала, например из бумаги. Тогда естественно рассматривать такие его изгибания, при которых грани и рёбра не просто переламываются, но искривляются произвольным образом. Но вследствие условия «нерастяжимости материала» длины всех кривых на гранях должны при этом оставаться неизменными.

Такое изгибание замкнутого выпуклого многогранника с сохранением выпуклости невозможно, как было указано ещё в § 6 главы III.

Здесь нас интересует не изгибание, а бесконечно малое изгибание, т. е. мы не требуем неизменности длин кривых на гранях, но лишь их стационарности.

Бесконечно малая деформация определяется указанием скорости $\boldsymbol{v}$ движения каждой точки многогранника. Условие стационарности длин приводит к линейному дифференциальному уравнению для поля скорости $\boldsymbol{v}$.

Пусть $d\boldsymbol{x}$ — дифференциал вектора, конец которого зачерчивает кривую на поверхности, а $d\boldsymbol{v}$ — соответствующий дифференциал скорости. По стационарности длин

$$\frac{\partial}{\partial t}(d\boldsymbol{x})^2 = 0.$$

Но $\frac{\partial}{\partial t}(d\boldsymbol{x}^2) = 2d\boldsymbol{x}\frac{\partial}{\partial t}d\boldsymbol{x} = 2d\boldsymbol{x}\, d\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t} = 2d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v}$, так что

$$d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{v} = 0, \tag{1}$$

т. е. дифференциал вектора поверхности перпендикулярен к соответствующему дифференциалу скорости. Это и есть известное уравнение бесконечно малого изгибания. Наглядный смысл его ясен: отрезок $d\boldsymbol{x}$ имеет стационарную длину лишь в том случае, когда относительная скорость его концов ему перпендикулярна, т. е. когда один конец лишь вращается вокруг другого.

Если допускать искривления граней, то никакой многогранник не будет жёстким, потому что никакая плоская область, а следовательно, и никакая грань не является жёсткой, даже если закреплены её края.

Действительно, если взять скорость $\boldsymbol{v}$ в каждой точке плоской области G, перпендикулярной к плоскости этой области, то уравнение (1) будет заведомо выполнено. А вместе с тем можно обеспечить, чтобы скорость $\boldsymbol{v}$ исчезала на границе области.

Таким образом, в такой общей постановке вопрос о жёсткости многогранника решается всегда отрицательно по тривиальной причине.

Тем не менее и в этом случае можно получить некоторые нетривиальные результаты. Так, можно доказать:

Если замкнутый выпуклый многогранник подвергается бесконечно малому изгибанию, т. е. деформируется с искривлением граней, но так, что длины кривых на них стационарны, то совокупность его вершин движется при этом как твёрдое целое, т. е. скорости их движения в начальный момент таковы, как если бы они все принадлежали одному твёрдому телу (Сохранение выпуклости при деформации не требуется.)

Пусть замкнутый выпуклый многогранник P подвергается бесконечно малому изгибанию. Будем рассматривать соответствующую этому деформацию границы выпуклой оболочки совокупности его вершин. В начальный момент она и есть многогранник P. Поэтому её изменение также можно рассматривать как некоторую, конечно уже другую, деформацию того же многогранника.

Из уравнения (1) легко вывести, что если при деформации прямолинейного отрезка длина стационарна, то и расстояние между его концами стационарно. Поэтому в условиях формулированной только что теоремы расстояния между точками каждой грани многогранника оказываются стационарными.

Отсюда легко заключить, что деформация границы выпуклой оболочки совокупности вершин многогранника P также представляет его бесконечно малое изгибание. А тогда по теореме 1 § 6 эта деформация сводится к движению, и наша теорема доказана.

Аналогичные теоремы можно, очевидно, высказать для бесконечных многогранников и многогранников с границей, привлекая, конечно, условия для предельного угла и, соответственно, условия на границе. Точные формулировки и доказательства этих теорем представляют нерешённую ещё задачу.

2. Обобщение результатов этой главы на многогранники в неэвклидовых пространствах: Лобачевского и сферическом, производится дословно там, где речь идёт о конечных многогранниках, замкнутых или с границей. Здесь ничего не нужно менять ни в формулировках, ни в доказательствах. В случае бесконечных многогранников вопрос остаётся открытым из-за того, что в пространстве Лобачевского не исследована замена понятия предельного угла многогранника. Едва ли эта задача для многогранников, гомеоморфных плоскости, представляет большие трудности. В общем же случае вопрос остаётся совершенно открытым.

3. Бесконечно малые изгибания кривых поверхностей уже давно служат предметом многочисленных исследований в плане дифференциальной геометрии. Бесконечно малым изгибанием поверхности называется её деформация, при которой длины всех кривых на поверхности стационарны. Если поверхность не допускает бесконечно малых изгибаний помимо движений, то она называется жёсткой.

Отчёт об исследованиях бесконечно малых изгибаний кривых поверхностей можно найти в ряде статей в «Успехах математических наук» *). Мы упомянем только два результата, касающихся выпуклых поверхностей и аналогичных нашим теоремам о многогранниках.

1) Замкнутая выпуклая поверхность, не содержащая плоских кусков,— жёсткая. Эта теорема установлена впервые Либманом в несколько более узких предположениях. Она доказана пока лишь для трижды дифференцируемых поверхностей и только для поверхностей вращения без каких бы то ни было предположений дифференцируемости **).

2) Выпуклая поверхность, ограниченная одной замкнутой кривой и однозначно проектирующаяся на некоторую плоскость T, оказывается жёсткой, если требовать, чтобы скорости точек её границы были параллельны плоскости T. Эта теорема также доказана лишь для трижды дифференцируемых поверхностей. Она соответствует нашей теореме 5 § 6. Но там речь идёт только о шапке. Поэтому стоит задача: получить для многогранников аналогичную общую теорему.

---

*) Н. В. Ефимов, Качественные вопросы теории деформации поверхностей, Успехи матем. наук, т. III, вып. 2 (24) (1948); А. Д. Александров, О работах Кон-Фоссена, Успехи матем. наук, т. II, вып. 3 (19) (1947); С. Э. Кон-Фоссен, Изгибание поверхностей в целом, Успехи матем. наук, вып. 1 (1936). В статьях Ефимова и Кон-Фоссена имеется довольно полный список оригинальной литературы.

**) А. Д. Александров, Бесконечно малые изгибания нерегулярных поверхностей, Матем. сборник, т. 1, вып. 3 (1936).

Доказательство этих теорем и полный отчёт о других известных результатах читатель найдёт в цитированной статье Н. В. Ефимова в «Успехах математических наук».

4. Для выпуклых многогранников в более чем трёхмерном пространстве вопрос о жёсткости оказывается тривиальным по той же самой причине, по какой оказывается тривиальным вопрос о единственности многомерного многогранника с данной развёрткой. Уже один трёхмерный многогранный угол в четырёхмерном пространстве оказывается жёстким, потому что его сечение сферой с центром в его вершине представляет собой замкнутый выпуклый многогранник на трёхмерной сфере, или, если угодно, в трёхмерном сферическом пространстве. Как указано в n° 2, такой многогранник—жёсткий, а вместе с ним оказывается жёстким и многогранный угол, сечением которого он является.

ГЛАВА XI

УСЛОВИЯ ЖЁСТКОСТИ МНОГОГРАННИКА С ДАННЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ ГРАНЕЙ

В этой главе рассматриваются такие деформации выпуклого многогранника, при которых направления граней (т. е. внешние нормали) остаются неизменными. Так же как в главе X, нас интересуют только бесконечно малые деформации первого порядка, или, что то же самое, скорости в начальный момент. Задача состоит в нахождении условий, при которых многогранник — жёсткий. Так как направления граней неизменны, то вращение исключено, и потому жёсткость состоит в том, что бесконечно малая деформация сводится к переносу.

Условия жёсткости даются теоремами § 2.

Для доказательства этих теорем нужно сначала рассмотреть деформации граней, вызванные параллельными смещениями их плоскостей. Каждая грань замкнутого или бесконечного выпуклого многогранника ограничена прямыми, получающимися в пересечении её плоскости с плоскостями других граней. Поэтому речь должна идти о деформациях выпуклого многоугольника, вызванных параллельными смещениями ограничивающих его прямых. Если две грани касаются только в вершине, то сколь угодно малое смещение плоскости одной из них может повести к тому, что они будут касаться по ребру. В связи с этим нужно учитывать возможность появления таких новых рёбер.

§ 1. О деформациях многоугольников

1. Пусть выпуклый многоугольник P вырезается из плоскости некоторыми прямыми, которые все касаются его либо по сторонам, либо в вершинах. В последнем случае будем считать, что на многоугольнике также имеются стороны соответствующих направлений, но их длина равна нулю. Расстояние от начала до ограничивающей прямой будем называть опорным числом многоугольника. (Начало берётся, конечно, в плоскости многоугольника; расстояние от начала до прямой, как всегда, считается отрицательным, если внешняя нормаль, отложенная из начала, направлена от прямой.)

Мы будем рассматривать многоугольники, получающиеся из данного P; путём деформаций, вызванных параллельными смещениями ограничивающих его прямых, но только так, что никакая из этих прямых не перестаёт касаться многоугольника *). Последняя оговорка имеет смысл при сколь угодно малых деформациях для тех прямых, которые в начальный момент касались многоугольника только в вершинах. При этом условии не только деформированный многоугольник определяется своими опорными числами, но и обратно, расстояния до ограничивающих прямых определяются многоугольником, поскольку направления этих прямых заданы.

В связи с этим любую функцию многоугольника можно рассматривать как функцию его опорных чисел $f(h_1, \ldots, h_n)$. Так как допускаются стороны нулевой длины, то при рассмотрении любого конечного числа конечных многоугольников можно считать, что их стороны соответственно параллельны, и тогда функция $f(h_1, \ldots, h_n)$ определяется для них всех, а также для тех, которые получаются из них при параллельных смещениях ограничивающих прямых.

Функцию многоугольника $f(Q)=f(h_1, \ldots, h_n)$ *мы назовём существенно монотонной,* если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(h_1, \ldots, h_n)$ не меняется при параллельных переносах многоугольника.

2) Каждая частная производная $\frac{\partial f}{\partial h_i}$ существует и непрерывна вплоть до исчезновения i-й стороны **).

3) $\frac{\partial f}{\partial h_i}>0$ при всяком i, если i-я сторона имеет ненулевую длину.

Тогда, по непрерывности, при исчезновении i-й стороны $\frac{\partial f}{\partial h_i}\geqslant 0$.

Из последнего условия ясно, что если многоугольник Q_1 содержится внутри Q_2, то $f(Q_1)<f(Q_2)$, потому что в этом случае все $h_i^{(1)}\leqslant h_i^{(2)}$ и хотя бы одно $h_k^{(1)}<h_k^{(2)}$. В силу условия 1 $f(Q_1)<f(Q_2)$ также тогда, когда Q_1 можно поместить внутри Q_2 путём переноса.

Примерами существенно монотонных функций могут служить площадь и периметр. Если f — площадь, то $\frac{\partial f}{\partial h_i}=l_i$, где l_i — длина соответствующей стороны, потому что при смещении этой стороны на

---

*) Поэтому опорные числа могут принимать не любые значения, а только принадлежащие замкнутой области, определяемой этим условием. Неравенства, определяющие эту область, даны в § 5 гл. VII. Однако здесь вид этой области не имеет значения. Кроме того, указанные неравенства содержатся в лемме 1 этого параграфа.

**) Если при $h_i=h_i^0$ i-я сторона исчезает, то под $\left(\frac{\partial f}{\partial h_i}\right)_{h_i=h_i^0}$ понимается соответствующая односторонняя производная. Непрерывность вплоть до исчезновения i-й стороны означает при этом, что если h_i стремится к h_i^0 так, что при всех h_i i-я сторона не вырождается, то $\frac{\partial f}{\partial h_i}\to\left(\frac{\partial f}{\partial h_i}\right)_{h_i=h_i^0}$

расстояние Δh_i к площади многоугольника прибавляется, с точностью до малых высшего порядка, площадь прямоугольника с высотой Δh_i и основанием l_i. Здесь как раз $\frac{\partial f}{\partial h_i}=0$, если i-я сторона исчезает. Если f — периметр, то $\frac{\partial f}{\partial h_i}=\text{const}>0$, что вытекает, между прочим, из следующей леммы:

Лемма 1. *Длина стороны многоугольника есть линейная функция его опорных чисел h_i.* Именно, если перенумеровать все стороны *) по порядку и через φ_i обозначить угол между параллелями к $(i-1)$-й и i-й стороне, то

$$l_i=\frac{h_{i-1}-h_i\cos\varphi_i}{\sin\varphi_i}+\frac{h_{i+1}-h_i\cos\varphi_{i+1}}{\sin\varphi_{i+1}}. \qquad (1)$$

Для доказательства обратимся к чертежу 155, где изображены три последовательные стороны и перпендикуляры из начала O на прямые, несущие эти стороны; длины этих перпендикуляров суть опорные числа. Опустив из A_i перпендикуляр на OA_{i-1}, получим

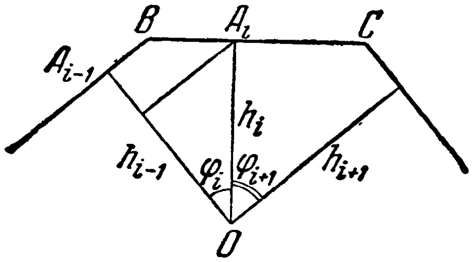
$$OA_{i-1}=h_{i-1}=A_iB\sin\varphi_i+h_i\cos\varphi_i.$$

Отсюда

$$A_iB=\frac{h_{i-1}-h_i\cos\varphi_i}{\sin\varphi_i}.$$

Аналогичная формула имеет место для A_iC. А так как $l_i=BA_i+A_iC$, то и получаем для l_i выражение (1). (Если угол φ_i или φ_{i+1} тупой, то чертёж меняется, но вывод сохраняется.)

2. Лемма 2. *Пусть конечный выпуклый многоугольник Q деформируется вследствие параллельного движения ограничивающих его прямых с определёнными (быть может, переменными) скоростями. Тогда (как следует из леммы 1) длины его сторон также меняются с определёнными скоростями. Сопоставим каждой стороне многоугольника Q знак начальной скорости изменения её длины. Стороны со стационарной длиной оставим неотмеченными.*



Черт. 155.

Если при рассматриваемой деформации некоторая строго монотонная функция f многоугольника Q стационарна, то для расстановки знаков на сторонах многоугольника имеются только три возможности:

1) *Ни одна сторона не отмечена, и тогда начальная деформация сводится к бесконечно малому переносу.*

2) *Существует не менее четырёх перемен знака.*

*) Порядок сторон нулевой длины соответствует порядку нормалей к несущим их прямым.

3) *Перемен знака — только две. Тогда две стороны ненулевой длины, сходящиеся в одной вершине A, отмечены минусами, а некоторые стороны нулевой длины, лежащие в вершине A, отмечены плюсами.*

Последний случай означает, что некоторые ограничивающие прямые, упиравшиеся в многоугольник Q в вершине A, вдвигаются внутрь него, так что соответствующие стороны нулевой длины удлиняются. Никакой другой деформации многоугольника Q в начальный момент не происходит, если не считать, что он ещё может параллельно перемещаться как целое. Если при этом h_i — опорное число, соответствующее вдвигаемой внутрь стороне нулевой длины, то необходимо $\frac{\partial f}{\partial h_i}=0$, т. е. при $\frac{\partial f}{\partial h_i}>0$ третий случай невозможен.

Эта лемма аналогична лемме 3 § 1 главы VI, и мы докажем её сведением к той лемме*).

Если начальная деформация сводится к переносу многоугольника, то длины сторон стационарны, и имеем первый случай.

Допустим, что начальная деформация не сводится к переносу, и пусть $\dot{h}_i$ — начальные скорости изменения опорных чисел при этой деформации. Исключим сначала удлинение тех сторон нулевой длины, для которых $\frac{\partial f}{\partial h_i}=0$ (т. е. прямые, несущие эти стороны, будем передвигать вместе с вершинами, через которые они проходят. Это, очевидно, не нарушит стационарности функции f, так как $\left.\frac{\partial f}{\partial h_k}=0\right)$.

Возьмём достаточно малое значение t и построим многоугольник Q с опорными числами $h_i+\dot{h}_i t$. Тогда согласно лемме 1 изменения длин сторон будут $\dot{l}_i t$, где $\dot{l}_i$ — начальная скорость изменения длины i-й стороны.

Многоугольники Q и Q' могут быть равны и параллельны; тогда рассматриваемая деформация сводится к переносу. Допустим, что это не так и один из многоугольников Q, Q' можно поместить внутри другого параллельным переносом; скажем, Q помещается в Q'. Тогда, добавляя к деформации соответствующий перенос, получим, что все $\dot{h}_i \geqslant 0$ и хотя бы одно $\dot{h}_k>0$.

---

*) Важно, однако, иметь в виду, что в лемме 3 § 1 гл. VI мы имеем дело с двумя разными многоугольниками, или, что то же самое, с конечной деформацией данного многоугольника, в то время как здесь речь идёт о бесконечно малой деформации первого порядка, т. е. о начальных скоростях. Этим вызвана, во-первых, необходимость рассматривать существенно монотонную, а не просто монотонную функцию многоугольника, и с этим же связано появление третьего случая распределения знаков, который в условиях леммы 3 § 1 гл. VI явно невозможен. Если $f(Q)$ — площадь, то $(f-1)^2$ стационарна при любой деформации многоугольника с площадью, равной единице. Между тем $(f-1)^2$ — монотонная функция многоугольника.

Но в таком случае, так как теперь все $\frac{\partial f}{\partial h_i} > 0$, получаем

$$\dot{f} = \sum \frac{\partial f}{\partial h_i} \dot{h}_i > 0,$$

что противоречит стационарности функции f. Следовательно, ни один из многоугольников Q, Q' не помещается внутри другого. Тогда согласно лемме 3 § 1 главы VI разности длин их параллельных сторон меняют знак не менее четырёх раз. Так как эти разности пропорциональны начальным скоростям $\dot{l}_i$, то и эти скорости меняют знак не менее четырёх раз.

Теперь остаётся ввести удлинение тех сторон нулевой длины, для которых $\frac{\partial f}{\partial h_i} = 0$. То-есть после рассмотренной деформации многоугольника вдвинем прямые, несущие эти стороны, внутрь многоугольника на расстояния $\dot{h}_i t$. Это вызовет появление новых настоящих сторон. При этом нужно различать два получившихся только что случая: 1) без этой добавочной деформации многоугольники Q и Q' были равны и параллельны; 2) число перемен знака скоростей $\dot{l}_i$ не менее четырёх.

Если мы вдвигаем внутрь сторону l_i, лежащую в вершине A между сторонами l_j, l_k ненулевой длины, то эти стороны укорачиваются, т. е. скорости изменения их длин уменьшаются. Поэтому если в первом случае это происходит не менее чем в двух разных вершинах, то получаем не менее чем четыре перемены знака. Если же это происходит только в одной вершине, то получаем третью возможность для расстановки знаков, указанную в лемме.

Пусть теперь до вдвижения внутрь сторон нулевой длины имело место четыре перемены знака. Покажем, что при вдвижении внутрь этих сторон число перемен знака не может уменьшиться.

Пусть одна или несколько новых настоящих сторон возникает в вершине A, где сходятся стороны AB, AC.

Для сторон AB, AC до введения этих новых сторон возможны расстановки знаков, указанные в таблице.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
AB	0	$-$	0	$-$	$+$	0	$+$	$-$	$+$
AC	0	0	$-$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	$+$

Так как стороны AB, AC играют одинаковую роль, то расстановки знаков 2 и 3, 5 и 6, 7 и 8 эквивалентны, а потому достаточно рассмотреть таблицу

	I	II	III	IV	V	VI
AB	0	—	—	+	+	+
AC	0	0	—	0	—	+

При вдвижении прямых, несущих стороны нулевой длины, внутрь многоугольника стороны AB и AC укорачиваются, т. е. скорости изменения их длин уменьшаются. Вместе с тем стороны нулевой длины заведомо удлиняются. Поэтому если обе стороны AB, AC не удлинялись (случаи I, II, III), то они будут укорачиваться; тем самым им относятся минусы, а новым сторонам — плюсы. Это означает появление двух перемен знака.

Если только одна из сторон удлинялась (случаи IV, V), то после введения новых сторон она, быть может, будет укорачиваться. Это могло бы повести к потерям перемен знака. Эти потери компенсируются, однако, тем, что на новых сторонах между AB и AC стоят плюсы, с чем связано появление новых перемен знака. Возможные случаи даны в таблице.

До введения новых сторон	AB	+			+		
	AC	0			—		
После него	AB	+	0	—	+	0	—
	Новые стороны	+	+	+	+	+	+
	AC	—	—	—	—	—	—

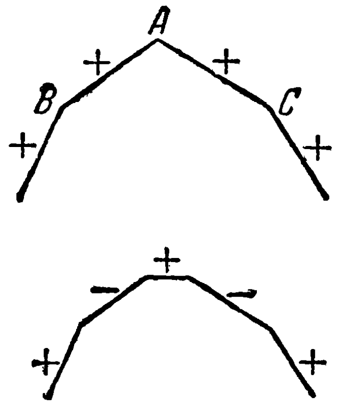
Из этой таблицы ясно, что потерь перемен знака не происходит.

Наконец, если обе стороны AB, AC удлинялись, то на них стояли плюсы и при переходе от AB к AC не было перемены знака. На вводимых новых настоящих сторонах стоят также плюсы, а потому перемены знака от плюса к минусу (в обе стороны от вершины A) не могут исчезнуть. Могут лишь появиться новые перемены знака, если, например, расстановка была такой, как на черт. 156.

Итак, во всех случаях введение новых сторон не приводит к потерям перемен знака, и лемма полностью доказана.

3. Теперь рассмотрим деформации бесконечных выпуклых многоугольников, оставляющие прямые, несущие бесконечные стороны этих многоугольников, неподвижными. Будем считать, что бесконечная сторона укорачивается, если её конец смещается внутрь этой стороны с начальной скоростью, отличной от нуля, и удлиняется, если её конец движется в противоположную сторону.

Лемма 3. *Пусть бесконечный выпуклый многоугольник деформируется вследствие параллельного движения прямых, несущих только его конечные стороны, включая стороны нулевой длины. Сопоставим каждой стороне знак начальной скорости изменения её длины, имея в виду принятое условие относительно бесконечных сторон. Стороны неизменной длины оставим неотмеченными.*



Черт. 156.

При этом условии имеются только три возможности для расстановки знаков:

1) *Ни одна сторона не отмечена; многоугольник в начальный момент неподвижен.*

2) *Существует не менее двух перемен знака.*

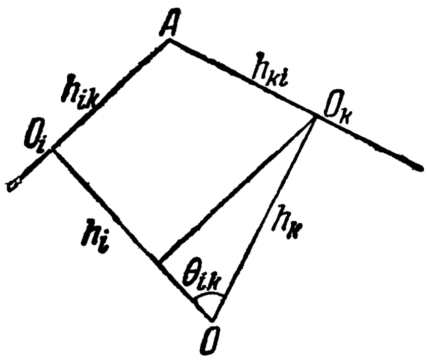
3) *Обе бесконечные стороны отмечены одним знаком и все конечные стороны не отмечены. Этот случай возможен лишь для многоугольника с параллельными бесконечными сторонами. Он означает, что в начальный момент многоугольник движется вдоль своих бесконечных сторон как твёрдое целое.*

Эта лемма аналогична лемме 4 § 1 главы VI и доказывается сведением к этой лемме подобно тому, как только что была доказана лемма 2. Именно, если Q — исходный многоугольник, то строим многоугольник Q' с опорными числами $h_i + \dot{h}_i t$, где h_i — опорные числа многоугольника Q, а $\dot{h}_i$ — начальные скорости их изменения. Тогда вследствие леммы 1 разности длин сторон многоугольников Q' и Q будут $\dot{l}_i t$, где $\dot{l}_i$ — начальные скорости изменения этих длин. (По принятому условию для бесконечной скорости $\dot{l}_i$ есть скорость движения её конца.) Поэтому, применяя к многоугольникам Q и Q' лемму 4 § 1 главы VI, получаем нужный результат.

§ 2. Теоремы о жёсткости многогранников

1. Выпуклый многогранник, замкнутый или бесконечный, полностью определяется плоскостями своих граней. Если эти плоскости двигать, то многогранник будет соответственно деформироваться. Мы будем предполагать, что речь идёт о параллельном переносе этих плоскостей с определёнными скоростями. То-есть нормали остаются неизменными или по крайней мере стационарными, а опорные числа являются дифференцируемыми функциями времени t. Мы говорим, что многогранник деформируется вследствие параллельного движения плоскостей граней.

Грань многогранника ограничена прямыми, являющимися линиями пересечения её плоскости с плоскостями других граней. Эти прямые будут также параллельно перемещаться, поэтому деформации граней будут как раз такие, какие рассмотрены в § 1. На гранях могут появляться новые рёбра. Положение прямых, ограничивающих грань, на плоскости T этой грани определяется при заданных направлениях опорными числами относительно начала, взятого в плоскости T. Самое естественное взять за это начало O' проекцию начала O, выбранного в пространстве, на плоскость T.



Черт. 157.

Так определённые *опорные числа грани оказываются линейными функциями опорных чисел многогранника.*

Доказательство очевидно из черт. 157, где изображены плоскости смежных i-й и k-й граней в проекции вдоль их общего ребра. Здесь θ_{ik} — угол между нормалями к этим граням; h_i, h_k — опорные числа граней; O_i, O_k — начала в этих гранях; $O_iA = h_{ik}$, $O_kA = h_{ki}$ суть опорные числа общего ребра, первое на i-й, второе на k-й грани.

Проектируя O_k на OO_i, получим $OO_i = h_i = h_{ki}\sin\theta_{ik} + h_k\cos\theta_{ik}$, откуда

$$h_{ki} = \frac{h_i - h_k\cos\theta_{ik}}{\sin\theta_{ik}}. \tag{1}$$

Таким образом, h_{ki} есть линейная функция от h_i и h_k.

Отсюда следует, что когда опорные числа h_i меняются с определёнными скоростями, то h_{ki} также имеют определённые скорости изменения. А тогда в силу леммы 1 § 1 то же верно для длин рёбер многогранника.

Эти замечания обеспечивают возможность применения лемм 2 и 3 § 1. Так как длины рёбер и опорные числа граней оказываются линейными функциями опорных чисел многогранника, то при движении граней с постоянными скоростями скорости изменения длин рёбер и опорных чисел граней также постоянны. Но в вопросах жёсткости можно ограничиться равномерным движением граней, а тогда изменения рёбер и опорных чисел граней будут также равномерными и, в частности, стационарность их будет означать просто неизменность. Поэтому в дальнейшем можно совершенно не опасаться смешения понятий стационарности и неизменности в отношении к рёбрам и опорным числам.

2. Теорема 1. *Если для каждой грани замкнутого выпуклого многогранника стационарны её направление и некоторая существенно монотонная функция, то многогранник — жёсткий.*

Иными словами, пусть замкнутый выпуклый многогранник деформируется вследстие параллельного движения плоскостей его граней.

Если при этом для каждой грани оказывается стационарной какая-нибудь существенно монотонная функция, вообще говоря, своя особая для каждой грани, то деформация многогранника сводится к переносу, т. е. начальные скорости плоскостей его граней таковы, как если бы они образовывали одно твёрдое тело *).

Доказательство основано на соединении леммы 2 § 1 с усиленной леммой Коши (§ 2 гл. X).

Сдвинем плоскости граней данного многогранника P на малые расстояния, пропорциональные их начальным скоростям. Получим новый многогранник P', на котором никакое ребро, имевшееся на P, не исчезло, но, может быть, появились новые рёбра. Последнее означает, что грани многогранника P имели стороны нулевой длины, которые при рассматриваемой деформации удлиняются.

Отнесём каждому ребру многогранника P' знак начальной скорости изменения его длины или, точнее, длины того ребра исходного многогранника P, из которого получилось данное ребро у P'. Помним при этом, что некоторые рёбра у P' могли появиться из нулевых рёбер на P. Рёбра, длины которых стационарны, оставим неотмеченными. Вследствие того, что для каждой грани стационарна некоторая существенно монотонная функция, расстановка знаков вокруг каждой грани удовлетворяет лемме 2 § 1. То-есть на каждой грани имеет место одно из трёх:

1) Ни одно ребро грани не отмечено.

2) При обходе вокруг грани имеется не менее четырёх перемен знака.

3) Перемен знака — две, но тогда отмечены плюсами рёбра, возникающие в одном месте из рёбер нулевой длины, а смежные с ними обычные рёбра отмечены минусами.

В усиленной лемме Коши (§ 2 гл. X) аналогичные условия налагаются на расстановку знаков вокруг вершин, но не граней. Поэтому, выбрав внутри каждой грани многогранника P по точке, соединим точки в смежных гранях линиями, пересекающими соответствующие рёбра. В результате получим на P сеть R, двойственную сетке его граней: грани на P отвечает вершина сетки R, ребру — ребро, вершине — грань (см. черт. 128 на стр. 267).

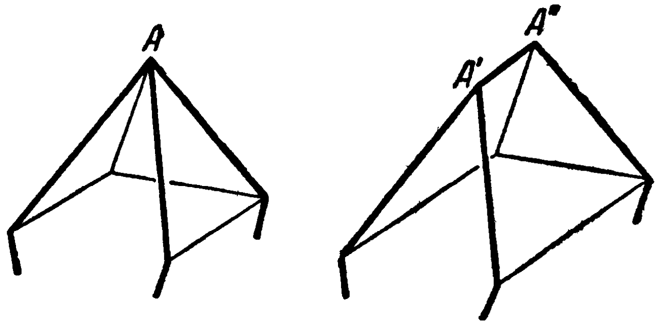
Аналогично на многограннике P' построим двойственную сеть R' и отнесём каждому её ребру знак соответствующего ребра на P'. Тогда первым двум указанным выше возможностям для расстановки знаков вокруг грани на P' отвечают в сети R' две возможности расстановки знаков вокруг вершины:

1) Ни одно ребро, подходящее к вершине, не отмечено.

2) При обходе вокруг вершины имеется не менее четырёх перемен знака.

*) Если не требовать существенной монотонности стационарных функций, то теорема отпадает. Пример: функция $f=(F(Q)-1)^2$, где $F(Q)$ — площадь. Эта функция стационарна при любых смещениях граней единичного куба.

Выясним, что будет соответствовать оставшемуся случаю только двух перемен знака. Он связан с тем, что на многограннике P могли быть «рёбра нулевой длины», которые на P' переходят в настоящие рёбра. Это означает, что в некоторой вершине A многогранника P сходятся четыре или более граней, которые после смещения их плоскостей перестают сходиться в одной вершине (черт. 158). Вершина A как бы расщепляется и между сходившимися в ней гранями появляются новые рёбра.

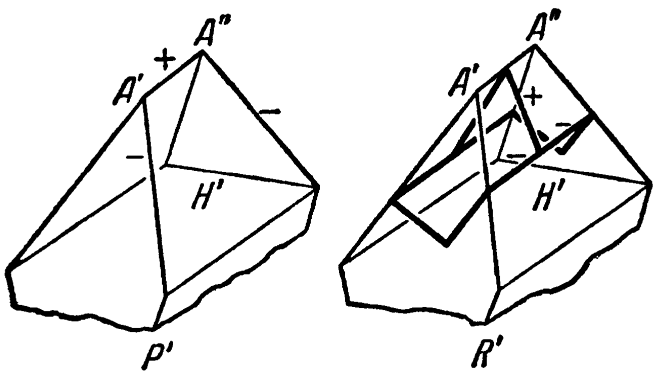


Черт. 158.

Для двойственных сетей R и R' это означает следующее. В сети R есть грань G_A, соответствующая вершине A, вершины этой грани соответствуют граням многогранника P, сходящимся в A. Расщеплению вершины A отвечает разбиение грани G_A на части новыми рёбрами. Эти новые рёбра соответствуют новым рёбрам многогранника P'. Они соединяют те вершины грани G_A, которые отвечают граням многогранника P, оказавшимся после деформации смежными по новым рёбрам.

Всё это означает, что грань G_A разбивается на части диагоналями. То-есть переход от сети R к R' состоит в проведении диагоналей на некоторых её гранях. Тем самым сеть R' удовлетворяет требованиям, налагаемым усиленной леммой Коши.

Пусть вокруг грани H' многогранника P' имеется только две перемены знака (третий случай). Тогда на грани H многогранника P есть вершина A, «расщепление» которой как раз даёт новые рёбра на P'. Отмеченные рёбра грани H' все сходились в вершине A на P, но только два крайних были настоящими рёбрами.



Черт. 159.

Отсюда видно, что третья возможность расстановки знаков вокруг грани многогранника P' преобразуется при переходе к двойственной сети R' в следующее:

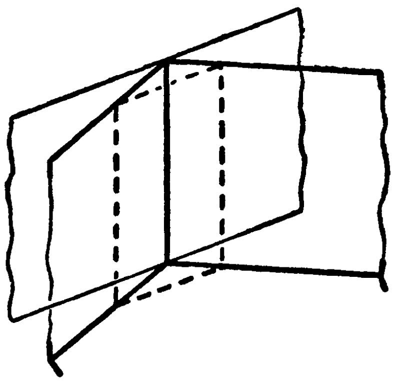
3) При обходе вокруг вершины (соответствующей грани H') имеются только две перемены знака, но тогда плюсами отмечены новые рёбра, лежащие на одной «старой» грани (соответствующей вершине A), а смежные с ними «старые» рёбра отмечены минусами (черт. 159 даёт обе картины расстановки знаков на P' и на R').

Это и есть третья возможность в том виде, как она фигурирует в усиленной лемме Коши.

Таким образом, если имеются отмеченные рёбра, то получаем расстановку знаков, невозможную в силу этой леммы. Значит отмеченных рёбер нет, т. е. длины всех рёбер многогранника P стационарны.

Отсюда уже очевидно, что деформация многогранника P сводится к переносу, и теорема доказана.

3. Полученный результат можно несколько обобщить, допуская деформации многогранника, связанные с появлением новых граней. Именно, будем считать, что данный многогранник P ограничен не только плоскостями его граней, но ещё некоторыми плоскостями, проходящими через его рёбра*). Тогда параллельные перемещения этих плоскостей могут приводить к появлению на P новых граней. Это можно изобразить так, что некоторые грани на P вырождаются в рёбра, а при деформации превращаются в настоящие грани. Такая вырождающаяся грань «ограничена» двумя совпадающими прямыми (идущими вдоль ребра) и ещё другими прямыми, проходящими через концы ребра (черт. 160).



Черт. 160.

В связи с этим возникновение новой грани на месте ребра представляется как деформация выродившегося в отрезок многоугольника, вызванная движением ограничивающих его прямых. У такого многоугольника в начальный момент две стороны равны, а прочие имеют нулевую длину.

Пусть многоугольник Q вырождается в отрезок AB. Пусть через A проходит несколько ограничивающих прямых. Если одна из них отодвигается «наружу» (опорное число возрастает), то она перестаёт касаться многоугольника Q и тем самым перестаёт быть ограничивающей прямой. Её отодвигание не ведёт к деформации многоугольника и потому можно с успехом считать её неподвижной. Поэтому такие перемещения ограничивающих прямых считаются исключёнными.

Лемма. *Пусть многоугольник, в начальный момент вырождающийся в отрезок, деформируется вследствие параллельных смещений ограничивающих прямых. Если при этом некоторая существенно монотонная функция его стационарна, то либо он остаётся отрезком, либо скорости изменения длин сторон меняют знак четыре раза при обходе вокруг многоугольника.*

Пусть многоугольник Q вырождается в отрезок и деформируется так, что существенно монотонная функция $f(Q)$ стационарна. Допустим, что при деформации он становится настоящим многоугольником. Это означает, что те две ограничивающие его прямые L_1, L_2, которые в начальный момент совпадали, расходятся (черт. 161).

*) Обобщение, допускающее вырождение граней в вершины, не интересно: оно тривиально, так как при превращении точки в многоугольник все опорные числа можно считать увеличивающимися и потому либо $df > 0$, либо f перестаёт быть существенно монотонной для многоугольников, вырождающихся в точку, как это имеет место, например, для площади.

При этом на обоих концах отрезка Q, очевидно, должны иметься удлиняющиеся стороны нулевой длины. Поэтому, для того чтобы было четыре перемены знака, нужно, чтобы обе стороны ненулевой длины укорачивались (стороны нулевой длины, конечно, не могут укорачиваться!).

Допустим, однако, что одна из этих сторон, l_1, не укорачивается, а либо стационарна, либо удлиняется. Поместим начало O в одном из её концов. В начальный момент она ограничивается пересечением прямой L_1 с прямыми, несущими нулевые стороны. А так как она не укорачивается, то эти прямые не могут приближаться к точке O. Следовательно, скорости изменения их опорных чисел не отрицательны: $\dot{h}_i \geqslant 0$. Вместе с тем прямая L_2 отодвигается от L_1 и потому скорость изменения её опорного числа положительна: $\dot{h}_2 > 0$. Наконец, прямая L_1 остаётся проходящей через начало и потому $\dot{h}_1 = 0$.

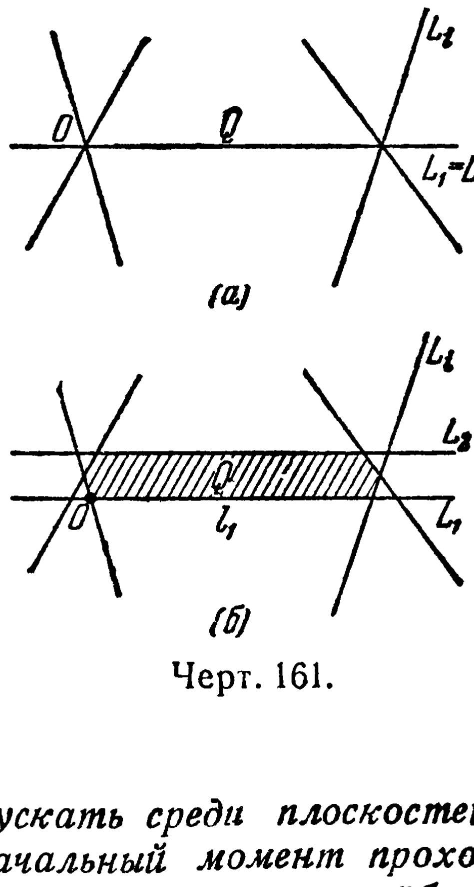
Итак, все $\dot{h}_i \geqslant 0$ и $\dot{h}_2 > 0$. Но по условию существенной монотонности $\frac{df}{dh_i} \geqslant 0$ и для сторон ненулевой длины $\frac{df}{dh_i} > 0$, т. е. $\frac{df}{dh_2} > 0$. Поэтому

$$\frac{df}{dt} = \sum \frac{df}{dh_i} \dot{h}_i > 0.$$

Между тем по условию функция f стационарна, т. е. $\frac{df}{dt} = 0$. Полученное противоречие показывает неверность допущения о том, что одна из сторон ненулевой длины не укорачивается.

Следовательно, обе стороны ненулевой длины укорачиваются; мы имеем, таким образом, ровно четыре перемены знака, и лемма доказана.

Пусть теперь многогранник P деформируется вследствие параллельных смещений плоскостей его граней, причём некоторые грани в начальный момент вырождаются в рёбра. Тогда, расставляя на рёбрах деформированного многогранника P' знаки скоростей изменения их длин, придём к тем же выводам, какие были сделаны при доказательстве теоремы 1. Вокруг грани, возникшей из ребра, всегда будет четыре перемены знака, и потому такие грани вовсе не могут появляться.



Черт. 161.

Следовательно, *в теореме* 1 *можно допускать среди плоскостей граней многогранника такие, которые в начальный момент проходят вдоль рёбер, т. е. допускаются грани, вырождающиеся в рёбра.*

Это аналогично тому, что в теоремах главы VI о равенстве многогранников с параллельными гранями также допускаются грани, вырождающиеся в рёбра.

В качестве примера можно указать теорему о жёсткости многогранника со стационарными периметрами граней. Тогда среди граней можно допускать вырождающиеся в рёбра. Периметр такой «грани» равен удвоенной длине ребра.

В случае стационарности площади обобщение тривиально, потому что выродившаяся грань имеет нулевую площадь и при условии стационарности площади так и должна оставаться ребром, т. е. обобщение здесь оказывается бессодержательным.

4. Теорема 2. *Пусть бесконечный выпуклый многогранник деформируется вследствие параллельных смещений плоскостей его конечных граней; плоскости же бесконечных граней неподвижны. Тогда, если для каждой конечной грани какая-либо существенно монотонная функция оказывается стационарной, то многогранник неподвижен* (*точнее, плоскости всех его граней стационарны*). При этом среди граней допускаются такие, которые в начальный момент вырождаются в рёбра.

Эта теорема соответствует теореме 2 § 4 главы VI о равенстве бесконечных многогранников; она относится к ней так же, как доказанная только что теорема 1 относится к теореме 2 § 3 главы VI о замкнутых многогранниках.

Доказательство теоремы 2 основано на тех же соображениях.

Смещая плоскости граней данного многогранника P на малые расстояния, пропорциональные их начальным скоростям, получим многогранник P'. На его рёбрах расставляем знаки скоростей изменения их длин. Тогда для конечных граней получаем те же три возможности, какие были в теореме 1, а на бесконечных гранях — возможности, указанные в лемме 3 § 1.

После этого берём второй экземпляр P'' того же многогранника с противоположно расставленными знаками и определяем абстрактный многогранник $P' \dotplus P''$, причём соответственные бесконечные рёбра у P' и P'' отождествляем, объединяя каждую пару соответственных бесконечных граней в одну.

Далее, переходим от $P' \dotplus P''$ к двойственной сети R', для которой повторяются те же выводы, какие были получены в доказательстве теоремы 1.

Тогда, применяя усиленную лемму Коши к сети R', получаем доказательство теоремы 2.

Детальное осуществление намеченного плана свелось бы к простому пересказу того, что уже содержится в доказательствах теоремы 1 и теоремы 2 § 4 главы VI.

5. Теорема 2 может быть усилена и распространена в n-мерное пространство совершенно так же, как это сделано в § 5 главы VI

для аналогичной теоремы о равенстве бесконечных многогранников Таким путём получается

Теорема 3. *Пусть n-мерный бесконечный выпуклый многогранник деформируется вследствие параллельных смещений плоскостей его конечных граней; плоскости же бесконечных граней неподвижны. Пусть для каждой конечной грани выполнено хотя бы одно из двух условий:* 1) *плоскость этой грани стационарна,* 2) *для этой грани стационарна некоторая существенно монотонная функция**). *При этих условиях многогранник неподвижен, т. е. плоскости всех его граней стационарны.*

Эту теорему можно пересказать для конечных многогранников с границей так же, как это сделано для аналогичной теоремы о равенстве в § 5 главы VI.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы § 5 главы VI. Пусть $h(\boldsymbol{n}, t)$ — опорная функция деформирующегося многогранника (т. е. расстояние его опорной плоскости с нормалью $\boldsymbol{n}$ от начала координат как функция $\boldsymbol{n}$ и параметра t, с изменением которого осуществляется деформация). Если начальная скорость её изменения $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t=0}$ везде равна нулю, то многогранник в начальный момент неподвижен. Поэтому допустим, что есть область векторов $\boldsymbol{n}$, где $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t=0} > 0$. Тогда определим в этой области функцию

$$\varphi(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t=0}}$$

и рассмотрим поверхность R, образованную концами векторов $\varphi(\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$.

Это аналогично построению, изложенному в § 5 главы VI, с тем лишь различием, что на месте разности опорных функций появляется произвольная $\frac{\partial h}{\partial t}$. Дальнейший ход доказательства также аналогичен выводам § 5 главы VI, и мы не будем его здесь приводить.

6. Многогранник с границей определяется не одними плоскостями граней, но ещё прямыми, содержащими его граничные рёбра. Эти прямые лежат в плоскостях крайних граней. Мы будем допускать деформации многогранника, при которых эти прямые подвергаются параллельным смещениям в плоскостях крайних граней (которые при этом сами могут параллельно перемещаться).

Теорема 4. *Пусть конечный выпуклый многогранник, ограниченный одной замкнутой ломаной, деформируется вследствие параллельных смещений плоскостей его граней и прямых, несущих его граничные рёбра. Пусть при этом* 1) *для каждой грани ока-*

*) Речь идёт о существенно монотонной функции $(n-1)$-мерного многогранника, которая определяется совершенно так же, как для многоугольника.

зывается стационарной некоторая существенно монотонная функция; 2) *на каждой крайней грани начальные скорости изменения длин граничных рёбер имеют один знак* (*для каждой грани — свой*), *допуская также значение нуль.*

При этих условиях начальная деформация многогранника сводится к переносу.

Эта теорема аналогична теореме 2 § 5 главы VI.

Доказательство её, подобно доказательствам теорем 1 и 2, основано на усиленной лемме Коши и лемме 1 § 1. Мы опять строим деформированный многогранник P' и расставляем на его рёбрах знаки. Потом, взяв его второй экземпляр P'' с противоположно расставленными знаками, определяем абстрактный многогранник $P' \dotplus P''$, отождествляя и потом исключая соответственные граничные рёбра многогранников P' и P''. После этого строим двойственную сеть и, применяя к ней те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 1, получаем доказательство нашей теоремы.

§ 3. Связь теорем о жёсткости друг с другом и с теорией смешанных объёмов

1. В теореме 1 § 2 заключается, в частности,

Теорема 1. *Замкнутый выпуклый многогранник со стационарными направлениями и площадями граней — жёсткий.*

Мы докажем, что отсюда можно вывести как чисто формальное следствие следующее предложение:

Теорема 2. *Замкнутый выпуклый многогранник с жёсткими гранями — жёсткий.*

Эта теорема была доказана в § 4 главы X, причём там грани понимались в обобщённом смысле. Здесь же мы будем иметь в виду обычные грани. Следовательно, результат будет слабее, чем полученный в § 4 главы X. Тем не менее формальная связь теоремы 2 с теоремой 1, на которой построен вывод, представляет немалый интерес. Из её рассмотрения естественно наметится связь обеих теорем с теорией смешанных объёмов (§§ 2 и 3 гл. VII), и применение этой последней даст новое доказательство теоремы 1, а вместе с ней и теоремы 2 *).

2. Итак, обратимся к формальному сведению теоремы 2 к теореме 1.

Пусть многогранник с жёсткими гранями деформируется. Тогда каждая грань Q_m вращается как твёрдое тело и её вращение характеризуется вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_i$. Так как относительное вращение двух смежных граней Q_i, Q_j происходит вокруг их общего ребра, то разность $\boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}_j$ направлена по этому ребру. Это равно-

*) Эти связи имеют большое значение в выводе теорем о жёсткости для кривых поверхностей. Для многогранников они были впервые подмечены Г. Вейлем в его работе в Sitzungsberichte der Preussischen Akademie за 1917 г., стр. 250 — 266.

сильно тому, что разность $\omega_i - \omega_j$ перпендикулярна к (внешним) нормалям n_i, n_j обеих граней, т. е.

$$(\omega_i - \omega_j) n_i = 0, \quad (\omega_i - \omega_j) n_j = 0,$$

или

$$\omega_i n_i = \omega_j n_i, \quad \omega_i n_j = \omega_j n_j. \tag{1}$$

Положим

$$\omega_i n_i = p_i \tag{2}$$

и рассмотрим деформацию того же многогранника, состоящую в параллельном движении граней с постоянными скоростями p_i в направлении их нормалей. Тогда в момент t опорные числа многогранника будут

$$h_i^t = h_i + t p_i. \tag{3}$$

Мы докажем, что в силу соотношений (1) при деформации, определённой уравнениями (3), площади граней стационарны. Этим теорема 2 о жёсткости многогранника с жёсткими гранями и будет сведена к теореме 1 о жёсткости многогранника при стационарности направлений и площадей граней.

Действительно, стационарность направлений и площадей граней в силу теоремы 1 означает, что многогранник испытывает лишь параллельный перенос с какой-то скоростью a. Но тогда p_i суть составляющие этого переноса, нормальные к граням, и, следовательно,

$$p_i = n_i a.$$

Прибавим к рассматриваемой деформации многогранника вращение его как целого с угловой скоростью $-a$. Тогда скорости вращения его граней будут $\omega_i' = \omega_i - a$, и $p_i' = \omega_i' n_i = 0$ для всех i. Но по (1)

$$\omega_i' n_j = \omega_j' n_j = \omega_i' n_i = 0,$$

где n_j — нормаль к любой грани, имеющей с Q_i общее ребро. Так как среди таких нормалей заведомо найдутся две, не лежащие в одной плоскости с n_i, то из написанных равенств следует, что

$$\omega_i' = 0.$$

Таким образом, новая деформация сводится к движению, а значит, и исходная сводилась к движению, т. е. мы получили теорему 2.

3. Докажем, что из соотношений (1) следует стационарность площадей граней. Для этого рассмотрим данную грань Q_i. В её плоскости в качестве начала координат берём проекцию начала координат в пространстве. Тогда, если h_{ij} — опорные числа рёбер грани Q_i относительно этого начала, то по формуле (1) § 2

$$h_{ij} = \frac{h_j - h_i \cos\theta_{ij}}{\sin\theta_{ij}} = \frac{h_j - h_i (n_i n_j)}{|n_i \times n_j|}, \tag{4}$$

где h_j и $\boldsymbol{n}_j$ — опорное число и нормаль грани Q_j, смежной с Q_i по соответствующему ребру.

Для деформированного многогранника в силу формулы (3) получим

$$h_{ij}^t = h_{ij} + tp_{ij}, \tag{5}$$

где

$$p_{ij} = \frac{p_j - p_i(\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{n}_j)}{|\boldsymbol{n}_i \times \boldsymbol{n}_j|}. \tag{6}$$

При смещении стороны l многоугольника на малое расстояние δ к многоугольнику прибавляется трапеция с основанием l и высотой δ. Поэтому производная площади F_i грани Q_i по опорному числу h_{ij} есть длина соответствующей стороны:

$$\frac{\partial F_i}{\partial h_{ij}} = l_{ij} \tag{7}$$

Поэтому в силу (5)

$$\left(\frac{dF_i}{dt}\right)_{t=0} = \sum_j \left(\frac{\partial F_i}{\partial h_{ij}} \frac{dh_{ij}}{dt}\right)_{t=0} = \sum_j p_{ij} l_{ij}. \tag{8}$$

Теперь остаётся только показать, что стоящая здесь справа сумма вследствие равенств (1) обращается в нуль. Для этого заметим, что в силу (1) и (2)

$$p_i = \boldsymbol{\omega}_i \boldsymbol{n}_i, \quad p_j = \boldsymbol{\omega}_i \boldsymbol{n}_j. \tag{9}$$

Поэтому из (6) следует

$$p_{ij} = \frac{\boldsymbol{n}_j - \boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{n}_j)}{|\boldsymbol{n}_i \times \boldsymbol{n}_j|} \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{n}_{ij}\boldsymbol{\omega}_i, \tag{10}$$

где вектор

$$\boldsymbol{n}_{ij} = \frac{\boldsymbol{n}_j - \boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{n}_i\boldsymbol{n}_j)}{|\boldsymbol{n}_i \times \boldsymbol{n}_j|} \tag{11}$$

есть не что иное, как внешняя единичная нормаль к стороне l_{ij} грани Q_i, в чём легко непосредственно убедиться. Поэтому имеет место соотношение замкнутости

$$\sum_j \boldsymbol{n}_{ij} l_{ij} = 0. \tag{12}$$

Отсюда, умножая на $\boldsymbol{\omega}_i$ и пользуясь формулой (10), получим

$$\sum_j p_{ij} l_{ij} = 0, \tag{13}$$

откуда в силу соотношения (8)

$$\left(\frac{dF_i}{dt}\right)_{t=0} = 0,$$

что и требовалось доказать.

4. Теперь докажем теорему 1 о жёсткости многогранника со стационарными направлениями и площадями граней, основываясь на началах теории смешанных объёмов.

Пусть начальные скорости параллельного движения граней данного многогранника P будут p_i, т. е. $\left(\frac{dh_i}{dt}\right)_{t=0}=p_i$. А начальные скорости изменения опорных чисел рёбер граней пусть будут p_{ij}, т. е. $\left(\frac{dh_{ij}}{dt}\right)_{t=0}=p_{ij}$.

Для производной площади грани имеем формулу (8)

$$\left(\frac{dF_i}{dt}\right)_{t=0}=\sum_j p_{ij}l_{ij}.$$

Поэтому условие стационарности площадей даёт

$$\sum_j p_{ij}l_{ij}=0. \tag{14}$$

Рассмотрим многогранник P' с опорными числами

$$h'_i=h_i+tp_i \tag{15}$$

со столь малым t, что на P' никакие две грани, не смежные на P, не становятся смежными. Различие в строении многогранников P и P' может быть обусловлено только тем, что некоторые грани из сходившихся на P в одной вершине могут на P' разойтись, тогда как другие станут смежными уже не в вершине, а по ребру. В таком случае можно считать, что и на P такое ребро есть, но имеет длину нуль.

Пусть Q_i и Q'_i — соответственные грани многогранников P и P'. Смешанная площадь этих граней, определяемая подобно смешанному объёму (см. лемму 4 § 2 гл. VIII), будет

$$F(Q_iQ'_i)=\frac{1}{2}\sum_j h'_{ij}l_{ij}, \tag{16}$$

или в силу формулы (5)

$$F(Q_iQ'_i)=\frac{1}{2}\sum_j h_{ij}l_{ij}+\frac{1}{2}t\sum_j p_{ij}l_{ij}.$$

Отсюда в силу условия (14)

$$F(Q_iQ'_i)=\frac{1}{2}\sum_j h_{ij}l_{ij}=F(Q_iQ_i), \tag{17}$$

где $F(Q_iQ_i)=\frac{1}{2}\sum_j h_{ij}l_{ij}$ есть не что иное, как площадь грани Q_i.

Напишем неравенство Минковского для смешанных площадей *)

$$F(Q_iQ'_i)^2\geqslant F(Q_iQ_i)F(Q'_iQ'_i); \tag{18}$$

*) Это неравенство есть, конечно, частный вид общего неравенства, выведенного в § 3 гл. VIII для n-мерного пространства. Однако для площадей оно выводится совсем просто. Ищем минимум отношения $\Phi=\frac{F(QQ')^2}{F(QQ)F(Q'Q')}$ при данном Q и переменном Q'. Легко видеть, что этот минимум достигается.

причём знак равенства стоит здесь тогда и только тогда, когда Q_i и Q'_i гомотетичны. Вследствие (17) отсюда вытекает, что

$$F(Q_iQ'_i) \geqslant F(Q'_iQ'_i), \tag{19}$$

где знак равенства может быть лишь при условии, что он стоит в (18), т. е. тогда, когда грани Q_i и Q'_i гомотетичны. Но так как тогда (19) сводится к равенству их площадей, то тем самым (19) превращается в равенство лишь при условии, что грани Q_i и Q'_i равны и параллельны.

Умножая (17) на h'_i и суммируя по всем граням, получим

$$\sum_i h'_i F(Q_iQ'_i) = \sum_i h'_i F(Q_iQ_i). \tag{20}$$

А умножая (19) на h_i и суммируя по всем граням, получим

$$\sum_i h_i F(Q_iQ'_i) \geqslant \sum_i h_i F(Q'_iQ'_i). \tag{21}$$

Но вследствие теоремы 4 § 3 главы VIII (формула (26)) *)

$$\sum_i h'_i F_i(Q_iQ'_i) = \sum_i h_i F(Q'_iQ'_i); \quad \sum_i h_i F(Q_iQ'_i) = \sum h'_1 F(Q_iQ_i). \tag{22}$$

Обозначая опорные числа и длины сторон многоугольников Q и Q' через h_j, h'_j и l_j, l'_j, будем иметь при минимуме $\frac{\partial\Phi}{\partial h'_j} = 0$, а в силу (16) $\frac{\partial F(QQ')}{\partial h'_j} = \frac{1}{2} l_j$. Наконец, так как $F(Q'Q')$ есть площадь многоугольника, то $\frac{\partial F(Q'Q')}{\partial h'_j} = l_j$. Вычисляя на основании этих соотношений производные $\frac{\partial\Phi}{\partial h'_j}$ и приравнивая их нулю, придём к тому, что при минимуме $l_j = \lambda l'_j$, где $\lambda = \frac{F(QQ')}{F(Q'Q')}$. Но если длины сторон пропорциональны, то многоугольники Q и Q' подобны, т. е. минимум Φ достигается для подобных многоугольников. А тогда $\Phi = 1$. Следовательно, $\Phi \geqslant 1$ и $\Phi = 1$ только тогда, когда Q и Q' подобны. Это и есть неравенство (18) с дополнением об условии равенства.

*) Здесь нет надобности ссылаться на теорему 4 § 3 гл. VIII, так как можно получить тот же результат непосредственно. Пользуясь формулой (16) (с перестановкой Q_i и Q'_i), имеем

$$\sum_i h'_i F_i(Q_iQ'_i) = \sum_i h'_i \cdot \frac{1}{2} \sum_j h_{ij} l'_{ij} = \sum_i \frac{h'_i}{2} \sum_j \frac{h_j - h_i \cos\theta_{ij}}{\sin\theta_{ij}} l'_{ij}.$$

Здесь каждое ребро l'_{ij} встречается дважды: один раз у грани Q_i, другой раз у грани Q_j. Поэтому та же сумма может быть переписана так:

$$\sum\sum \frac{h'_i h_j}{2} \frac{l'_{ij}}{\sin\theta_{ij}} - \sum\sum \frac{h'_i h_i}{2} \frac{\cos\theta_{ij}}{\sin\theta_{ij}} l'_{ij} = \sum\sum \frac{h'_j h_i}{2} \frac{l'_{ij}}{\sin\theta_{ij}} - \sum\sum \frac{h'_i h_i}{2} \times$$

$$\times \frac{\cos\theta_{ij}}{\sin\theta_{ij}} l'_{ij} = \sum_i h_i \frac{1}{2} \sum_j \frac{h'_j - h'_i \cos\theta_{ij}}{\sin\theta_{ij}} l'_{ij} = \sum_i h_i F(Q'_iQ'_i).$$

Поэтому из (20) следует, что в (21) стоит знак равенства. Это возможно лишь при условии, что во всех неравенствах (19) стоит знак равенства. А тогда все грани Q_i и Q'_i соответственно равны и параллельно расположены, т. е. сами многогранники P и P' равны и параллельно расположены. В силу определения многогранника P' это означает, что скорости p_i движения граней таковы, как если бы многогранник P был твёрдым, т. е. при стационарности площадей граней он — жёсткий.

5. Все проведённые выводы переносятся на непрерывно изогнутые выпуклые поверхности. Если поверхность подвергается бесконечно малому изгибанию, то каждый её бесконечно малый кусок движется как твёрдое тело, так что ему можно приписать определённый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Так на поверхности $\boldsymbol{x}(u, v)$ определяется «поле вращений» $\boldsymbol{\omega}(u, v)$. Так как два соседних бесконечно малых куска поверхности, подобно бесконечно малым граням, как бы вращаются вокруг общего ребра, то $d\boldsymbol{\omega}$ лежит в касательной плоскости. Это значит, что поверхность, описанная концом вектора $\boldsymbol{\omega}(u, v)$, — так называемая «диаграмма вращений», — в каждой точке имеет особенность, или её касательная плоскость параллельна касательной плоскости данной поверхности.

Теперь рассмотрим функцию $p(n) = \boldsymbol{n}\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности $\boldsymbol{x}$, а следовательно, и $\boldsymbol{\omega}$. Это $p(\boldsymbol{n})$ есть расстояние от начала до касательной плоскости диаграммы вращений с нормалью $\boldsymbol{n}$. Как оказывается, функция $p(\boldsymbol{n})$ подчиняется уравнению, равносильному следующему условию: если опорную функцию $h(\boldsymbol{n})$ менять со скоростью $p(\boldsymbol{n})$, то гауссова кривизна в каждой точке стационарна.

То, что при этом условии деформация замкнутой выпуклой поверхности сводится к переносу, доказывается посредством тех же формул теории смешанных объёмов, только переписанных для регулярных поверхностей, а не для многогранников *).

6. Изложенный выше вывод теоремы о жёсткости многогранника со стационарными направлениями и площадями граней дословно распространяется в пространство любого числа измерений n. Однако при $n > 3$ нужно пользоваться не тем неравенством Минковского, которое было выведено в § 3 главы VIII, а другим:

$$V(P_1 P_0 \ldots P_0)^2 \geqslant V(P_1 P_1 P_0 \ldots P_0)\, V(P_0, \ldots, P_0).$$

Это неравенство выводится из неравенства Брунна. Согласно неравенству Брунна $f(t) = \sqrt[n]{V((1-t)P_0 + tP_1)}$ есть выпуклая функция от t. Поэтому $f''(0) \leqslant 0$. Вычисляя $f''(0)$, мы и получим данное квадратичное неравенство Минковского. Далее можно ещё доказать, что если многогранники P_1 и P_0 имеют параллельные грани одного строения, то знак равенства стоит здесь только тогда, когда P_1 и P_0 гомотетичны.

§ 4. Обобщения

1. В отличие от случая бесконечных многогранников для замкнутых многогранников в пространстве любого числа измерений невозможно получить теорему, столь же общую, как теорема 1 § 2. Это видно из примера, дока-

---

*) См. А. Д. Александров, К теории смешанных объёмов выпуклых тел, Часть IV, § 5, Матем. сборник, т. 3 (45): 2, стр. 242 (1938); Blaschke, Gött. Nachr. (1912), стр. 607—610; Weyl, Sitz.-Ber. Preuss. Akad. (1917), стр. 250—266. Другая форма того же вывода дана у Бляшке, Дифференциальная геометрия, § 93.

зывающего невозможность такого же обобщения теоремы 1 § 3 главы VI (см. n° 2 § 3 гл. VI). Следовательно, в n-мерном пространстве при $n>3$ аналогичная теорема о жёсткости будет верна лишь для каких-то специальных функций граней, стационарность которых выставляется в качестве условия жёсткости. Так, например, можно доказать, что *замкнутый выпуклый многогранник со стационарными направлениями и площадями* (т. е. $(n-1)$-мерными объёмами) *граней будет жёстким в пространстве любого числа измерений.*

Доказательство основано на теории смешанных объёмов и вполне аналогично данному в n° 4 § 5 доказательству этой теоремы для случая трёхмерного пространства *). Но уже вопрос о жёсткости n-мерного замкнутого многогранника при условии стационарности $(n-2)$-мерных площадей поверхностей его $(n-1)$-мерных граней — соответственно периметрам при $n=3$ — остаётся открытым.

Далее, никакие аналогичные теоремы о жёсткости многогранников в пространстве Лобачевского или сферическом не известны, хотя вопрос о таких теоремах может быть не лишён смысла, подобно вопросам о равенстве, поставленным в n° 4 § 6 главы VI.

2. Для регулярных поверхностей эвклидова пространства можно утверждать теоремы о жёсткости, аналогичные теоремам 1—3 § 2.

Пусть $f(x, y; \boldsymbol{n})$ — функция единичного вектора $\boldsymbol{n}$ и численных переменных x, y, определённая в области $x \geqslant y$ и существенно монотонная, т. е. такая, что $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ существуют, непрерывны и положительны.

Условие, налагаемое на деформации поверхности, будет состоять в стационарности в каждой её точке функции $f(R_1\ R_2; \boldsymbol{n})$, где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны, а $\boldsymbol{n}$ — нормаль в этой точке.

Самая поверхность рассматривается как огибающая своих касательных плоскостей, и деформация происходит вследствие их параллельного движения. То-есть деформируемая поверхность определяется как огибающая семейства плоскостей

$$\boldsymbol{nx} = h(\boldsymbol{n};\ t),$$

где t — параметр, от которого зависит деформация; $v(\boldsymbol{n}) = \frac{\partial h(\boldsymbol{n};\ 0)}{\partial t}$ есть начальная скорость движения касательных плоскостей.

Формулируем результаты.

1) Если при описанного типа деформации замкнутой поверхности F оказывается всюду стационарной какая-либо функция $f(R_1, R_2; \boldsymbol{n})$, удовлетворяющая формулированным выше условиям, то поверхность F — жёсткая.

Эта теорема доказывается в предположении кусочной аналитичности функций f, h, v. Впрочем, такие требования регулярности едва ли вызваны существом дела и могут быть существенно ослаблены, если поверхность F имеет всюду положительную кривизну. Вообще же поверхность может и не быть выпуклой, лишь бы функция $h(\boldsymbol{n};\ t)$ была определена для всех $\boldsymbol{n}$ и была кусочно-аналитической.

---

*) Сходным путём можно получить более общую теорему, беря вместо площадей граней смешанные площади $F_i(P, \ldots, PP_1, \ldots, P_m)$ граней деформируемого многогранника P и многогранников $P_1, \ldots, P_m$, ему аналогичных, т. е. имеющих такое же строение и грани, соответственно параллельные граням многогранника P (как, например, куб и прямоугольные параллелепипеды; при $m=0$ это сводится к случаю стационарности площадей). Доказательство основано на общих свойствах смешанных объёмов и на общем неравенстве между ними, которые можно найти в моей работе, цитированной в конце гл. VIII. Однако, ввиду ограничения «аналогичными» многогранниками P, $P_1, \ldots, P_m$, результат не кажется достаточно интересным.

Доказательство теоремы содержится по существу в моей работе «Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей», цитированной в § 6 главы VI. Ослабление требований регулярности можно извлечь из работы Погорелова, цитированной там же.

2) Пусть конечная выпуклая поверхность F с границей имеет сферическое изображение S, содержащееся внутри полусферы. Пусть она деформируется вследствие параллельных смещений её касательных плоскостей, причём а) касательные плоскости на границе стационарны, б)во всех точках стационарна некоторая функция $f(R_1, R_2; \boldsymbol{n})$, удовлетворяющая указанным выше условиям. Тогда поверхность в начальный момент неподвижна, т. е. скорость движения касательных плоскостей $v(\boldsymbol{n}) = 0$.

Эта теорема верна в пространстве любого числа изменений и доказывается, подобно теореме 3 § 2, путём рассмотрения поверхности, образованной концами векторов $\frac{1}{v(\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}$, где $v(\boldsymbol{n}) = \left(\frac{\partial h(\boldsymbol{n}; t)}{\partial t}\right)_{t=0}$ — начальная скорость движения опорной плоскости. (Если сферическое изображение не лежит внутри полусферы, но всё же содержится в полусфере, то теорема, вероятно, также верна. В иных случаях она, наверно, не выполняется.)

Обе теоремы 1), 2) сводятся к теоремам о линейных дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка. Действительно, радиусы кривизны R_1, R_2 деформируемой поверхности выражаются известным способом через «опорную функцию» $h(\boldsymbol{n}; t)$ *) и её первые и вторые производные по составляющим нормали $\boldsymbol{n}$ или, что то же, по координатам ξ, η на сфере. Поэтому

$$f(R_1, R_2; \boldsymbol{n}) = \Phi(h_{\xi\xi}, h_{\xi\eta}, h_{\eta\eta}, \ldots, h; \boldsymbol{n}).$$

Условие же стационарности будет

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0. \tag{1}$$

Но

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial h_{\xi\xi}} \frac{\partial h_{\xi\xi}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial h_{\xi\eta}} \frac{\partial h_{\xi\eta}}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t},$$

а

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t=0} = v.$$

Поэтому условие (1) сводится к линейному дифференциальному уравнению в частных производных относительно функции $v(\boldsymbol{n}) = v(\xi, \eta)$. Вследствие условий

$$\frac{\partial f}{\partial R_1} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial R_2} > 0$$

это уравнение оказывается эллиптического типа. Поэтому, в частности, теорема 2) означает единственность решения такого уравнения при заданных условиях на границе области S.

3. Обобщение теоремы 1) для замкнутых поверхностей в n-мерном пространстве не известно. Приходится ограничиваться специальными функциями главных радиусов кривизны.

Так, в n-мерном пространстве имеет место теорема:

Замкнутая выпуклая поверхность — жёсткая, если стационарна какая-либо элементарная симметрическая функция её главных радиусов кривизны (произ-

*) См., например, Бляшке, Дифференциальная геометрия, § 94.

ведение всех $n-1$ радиусов кривизны, сумма их произведений по $n-2$ и т. д.). Поверхность предполагается аналитической и радиусы кривизны нигде не обращающимися в нуль. [Эти условия могут быть ослаблены, но заведомо известно, что обобщить эту теорему на произвольные выпуклые поверхности (тогда функции кривизны определяются как функции множества на сфере) невозможно.]

Доказательство этой теоремы нигде не опубликовано, но его легко получить, опираясь на некоторые общие результаты теории смешанных объёмов, полученные в моей работе, цитированной в конце главы VIII. Тем же путём доказывается аналогичная теорема о жёсткости замкнутой выпуклой поверхности при условии стационарности «смешанной функции кривизны» её самой и других заданных замкнутых выпуклых поверхностей. Необходимые для доказательства понятия и факты имеются в той же работе.